

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α': Αριθμητική –
Άλγεβρα, Κεφάλαιο 1 - Οι φυσικοί αριθμοί**

Κεφάλαιο 1: Φυσικοί αριθμοί

Επαναληπτικές έννοιες



Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 98, 99, 100, ..., 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**.



Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.



Για τη σύγκριση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύμβολα:

το = που σημαίνει «ίσος με»,
το < που σημαίνει «μικρότερος από» και το > που σημαίνει «μεγαλύτερος από».
Για παράδειγμα: $0 < 1 < 2 < \dots$
 $< 10 < 11 < \dots < 297 < \dots < 1000 < \dots$



Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους άρτιους ή ζυγούς και τους περιττούς ή μονούς.



Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 2, (δηλαδή διαιρούνται με το 2) και περιττοί εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.



Για να τοποθετηθούν οι αριθμοί σε μία ευθεία γραμμή, φτιάχνετε μία ευθεία στην οποία τοποθετείτε αυθαίρετα στην ευθεία ένα σημείο Ο, που αποτελεί την αρχή για να παραστήσετε τον αριθμό 0. Μετά δεξιά από το σημείο Ο διαλέγετε ένα άλλο σημείο Α, που παριστάνει τον αριθμό 1. Τότε, με μονάδα μέτρησης το ΟΑ, βρίσκετε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: 2, 3, 4, 5, ...

1. Δραστηριότητα

(α) Διαλέξτε έναν τριψήφιο αριθμό που θα έχει διαφορετικά όλα τα ψηφία του:

(β) Βρείτε τους έξι διαφορετικούς αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξετε τα ψηφία του αριθμού που διαλέξατε και γράψτε τους.

--	--	--	--	--	--

(γ) Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;

(δ) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

.....

(ε) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σύμβολα.

.....

(στ) Στη συνέχεια, γράψτε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.

.....

(ζ) Να προσδιορίσετε ποιοι από τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β είναι άρτιοι και ποιοι είναι περιττοί.

Άρτιοι	Περιττοί

(η) Να τοποθετήσετε τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β σε μια ευθεία γραμμή.

2. Να τοποθετήσετε στην ευθεία γραμμή τους αριθμούς: 370, 234, 558, 92, 703.

Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa11.ggb. Στη συνέχεια φτιάξτε την ευθεία των αριθμών και τοποθετήστε τους αριθμούς στο φύλλο εργασίας.

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών



Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους **προσθετέους**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ , που είναι το άθροισμά τους και ισχύει: $\alpha + \beta = \gamma$



Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$



Η σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος μπορεί να αλλάξει.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$



Είναι δυνατή η αντικατάσταση προσθετέων με το άθροισμά τους ή η ανάλυση ενός προσθετέου σε άθροισμα.

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$



Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, M (μειωτέος) και A (αφαιρετέος) υπολογίζεται ένας αριθμός Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο A δίνει το M .

$$M = A + \Delta$$

$$\Delta = M - A$$



Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους **παράγοντες**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ , που είναι το **γινόμενο** τους:

$$\alpha \cdot \beta = \gamma$$



Εμβαδό ορθογωνίου

$$\text{Εμβαδό} = \beta \cdot \alpha$$

3. Δραστηριότητα

(α) Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

$9 + 3 =$	$3 + 9 =$	$7 + 5 =$	$5 + 7 =$	$8 + 4 =$	$4 + 8 =$	$6 + 6 =$	$0 + 1 =$	$0 + 8 =$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

(β) Να εντοπίσετε και να καταγράψετε από τα παραπάνω ζεύγη, το ζεύγος των αριθμών που έχει άθροισμα 12 και διαφορά 2.

.....

(γ) Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

.....

(δ) Τι παρατηρείτε στις δύο πρώτες προσθέσεις;

.....

4. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

$(5 + 4) + 2 =$	$5 + (4 + 2) =$	$(9 + 1) + 3 =$	$9 + (1 + 3) =$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

.....

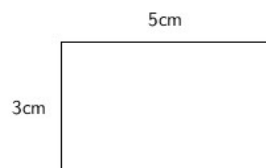
.....

5. Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ των πόλεων:

Λαμίας και Λάρισα	Λάρισα και Κομοτηνή	Κατερίνης και Αλεξανδρούπολης
-------------------	---------------------	-------------------------------

6. Ο Νέστορας και ο Μενέλαος υπολόγισαν το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκαν 15 τετραγωνικά εκατοστά. Υπολογίστε και εσείς το εμβαδόν και δώστε μια εξήγηση για το τι ακριβώς κάνατε για να το βρείτε.



.....

.....

.....

.....



- Το 1 όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- Μπορείτε να αλλάζετε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Μπορείτε να αντικαθιστάτε παράγοντες με το γινόμενο τους ή να αναλύετε έναν παράγοντα σε γινόμενο.

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$



Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση:

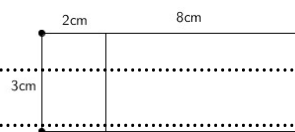
$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$



Για να πολλαπλασιάσετε έναν αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφετε στο τέλος του αριθμού:

.....
.....
.....
.....

7. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν του σχήματος.



.....
.....
.....

8. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$8 \cdot (4 + 6)$	$89 \cdot (7 + 3)$	$7 \cdot (6 - 4)$

9. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$23 \cdot 49 + 77 \cdot 49$	$76 \cdot 13 - 76 \cdot 3$	$7 \cdot 8 - 7 \cdot 4$

10. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

$5 \cdot (6 + 4) = (\square \cdot 6) + (5 \cdot \square)$	$9 \cdot (7 - 1) = (9 \cdot \square) - (\square \cdot 1)$

11. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$6 \cdot 53$	$5 \cdot 97$	$7 \cdot 402$

12. Το αμφιθέατρο του Κολλεγίου έχει 29 γραμμές καθισμάτων όπου η κάθε γραμμή έχει 12 καθίσματα. Χρησιμοποιήστε την επιμεριστική ιδιότητα για να βρείτε πόσα συνολικά καθίσματα έχει το αμφιθέατρο.

.....
.....
.....
.....

13. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$35 \cdot 10$	$421 \cdot 100$	$5 \cdot 1.000$	$27 \cdot 10.000$

A.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

~



Η πρόσθεση είναι η πρώτη πράξη με την οποία ήρθατε σε επαφή. Ακολούθησε η πράξη του πολλαπλασιασμού, όπου αναδείχτηκε πώς πρόκειται για πράξη στην οποία πραγματοποιούνται συνεχείς προσθέσεις του ίδιου αριθμού. Π.χ.

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

Όμως τι συμβαίνει σε ένα γινόμενο των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι; Π.χ.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$



Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$, που έχει n παράγοντες ίσους με το α , λέγεται **δύναμη του α στη n ή νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με α^n .

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο n λέγεται **εκθέτης**.



Το α^1 , δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι ο ίδιος ο αριθμός α .

Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^n , είναι όλες ίσες με 1.

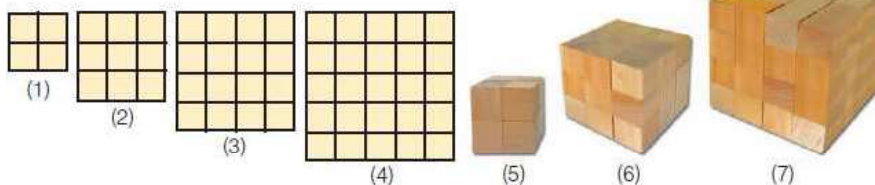


Η δύναμη του αριθμού στη δευτέρα, δηλαδή το α^2 , λέγεται και **τετράγωνο του α** .

Η δύναμη του αριθμού στην τρίτη, δηλαδή το α^3 , λέγεται και **κύβος του α** .

14. Δραστηριότητα

(α) Από πόσα  τετράγωνα αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους κύβους  τα επόμενα τρία;



(β) Γράψτε το πλήθος των τετραγώνων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο δύο ίδιων αριθμών.

(γ) Γράψτε το πλήθος των κύβων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο τριών ίδιων αριθμών.

15. Να υπολογίσετε το τετράγωνο, τον κύβο, την τέταρτη, την πέμπτη και την έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;

16. Γράψτε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα:

(α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

(β) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

(γ) $\beta \cdot \beta \cdot \beta$

(δ) $\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma$

(ε) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

(στ) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

(ζ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$

17. Κάντε τις ακόλουθες πράξεις:

(α) $2 \cdot 7^2$

(β) $2 \cdot 7^2 + 3$

(γ) $2 \cdot 7^2 + 3^2$

(δ) $2 \cdot 7 + 3^2$

(ε) $2 \cdot (7 + 3)^2$



Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.



Η σειρά με την οποία πραγματοποιούνται οι πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (προτεραιότητα των πράξεων) είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός δυνάμεων.
2. Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
3. Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, χρειάζεται να εκτελέσετε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

18. Δραστηριότητα

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση: $8 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 6) + 5 \cdot (7 + 7 \cdot 9) + 10$ και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε 1.312, η Ρένα 600 και ο Δημήτρης 180.

(α) Βρείτε ποιο από τα τρία αποτελέσματα είναι το σωστό.

.....

.....

.....

(β) Μπορείτε να προσδιορίσετε με ποια σειρά έκανε ο καθένας τις πράξεις; Ποια λάθη έγιναν στον τρόπο που πραγματοποίησαν τις πράξεις;

.....

.....

.....

(γ) Διατυπώστε έναν κανόνα για την προτεραιότητα που πρέπει να τηρείτε, όταν κάνετε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση.

19. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$	(β) $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$

20. Δημιουργήστε ομάδες των 4 ατόμων για να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa12.ggb. Προσπαθήστε να δημιουργήσετε με την χρήση των συμβόλων των πράξεων και των παρενθέσεων τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

.....

.....

.....

.....

.....

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα



Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ , έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$



Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός π ονομάζεται **πηλίκιο** και το υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.



Το υπόλοιπο είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $0 \leq \upsilon < \delta$



Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.



Τα σύμβολο $\leq$ και $\geq$ δηλώνουν μία από τις δύο πιθανές περιπτώσεις. Π.χ. αν ισχύει $a \geq b$ σημαίνει ότι ο αριθμός a ή είναι ίσος ή είναι μεγαλύτερος του b .



Αν το υπόλοιπο υ μιας διαίρεσης είναι 0, τότε η διαίρεση καλείται **Τέλεια Διαίρεση**:

$$\Delta = \delta \cdot \pi$$



Ο διαιρέτης δ μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0.



Όταν $\Delta = \delta$, τότε $\pi = 1$.



Όταν $\delta = 1$, τότε $\pi = \Delta$.



Όταν $\Delta = 0$, τότε $\pi = 0$.

21. Ο καθηγητής φυσικής αγωγής χρειάζεται να προσδιορίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου για την παρέλαση.

(α) Να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa13.ggb.

(β) Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες,, εξάδες ή επτάδες;

.....

.....

.....

(γ) Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;

.....

.....

22. Στην Α' τάξη γυμνασίου φοιτούν 175 μαθητές. Όλοι οι μαθητές θα συμμετάσχουν σε μία εκπαιδευτική επίσκεψη στο Αρχαιολογικό Μουσείο.

Αν κάθε λεωφορείο χωρά 50 μαθητές, πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για την μεταφορά των μαθητών;

.....

.....

23. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) $43 : 7$	(β) $42 : 7$	(γ) $42 : 42$	(δ) $42 : 1$	(ε) $0 : 42$
$\begin{array}{r} 43 \overline{) 7} \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 \overline{) 7} \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 \overline{) 42} \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 \overline{) 1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \overline{) 42} \end{array}$

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα γ;

.....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα δ;

.....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα ε;

.....



Τα σύμβολο $\neq$ δηλώνει ότι δεν είναι ίσο. Π.χ. αν ισχύει $a \neq 0$ σημαίνει ότι ο αριθμός a δεν μπορεί να είναι μηδέν.

24. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) $x : x$	(β) $x : 1$	(γ) $0 : x$, με $x \neq 0$
-------------	-------------	-----------------------------

25. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν «Ευκλείδεια διαίρεση»;

(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$	(β) $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$	(γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$
----------------------------	---------------------------------	----------------------------

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας-ΜΚΔ-ΕΚΠ-Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων



Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν τα πολλαπλάσια του α που είναι $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots$



Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.



Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.



Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.



Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών. Το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο αριθμών γράφεται ΕΚΠ(α, β).

26. Δύο πλοία πραγματοποιούν δρομολόγια σ' ένα νησί του Αιγαίου. Τα δύο πλοία επισκέπτονται το νησί ως εξής: Το πρώτο ανά 4 ημέρες και το δεύτερο ανά 6 ημέρες. Παρακολουθήστε το μικροπείραμα mpra14.ggb. Αν ξεκίνησαν από το νησί ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού για πρώτη φορά; Για δεύτερη φορά; Για τρίτη φορά;

.....

.....

.....

.....

27. Να γράψετε ορισμένα πολλαπλάσια του αριθμού 5 και του αριθμού 8.

Πολλαπλάσια του 5									
Πολλαπλάσια του 8									

(α) Ελέγξτε αν ο αριθμός 5 διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

.....

.....

.....

(β) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 48 διαιρείται από τον αριθμό 8. Είναι ο αριθμός 48 πολλαπλάσιο του 8;

.....

.....

(γ) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 24 διαιρείται από τον αριθμό 16. Είναι ο αριθμός 24 πολλαπλάσιο του 16;

.....

.....

28. Να γράψετε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4:

Πολλαπλάσια του 3												
Πολλαπλάσια του 4												

(α) Με βάση τον πίνακα, να καταγράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των δύο αριθμών.

.....

.....

(β) Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 4;

.....

.....



Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.



Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α .



Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.



Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των α και β και συμβολίζεται $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.



Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$.



Για τον υπολογισμό του ΜΚΔ:
α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
β) Επιλέγονται **μόνο οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη**.



Για τον υπολογισμό του ΕΚΠ:
α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
β) Επιλέγονται **οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη**.

29. Να βρείτε τους διαιρέτες του 48.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

30. Να βρείτε τους διαιρέτες του 37.

.....

.....

Τι παρατηρείτε;

.....

31. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 63.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

32. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 65.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

33. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 450, 30 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

**Κριτήρια Διαιρετότητας**

λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορείτε να συμπεράνετε, χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000, ...**, αν λήγει σε **ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** ή το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται συγχρόνως με **το 2 και το 3**.

34. Να βρείτε αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 8, 9. 10. 25. 100. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογείτε την απάντησή σας.

12510

772

225

13600

35. Έχει αναδειχθεί ότι, ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11, όταν η διαφορά των αθροισμάτων των ψηφίων που βρίσκονται στις άρτιες και στις περιττές θέσεις διαιρείται με το 11. Να ελέγξετε αν ο αριθμός 27514322 διαιρείται από το 11.

Ασκήσεις προς λύση**Κριτήρια διαιρετότητας**

- 1.1.** Να υπολογίσετε το άθροισμα: $31 + 32 + 33 + 34 + 16 + 17 + 18 + 19$
- 1.2.** Να κάνετε τις πράξεις:
- A. $62 \cdot 5 + 62 \cdot 9$
- B. $349 \cdot 17 - 349 \cdot 12$
- Γ. $99 \cdot 15 + 99 \cdot 11 - 99 \cdot 20$
- Δ. $73 \cdot 32 - 73 \cdot 12 + 73 \cdot 5$
- 1.3.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A. $2 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$
- B. $12x - 9x$
- Γ. $3y + 10y - 8y$
- 1.4.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A. $7 \cdot (x - y) + 7y + 3$
- B. $12 \cdot (\omega + \kappa) + 10 - 12 \cdot \omega - 12 \cdot \kappa$
- 1.5.** Αν $x - y = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- A. $4x - 4y$
- B. $8x - 8y + 8$
- 1.6.** Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\kappa - \lambda = 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
- A. $6\alpha + 6\beta + 2\kappa - 2\lambda$
- B. $5(\alpha + \kappa) + 5(\beta - \lambda)$
- 1.7.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A. $x + x + y + y + y$
- B. $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$
- Γ. $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
- Δ. $(x + x) \cdot y \cdot y$
- E. $\chi + \chi + \chi + \chi + \chi$
- ΣΤ. $\chi \cdot \chi \cdot \chi \cdot \chi$
- 1.8.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A. $xy + xy + xy$
- B. $3 \cdot x \cdot x \cdot 3 \cdot x$
- Γ. $4x + 4x + 4x$
- 1.9.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $10 \cdot y^2 + (10 \cdot y)^2$ όταν $y = 2$

1.10. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

A. $3 \cdot 2$ και 2^3

B. 4^3 και 3^4

Γ. $(2+4)^2$ και $2^2 + 4^2$

Δ. $(3 \cdot 4)^2$ και $3^2 \cdot 4^2$

Ε. $(5-3)^2$ και $5^2 - 3^2$

1.11. Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί $6 \cdot x$ και $6 \cdot y + 30$ διαιρούνται με το 6 (όπου x, y φυσικοί αριθμοί).

1.12. Τρεις φίλοι παίζουν στο Internet ένα παιχνίδι. Ο πρώτος παίζει το παιχνίδι κάθε 4 μέρες, ο δεύτερος κάθε 6 μέρες και ο τρίτος κάθε 8 μέρες. Αν σήμερα παίζουν όλοι το παιχνίδι, μετά από πόσες ημέρες θα ξαναπαίξουν όλοι μαζί;

1.13. Ένας Μαθηματικός έχει επιλέξει 30 ασκήσεις από το 1ο κεφάλαιο, 48 ασκήσεις από το 2ο κεφάλαιο και 36 ασκήσεις από το 3ο κεφάλαιο για να ετοιμάσει επαναληπτικά διαγωνίσματα.

A. Πόσα το πολύ όμοια διαγωνίσματα (δηλαδή με ίδιο πλήθος ασκήσεων από κάθε κεφάλαιο) μπορεί να φτιάξει;

B. Πόσες ασκήσεις θα υπάρχουν στο κάθε διαγώνισμα από το ίδιο κεφάλαιο;

1.14. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ψηφίο a στον αριθμό $23a4$ ώστε να προκύψει αριθμός που:

A. να διαιρείται με το 9

B. να διαιρείται με το 3

1.15. Αν $x + y = 2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

$$B = x + 3(x + 2) + 4(y - 1)$$

1.16. Ένα βιβλίο Μαθηματικών έχει 400 με 450 σελίδες. Αν μετρήσουμε τις σελίδες ανά 7, 12, 15 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α': Αριθμητική –
Άλγεβρα, Κεφάλαιο 2 - Κλάσματα**

Κεφάλαιο 2ο: Κλάσματα

Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος



Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωριστεί σε n ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά αποτελεί το ένα νιοστό του μεγέθους και συμβολίζεται με το $\frac{1}{n}$.



Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από k τέτοια ίσα μέρη, δίνεται από το κλάσμα $k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».



Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να είναι μηδέν.



Ένα κλάσμα είναι μικρότερο από το 1 όταν:

.....
.....
.....



Ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1 όταν:

.....
.....
.....



Ένα κλάσμα είναι ίσο με 1 όταν:

.....
.....

1. Δραστηριότητα

Ένα βράδυ τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και την χωρίζουν σε οκτώ ίσα κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια.

(α) Σε πόσα ίσα κομμάτια χωρίσαμε την πίτσα;

(β) Ποιο μέρος της πίτσας έφαγε ο πρώτος από τους φίλους;

(γ) Πώς διαβάζεται το μέρος της πίτσας που έφαγε ο πρώτος από τους φίλους;
.....

(δ) Μπορείτε να βρείτε το μέρος της πίτσας που έφαγε ο δεύτερος από τους φίλους;
.....

(ε) Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;
.....



- Στο κλάσμα $\frac{3}{8}$
 - 3 → Αριθμητής
 - → Κλασματική γραμμή
 - 8 → Παρονομαστής
- Ο Αριθμητής και ο Παρονομαστής λέγονται όροι του κλάσματος.
- Όλα τα νιοστά, δηλαδή n νιοστά, μας δίνουν την αρχική ποσότητα: $\frac{n}{n} = 1$.
- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

2. Δώστε δύο παραδείγματα κλασμάτων που είναι μεγαλύτερα του 1.

.....
.....

3. Δώστε δύο παραδείγματα κλασμάτων που είναι μικρότερα του 1.

.....
.....

4. Γράψτε δύο φυσικούς αριθμούς σε μορφή κλάσματος.

.....
.....



Ένα κλάσμα είναι ίσο με 0 όταν:

.....
.....



Αφού προσδιορίσετε ποιο μέρος του όλου είναι το τμήμα ΑΚ, μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του γνωρίζοντας το μήκος του ΑΒ.



Για να βρείτε την τιμή του μέρους χρειάζεται να ξεκινήσετε από την τιμή του όλου που είναι η τιμή της μονάδας.

5. Δραστηριότητα

(α) Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα, μπορείτε να βρείτε ποιο μέρος του μήκους του τμήματος ΑΒ είναι το μήκος του τμήματος ΑΚ; Πειραματιστείτε με το μικροπείραμα mpa2_1.ggb.



.....	Χρειάζεται να χωρίσω το τμήμα σε ίσα μέρη. Κάνοντας δοκιμές και πειραματισμό διαπιστώνω ότι χρειάζεται να το χωρίσω το τμήμα ΑΒ σε ίσα μέρη, ώστε να μπορώ να προσδιορίσω το μέρος που έχει το μήκος του τμήματος ΑΚ σε σχέση με το τμήμα ΑΒ. Έτσι, το τμήμα ΑΒ χωρίστηκε σε ίσα μέρη, ενώ παρατηρώ ότι το μήκος του τμήματος ΑΚ είναι ίσο με τα του ΑΒ.
-------------------------	--

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΚ, αν γνωρίζουμε ότι το ΑΒ είναι 32 cm;

.....	Αφού το μήκος του ΑΒ είναι 32 cm, το ΑΚ θα έχει μήκος μικρότερο του ΑΒ. Επειδή το ΑΒ είναι 32 cm, κάθε ένα από τα ίσα μέρη του ΑΒ θα είναι ίσο με: Έχοντας υπολογίσει το μήκος που έχει ένα μέρος του ΑΒ, μπορώ να υπολογίσω το μήκος που θα έχει το ΑΚ, αφού γνωρίζω πόσα μέρη του ΑΒ είναι το ΑΚ. Το ΑΚ είναι ίσο με τα του ΑΒ. Συνεπώς, το ΑΚ θα έχει μήκος
-------------------------	---

6. Άσκηση

Μια σοκολάτα ζυγίζει 120 gr και έχει 6 ίσα κομμάτια.

(α) Ποιο μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι;

(β) Πόσα κομμάτια πρέπει να κόψουμε για να πάρουμε 40 gr;

.....
.....

7. Άσκηση

Κατά την διάρκεια της εκδρομής, ένας φίλος σας, έχει ένα παγούρι που χωράει 500 ml νερού. Τον ρωτάτε αν έχει αρκετό νερό ακόμα και σας απαντάει: «Κοίτα εδώ! Έχει απομένει το $\frac{1}{4}$ του νερού μου». Πόσα ml νερού έχει ακόμα στο παγούρι του;

.....
.....
.....

A.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα



Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$

λέγονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Επειδή εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι ίσα και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$



Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$

είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστί γινόμενα»:
 $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

Δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$



Η διαίρεση των όρων ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) λέγεται απλοποίηση του κλάσματος.



Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται **ανάγωγο**.

Ένα κλάσμα είναι ανάγωγο όταν ο ΜΚΔ του αριθμητή και παρονομαστή είναι 1.



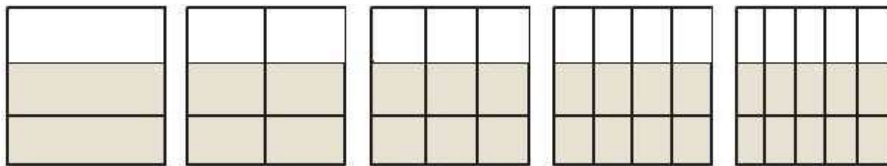
Το επίθετο ανάγωγο στα μαθηματικά προέρχεται από τη λέξη αναγωγή, δεν σχετίζεται με τη λέξη αν-αγωγή.



Για να ελέγξετε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα χρειάζεται να υπολογίσετε αν τα «χιαστί γινόμενα» είναι ίσα.

8. Δραστηριότητα

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη.



(α) Προσπαθήστε να βρείτε για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;

--	--	--	--	--

(β) Στη συνέχεια συγκρίνετε τα κλάσματα, που θα βρείτε μεταξύ τους.

Τι παρατηρείτε για τα κλάσματα που βρήκατε;

.....

.....

.....



Για να κατασκευάσετε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσετε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορείτε να εφαρμόσετε τους παρακάτω κανόνες:

- | | |
|--|--|
| <p>1. Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.</p> | $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ |
| <p>2. Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.</p> | $\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$ |

9. Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα.

.....

.....

.....

10. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$ είναι ισοδύναμα. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp2_2.ggb.

.....

.....



Για να απλοποιήσετε ένα κλάσμα χρειάζεται να διαιρέσετε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του, με τον ίδιο αριθμό.

Για να οδηγηθείτε σε ένα ανάγωγο κλάσμα χρειάζεται να διαιρέσετε αριθμητή και παρονομαστή με τον ΜΚΔ. Άρα για να απλοποιήσετε ένα κλάσμα:

1. Βρίσκετε έναν κοινό διαιρέτη αριθμητή και παρονομαστή.
2. Διαιρείτε αριθμητή και παρονομαστή με τον κοινό διαιρέτη.



Για να κάνετε ένα κλάσμα ανάγωγο:

1. Βρίσκετε τον ΜΚΔ αριθμητή και παρονομαστή.
2. Διαιρείτε αριθμητή και παρονομαστή με τον ΜΚΔ.



Για να μετατρέψετε ένα κλάσμα σε ισοδύναμο κλάσμα με άλλο παρονομαστή,

1. Χρειάζεται να διαιρέσετε το ζητούμενο παρονομαστή με αυτόν του κλάσματος
2. Χρειάζεται να πολλαπλασιάσετε τους όρους του κλάσματος με το πηλίκο που προκύπτει.

11. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$ είναι ισοδύναμα.

.....

.....

.....

12. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{30}{66}$.

.....

.....

.....

13. Το κλάσμα $\frac{8}{9}$ δεν απλοποιείται. Να εξηγήσετε γιατί.

.....

.....

.....

14. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{5}$ σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή 60.

.....

.....

.....

15. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{12}{48}$ και $\frac{3}{12}$. Να εξετάσετε αν κάποια από τα κλάσματα είναι ίσα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται ομώνυμα και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται ετερόνυμα.



Για να μετατρέψετε σε ομώνυμα δύο ή περισσότερα κλάσματα:

1. Ελέγχετε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.
2. Αν απλοποιούνται τα κάνετε ανάγωγα.
3. Βρίσκετε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων κλασμάτων.
4. Διαιρείτε το ΕΚΠ με τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος.
5. Πολλαπλασιάζετε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκατε.

16. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{3}$ και $\frac{4}{14}$. Να εξετάσετε αν κάποια από τα κλάσματα είναι ομώνυμα.

.....

.....

.....

17. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

18. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{20}$.

.....

.....

.....

.....

.....

A.2.3. Σύγκριση κλασμάτων



Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.



Για να συγκρίνετε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπετε σε ομώνυμα και συγκρίνετε τους αριθμητές τους.



Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.



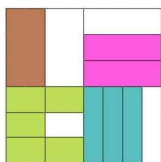
Αν το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μεγαλύτερο του κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$

μπορείτε να γράψετε:

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$$

19. Δραστηριότητα

Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa2_3.ggb για να διερευνήσετε τι μέρος του μεγάλου τετραγώνου καλύπτει κάθε χρώμα στο σχήμα.



.....
.....
.....

20. Στο ωρολόγιο πρόγραμμα έχετε 40 ώρες μαθημάτων την εβδομάδα. Κάποιες από αυτές είναι: 7 ώρες αγγλικά, 4 ώρες μαθηματικά, 3 ώρες γυμναστική, 5 ώρες αρχαία, 5 ώρες νέα και 1 ώρα πληροφορική.

(α) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα αγγλικά;

(β) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα μαθηματικά;

(γ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα αρχαία;

(δ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι η γυμναστική;

(ε) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι η πληροφορική;

(στ) Ποιο μέρος του ωρολογίου προγράμματος είναι τα νέα;

(ζ) Ποιο μάθημα καταλαμβάνει περισσότερες ώρες;

(η) Να γράψετε τα παραπάνω μαθήματα από αυτό που καταλαμβάνει μεγαλύτερο προς αυτό που καταλαμβάνει μικρότερο μέρος.

7 ώρες > 5 ώρες
(αγγλικά) (αρχαία)

21. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$.

.....
.....

22. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$. Γράψτε την αντίστοιχη σχέση.

.....
.....

23. Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$. Γράψτε την αντίστοιχη σχέση.

.....
.....
.....

24. Να εξηγήσετε γιατί το κλάσμα $\frac{2}{3}$ είναι μικρότερο του 1.

.....

.....

25. Να εξηγήσετε γιατί το κλάσμα $\frac{3}{2}$ είναι μεγαλύτερο του 1.

.....

.....

26. Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται το κλάσμα $\frac{7}{8}$;

.....

.....

27. Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται το κλάσμα $\frac{16}{3}$;

.....

.....



28. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα: (α) $\frac{2}{3}$ και (β) $\frac{8}{5}$

.....

.....

29. Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από το $\frac{3}{5}$

.....

.....

A.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

~



Για να προσθέσετε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα χρειάζεται να προσθέσετε τους αριθμητές τους.

Αν τα κλάσματα είναι ετερόνυμα αρχικά χρειάζεται να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτετε τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορείτε να εργαστείτε για την αφαίρεση κλασμάτων.

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$$

30. Δραστηριότητα

Έχετε 7 μπισκότα και θέλετε να τα μοιράσετε σε 4 άτομα.

Καταγράψτε τρόπους με τους οποίους θα τα μοιράσετε.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

31. Άσκηση

Ως μέλος του 15μελούς έχετε αναλάβει να ενημερώσετε τα 12 τμήματα του σχολείου για μία φιλανθρωπική δράση που θα οργανώσει το 15μελές. Την πρώτη περίοδο

ενημερώνετε τα $\frac{4}{12}$ των τμημάτων, ενώ την δεύτερη περίοδο ενημερώνετε τα $\frac{2}{12}$

των τμημάτων. Πόσα τμήματα έχετε ενημερώσει συνολικά;

.....

.....

32. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

33. Να υπολογίσετε τη διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{7}{20}$ και $\frac{3}{12}$.

.....

.....

.....

.....



Ισχύει ότι: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1$

Μερικές φορές αντί να

γράψετε $1 + \frac{4}{5}$, μπορείτε να

γράψετε $1\frac{4}{5}$.



Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.



Για να μετατρέψετε ένα αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελείτε την ευκλείδεια διαίρεση: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$. Οπότε το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\delta \cdot \pi + \upsilon}{\delta} =$$

$$\frac{\delta \cdot \pi}{\delta} + \frac{\upsilon}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta} = \pi \frac{\upsilon}{\delta}$$

Ισχύει ότι:

$$\pi \frac{\upsilon}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta}$$

Γενικά ελέγχετε πόσες φορές χωράει ο παρονομαστής στον αριθμητή και το αποτέλεσμα καθορίζει τον ακέραιο αριθμό του μεικτού. Το υπόλοιπο τοποθετείται ως εκθέτης του νέου κλάσματος.

Για να μετατρέψετε ένα μεικτό αριθμό σε κλάσμα: Βρίσκετε το $\pi \cdot \delta + \upsilon$. Το τοποθετείτε στον αριθμητή και στον παρονομαστή τοποθετείτε το δ .

$$\pi \frac{\upsilon}{\delta} \rightarrow \frac{\pi \cdot \delta + \upsilon}{\delta}$$

34. Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\frac{3+5}{5} = \frac{3}{5} + 1$.

.....

.....

.....

35. Να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1$.

.....

.....

.....

36. Να βρείτε τη διαφορά: $\frac{15}{4} - 1$ και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.

.....

.....

.....

37. Να βρείτε το άθροισμα: $2 + 1\frac{1}{3}$.

.....

.....

.....

38. Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσετε στο $\frac{3}{7}$ για να βρείτε άθροισμα $\frac{6}{9}$;

.....

.....

.....

39. Δίνεται ο μεικτός $3\frac{3}{4}$. Να τον γράψετε σε κλάσμα.

.....

.....

.....

40. Να εργαστείτε και με άλλα κλάσματα και μικτούς στο μικροπείραμα mpa2_4.ggb.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων



Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$



Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda \cdot \gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \lambda$$



Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.



Τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφα.

41. Σχεδιάστε δύο τετράγωνα και χωρίστε το ένα σε 5 ίσα μέρη με τη χρήση κάθετων γραμμών και το άλλο σε 3 ίσα μέρη με την χρήση οριζόντιων γραμμών. Στη συνέχεια ζωγραφίστε το $\frac{1}{5}$ του πρώτου τετραγώνου και τα $\frac{2}{3}$ του δεύτερου τετραγώνου. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa2_5.ggb.

Διερευνήστε τι συμβαίνει όταν τοποθετήσετε το δεύτερο τετράγωνο πάνω στο πρώτο.

.....

.....

.....

42. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} =$	(ii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} =$	(iii) $\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{4} =$	(iv) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} =$
---------------------------------------	--	--	--

43. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $3 \cdot \frac{5}{4} =$	(ii) $\frac{2}{1} \cdot \frac{8}{5} =$	(iii) $\frac{14}{3} \cdot 5 =$	(iv) $\frac{14}{3} \cdot \frac{5}{1} =$
-----------------------------	--	--------------------------------	---

44. Να ελέγξετε αν τα ακόλουθα κλάσματα είναι αντίστροφα.

(i) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} =$	(ii) $\frac{2}{4} \cdot \frac{10}{5} =$	(iii) $\frac{14}{3} \cdot \frac{2}{9} =$	(iv) $\frac{1}{4} \cdot 4 =$
---------------------------------------	---	--	------------------------------

45. Να γράψετε δύο αντίστροφα κλάσματα που είναι ταυτόχρονα ισοδύναμα.

.....

.....

46. Να γράψετε ένα κλάσμα που δεν έχει αντίστροφο.

.....

.....



$$1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$



Αντιμεταθετική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$



Προσεταιριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$$



Επιμεριστική

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$$

47. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $1 \cdot \frac{5}{2} =$	(ii) $\frac{2}{3} \cdot 1$	(iii) $1 \cdot \frac{2}{9}$	(iv) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1}$
-----------------------------	----------------------------	-----------------------------	--------------------------------------

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

48. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} =$	(ii) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$	(iii) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9}$	(iv) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5}$
---------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

49. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} \right) =$	(ii) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \right) \cdot \frac{4}{3} =$	(iii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} =$
--	---	---

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

50. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

(i) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} + \frac{4}{3} \right) =$	(ii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} =$
--	--

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

51. Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο;

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων



Με τον τρόπο αυτό μπορεί να παρουσιαστεί το πηλίκο δύο

κλασμάτων. Γράφοντας $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

είναι σαν να τίθεται το ερώτημα:

«Πόσα $\frac{1}{4}$ υπάρχουν στο $\frac{1}{2}$;»



Για να διαιρέσετε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσετε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$



Για να διαιρέσετε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσετε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

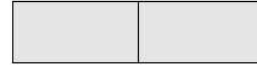
$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$



Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

52. Α. Πόσα $\frac{1}{4}$ υπάρχουν στο $\frac{1}{2}$; Διερευνήστε τι συμβαίνει αξιοποιώντας τα παρακάτω

σχήματα.



.....



.....

53. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $3 : \frac{9}{4} =$

(ii) $1 : \frac{8}{5} =$

(iii) $\frac{14}{3} : \frac{4}{9} =$

(iv) $\frac{4}{9} : \frac{14}{3} =$

54. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $\frac{3}{7} : \frac{9}{14} =$

(ii) $\frac{4}{3} : \frac{2}{15} =$

(iii) $\frac{9}{7} : \frac{9}{7} =$

(iv) $\frac{3}{5} : \frac{12}{20} =$

55. Να κάνετε τις διαιρέσεις.

(i) $1 : \frac{5}{2} =$

(ii) $\frac{2}{3} : 1 =$

(iii) $\frac{1}{1} : \frac{2}{9} =$

(iv) $\frac{1}{4} : \frac{1}{1} =$

56. Να ελέγξετε αν τα ακόλουθα κλάσματα είναι σύνθετα κλάσματα.

(i) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$

(ii) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$

(iii) $\frac{5}{3}$

(iv) $\frac{5}{\frac{3}{4}}$



Για να μετατρέψετε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό είναι χρήσιμο να θυμάστε ότι το σύνθετο κλάσμα είναι η διαίρεση δύο κλασμάτων:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Συνεπώς μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}, \text{ όπου για να γίνει η}$$

διαίρεση αντιστρέφεται το δεύτερο κλάσμα:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και ως εξής:

- Πολλαπλασιάζεται μέσους και άκρους, ή με άλλο λόγια
- Πολλαπλασιάζεται τον αριθμητή του πρώτου με τον παρονομαστή του δεύτερου και τον παρονομαστή του πρώτου με αριθμητή του δεύτερου.

Γενικά:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

57. Να μετατρέψετε σε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$(i) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} =$$

$$(ii) \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{8}} =$$

$$(iii) \frac{\frac{7}{10}}{\frac{5}{5}} =$$

58. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$\frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{3} - \frac{2}{6}}$$

.....

.....

.....

.....

Ανακεφαλαίωση

- | | |
|--|--|
| <p>1. Τι είναι κλάσμα;
.....
.....</p> <p>2. Τι σχέση έχει ο Αριθμητής και ο Παρανομαστής με τον Διαιρετέο και τον διαιρέτη;
.....
.....</p> <p>3. Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί με την μορφή κλάσματος;
.....
.....</p> <p>4. Μπορεί ένα κλάσμα να είναι μεγαλύτερο του 1;
.....
.....</p> <p>5. Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα;
.....
.....</p> <p>6. Πώς ελέγχουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
.....
.....</p> <p>7. Τι είναι ανάγωγο κλάσμα;
.....
.....</p> <p>8. Πώς απλοποιούμε ένα κλάσμα;
.....
.....</p> <p>9. Τι είναι ομώνυμα και τι ετερόνυμα κλάσματα;
.....
.....</p> <p>10. Πώς κάνουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα ομώνυμα;
.....
.....</p> <p>11. Πώς συγκρίνουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα;
.....
.....</p> | <p>12. Πώς γράφουμε ότι ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο;
.....
.....</p> <p>13. Πώς τοποθετούμε τα κλάσματα στην ευθεία των αριθμών;
.....
.....</p> <p>14. Πώς προσθέτουμε και πώς αφαιρούμε κλάσματα;
.....
.....</p> <p>15. Πώς γράφουμε ένα κλάσμα με την μορφή μεικτού αριθμού;
.....
.....</p> <p>16. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα;
.....
.....</p> <p>17. Τι είναι αντίστροφα κλάσματα;
.....
.....</p> <p>18. Ποια κλάσματα δεν έχουν αντίστροφο κλάσμα;
.....
.....</p> <p>19. Ποιες ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στα κλάσματα;
.....
.....</p> <p>20. Πώς διαιρούμε δύο κλάσματα;
.....
.....</p> <p>21. Τι είναι σύνθετο κλάσμα;
.....
.....</p> <p>22. Πώς μετατρέπουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό;
.....
.....</p> |
|--|--|

23. * Ο Στέφανος κατέγραψε ότι από τα βιβλία στο σπίτι του το $\frac{1}{2}$ είναι μυθιστορήματα, ενώ ο Ανδρέας

διαπίστωσε ότι από τα βιβλία που υπάρχουν στο σπίτι του το $\frac{1}{5}$ είναι μυθιστορήματα.

Ο Στέφανος υποστήριξε ότι στο σπίτι του υπάρχουν περισσότερα βιβλία με μυθιστορήματα από ό,τι τα βιβλία με μυθιστορήματα του Ανδρέα.

A. Έχει δίκιο ο Στέφανος;

B. Γιατί; Γιατί όχι;

Γ. Τι χρειάζεται να κάνουμε;

24. * Η Κατερίνα έγραψε $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$.

A. Είναι σωστή η λύση;

B. Η Κατερίνα ρωτήθηκε σχετικά και είπε:

«Έφαγα 1 από τα 2 τoστ που είχα και η Χαρά έφαγε τα 2 από τα 3 τoστ που είχε. Άρα μαζί φάγαμε 3 από τα 5 τoστ που είχαμε».

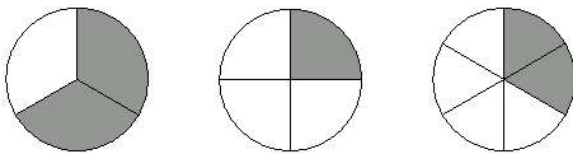
Γ. Χρειάζεται να πούμε κάτι στην Κατερίνα για να κατανοήσει το θέμα;

25. * Ο Βασίλης έγραψε $1\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$.

A. Είναι σωστή η λύση;

B. Ποιος είναι ο πιθανός λόγος που έδωσε αυτό το αποτέλεσμα;

26. * Ποιο σχήμα έχει σκιασμένο το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειάς του;



A. Η Μαρία υποστήριξε ότι κανένα από τα σχήματα δεν έχει σκιασμένο το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειάς του.

B. Τι χρειάζεται να κάνετε για να ελέγξετε αυτό που υποστηρίζει η Μαρία;

27. * Ο Χρήστος έγραψε ότι: $\frac{1}{6} > \frac{1}{4}$.

A. Έχει δίκιο;

B. Αν χρειάζεται να κάνετε κάτι, τι θα ελέγχατε;

Ασκήσεις προς λύση

2.1. Να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x για να ισχύει η ισότητα:

A. $\frac{x-7}{12}=0$ B. $\frac{151-x}{13}=0$ Γ. $\frac{x-2}{3}=1$ Δ. $\frac{9-x}{6}=1$ Ε. $\frac{2x+7}{25}=1$

2.2. Αν $A = \left(\frac{3}{4} + 2\right) : \frac{2}{3}$, $B = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$ και $\Gamma = \frac{3}{2} : \left(2 + 2\frac{1}{3}\right)$ να υπολογίσετε:

(α) Τις τιμές των A , B , Γ

(β) Την παράσταση $A : B + \Gamma + B \cdot A$

2.3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

A. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{3 \cdot (5^2 - 4^2)}{3^4}$

B. $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot 4 + 2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

Γ. $\left(\frac{5}{4} + 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{2} + 4\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

Δ. $\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{25} + 3 \cdot \left(3 - \frac{1}{4}\right)$

Ε. $\frac{\frac{5}{4} : \frac{25}{21} + \frac{11}{15} : 4\frac{8}{9} - \frac{1}{5}}{2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}}$

2.4. Ένα τμήμα ενός δρόμου ασφαλτοστρώνεται σε 5 ώρες αν εργαστεί μια ομάδα από το συνεργείο που έχει αναλάβει το έργο, σε 7 ώρες αν εργαστεί μια άλλη ομάδα και σε 9 ώρες αν εργαστεί μια τρίτη ομάδα.

A. Τι μέρος του έργου ασφαλτοστρώνει σε μια ώρα κάθε ομάδα;

B. Τι μέρος του έργου ασφαλτοστρώνουν σε μια ώρα όταν εργαστούν και οι τρεις ομάδες ταυτόχρονα;

2.5. A. Σε μια τάξη 25 μαθητών, 6 μαθητές πήραν στο διαγώνισμα των Μαθηματικών βαθμό άριστα. Να βρείτε το μέρος των μαθητών που πήρε βαθμό άριστα.

B. Σε μια άλλη τάξη 20 μαθητών, 4 μαθητές πήραν βαθμό άριστα. Να βρείτε το μέρος των μαθητών που πήρε βαθμό άριστα.

Γ. Να μετατρέψετε τα παραπάνω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100 και να βρείτε ποια από τις δυο τάξεις είχε μεγαλύτερο ποσοστό άριστων στα μαθηματικά.

2.6. Να βρείτε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού γ έχουν νόημα τα παρακάτω κλάσματα:

A. $\frac{3}{3-\gamma}$ B. $\frac{2}{2\gamma-6}$ Γ. $\frac{1}{\gamma-4}$

2.7. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να βρείτε τις τιμές των παρακάτω κλασμάτων:

A. $\frac{3x+3}{3}$ B. $\frac{2x-2}{2}$ Γ. $\frac{4x-12}{4}$ Δ. $\frac{5x+20}{5}$

2.8. Να βρείτε ποια κλασματική μονάδα παριστάνει καθένα από τα παρακάτω κλάσματα με την προϋπόθεση ότι ορίζονται τα κλάσματα:

A. $\frac{x+2}{2x+4}$

B. $\frac{x-3}{3x-9}$

Γ. $\frac{5x+10}{25x+50}$

Δ. $\frac{2x-4}{4x-8}$

2.9. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή ω ($\omega \neq 0$, φυσικός) ώστε να ισχύει:

A. $\frac{\omega}{5} < 1$

B. $\frac{\omega}{3} < 1$

Γ. $\frac{4}{\omega} > 1$

Δ. $\frac{9}{\omega} > 1$

2.10. Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

A. $\frac{2\alpha-\beta}{\alpha} = 2 - \frac{\beta}{\alpha}$

B. $\frac{4\alpha+6\beta}{2\beta} = \frac{2}{\beta} + 3$

Γ. $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}$

Δ. $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

2.11. Αν είναι $x+y = \frac{3}{2}$ και $z+y = \frac{4}{3}$, να υπολογίσετε την παράσταση $x+2y+z$.

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α': Αριθμητική –
Άλγεβρα, Κεφάλαιο 3 - Δεκαδικοί αριθμοί**

Κεφάλαιο 3ο: Δεκαδικοί αριθμοί

Α.3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

~



Η θέση των ψηφίων σε έναν αριθμό προσδιορίζει την τάξη τους (δηλαδή την αξία τους σε συγκεκριμένες μονάδες).



Κάθε δεκαδικός αριθμός έχει:

- α) **ακέραιο μέρος**,
β) **δεκαδικό μέρος**,

τα οποία διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.



Στο **δεκαδικό μέρος** οι τάξεις είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά, τα δεκάκις χιλιοστά, τα εκατοντάκις χιλιοστά, τα εκατομμυριοστά κ.λπ.

Στο **ακέραιο μέρος** οι τάξεις είναι σε Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες κ.λπ.



Δέκα μονάδες μίας τάξης είναι μία μονάδα μεγαλύτερης τάξης.



Κάθε φυσικός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός, με μηδενικό δεκαδικό μέρος.



Τα μηδενικά στην αρχή του ακεραίου μέρους ή στο τέλος του δεκαδικού, είναι σα να μην υπάρχουν.



Στους υπολογιστές και σε ορισμένες χώρες, για το διαχωρισμό του ακεραίου από το δεκαδικό μέρος, αντί του κόμματος « , », χρησιμοποιείται η τελεία « . ». (π.χ.: 5.124 αντί του 5,124)

1. Δραστηριότητα

- (α) Να καταγράψετε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό με 4 διαφορετικά ψηφία.

.....

- (β) Να προσδιορίσετε τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες και τις χιλιάδες του παραπάνω αριθμού.

.....

- (γ) Να καταγράψετε έναν δεκαδικό αριθμό.

.....

- (δ) Να προσδιορίσετε στον δεκαδικό αριθμό 7435,62 τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες, τις χιλιάδες, τα δέκατα, τα εκατοστά.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (ε) Για να γίνουν τα δέκατα 7 στον παραπάνω αριθμό, πόσα εκατοστά χρειάζονται;

.....

- (στ) Να γράψετε έναν φυσικό αριθμό. Στη συνέχεια να τον γράψετε ως δεκαδικό αριθμό.

.....

.....

- (ζ) Τι σχέση έχουν οι αριθμοί σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα.

(i) 7,500 και 7,5

(ii) 005,2 και 5,2



Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην αρχική τάξη.

Να γράψετε δύο τέτοιους
δεκαδικούς αριθμούς.



Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από το ίδιο ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο.

Να γράψετε δύο τέτοιους
δεκαδικούς αριθμούς.



Για να στρογγυλοποιήσετε
ένα δεκαδικό αριθμό:

- Προσδιορίζετε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- Εξετάζετε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
 - Αν αυτό είναι μικρότερο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
 - Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

2. Εργαστείτε στο μικροπείραμα tra3 1.ggb.

Xilabos	Eraravabos	Dekabos	Mayabos	Yuliyarabos	Δεkara	Eraravabos	Xilabos	Δεkara	Yuliyarabos	Eraravabos	Xilabos	Eraravabos	Yuliyarabos
1	5	1	3	,	0	0	3						
		2	7	,	1	8	0	6					
			0	,	4	0	5	9	0	8			
	9	5	0	,	4	2	0						
8	5	0	0	,	7								
1	5	4	5	,	8	6	4	5	2				
9	5	2	8	,	9								
9	8	0	1	,	5	1	3	3					
4	6	3	7	,	2	5	2						
1	5	1	3	,	0	0	4						
1	5	1	3	,	1								

(α) Επιλέξτε δύο από τους αριθμούς και προσπαθήστε να τους γράψετε ολογράφως.

[illegible]

(β) Προσπαθήστε να τους τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά στο δεξί πλαίσιο.

Kilodes	Ennartnades	Lexides	Modes	Yachararaj	Askara	Enartand	Kilnand	Asak ylnand	Enart ylnand	Enart ylnand
1 5	1 3		0 0	3						
	2 7		1 8	0 6						
	0		4 0	5 9	0 8					
9 5	0 0		4 2	0						
8 5	0 0		7							
1 5	4 5		8 6	4 5	2					
9 5	2 8		9							
9 8	0 1		5 1	3 3						
4 6	3 7		2 5	2						
1 5	1 3		0 0	4						
1 5	1 3		1							

[illegible]

(γ) Με βάση τους αριθμούς που έχετε τοποθετήσει σε αύξουσα τάξη, να στρογγυλοποιήσετε στη μονάδα τους 6 αριθμούς που έχουν επισημανθεί. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa3_2.ggb.

.....

.....

.....

3. Στα τρία τρίμηνα στο μάθημα της πληροφορικής της α΄ γυμνασίου, τρεις μαθητές έλαβαν τους βαθμούς που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε το μέσο όρο του μαθητή και να τον στρογγυλοποιήσετε στη μονάδα.

	α τρίμηνο	β τρίμηνο	γ τρίμηνο	Μέσος όρος	Τελικός βαθμός
1ος μαθητής	18	18	20		
2ος μαθητής	19	19	20		
3ος μαθητής	19	20	20		

Δεκαδικό κλάσμα



Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10.



Στην περίπτωση που το πηλίκιο δεν είναι ακριβές, συνήθως ο δεκαδικός αριθμός γράφεται με προσέγγιση δέκατου ή εκατοστού ή χιλιοστού κλπ.



Οι δεκαδικοί αριθμοί και τα δεκαδικά κλάσματα είναι διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών.



Κάθε δεκαδικός αριθμός γράφεται ως δεκαδικό κλάσμα, αν ως αριθμητή γράψετε τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή και ως παρονομαστή δύναμη του 10 με τόσα μηδενικά, όσα και τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.



Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός, με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.



Για να μετατρέψετε ένα κλάσμα σε δεκαδικό κλάσμα:

1. Μετατρέπετε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό.
2. Μετατρέπετε τον δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα.

4. Στον δεκαδικό αριθμό $\square 0, \square 9$ λείπουν δύο ψηφία του.

(α) Συμπληρώστε τα κενά έτσι, ώστε κανένα ψηφίο του αριθμού να μην είναι ίδιο με άλλο.

(β) Βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος δεκαδικός που μπορείτε να γράψετε;

.....

5. Όταν κάποια στιγμή σας έβαλαν θερμομέτρο για να δουν τη θερμοκρασία σας, ακούσατε το εξής: «Έχεις δέκατα!». Τι σημαίνει αυτή η έκφραση;

.....

.....

6. Έστω ο δεκαδικός αριθμός 0,5. Δώστε ένα παράδειγμα που χρησιμοποιείται αυτό τον αριθμό για να εκφράσετε κάποια αγορά.

.....

.....

7. Καταγράψτε τέσσερα δεκαδικά κλάσματα που το καθένα να έχει διαφορετικό παρονομαστή από το άλλο.

.....

8. Να γράψετε τα ακόλουθα κλάσματα, ως δεκαδικούς αριθμούς με την εκτέλεση των αντίστοιχων διαιρέσεων:

$$(α) \frac{20}{4}$$

$$(β) \frac{50}{8}$$

$$(γ) \frac{520}{67}$$

9. Να γράψετε, ως κλάσματα, τους δεκαδικούς αριθμούς: (α) 2,35 και (β) 0,348.

$$(α) 2,35$$

$$(β) 0,348$$

10. Να γράψετε, ως δεκαδικούς αριθμούς, τα κλάσματα:

$$(α) \frac{314}{100}$$

$$(β) \frac{769}{1000}$$

Τι παρατηρείτε σε σχέση με την γραφή του δεκαδικού αριθμού και το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που έχει;

.....

.....

11. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{10}{8}$ σε δεκαδικό κλάσμα.

.....

.....

.....

.....

12. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τους δεκαδικούς αριθμούς:

(α) 0,8

(β) 1,35

Καταγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα τοποθετήσετε ένα δεκαδικό αριθμό στην ευθεία των αριθμών σε σχέση με την γραφή του δεκαδικού αριθμού;

.....

.....

.....

.....

.....

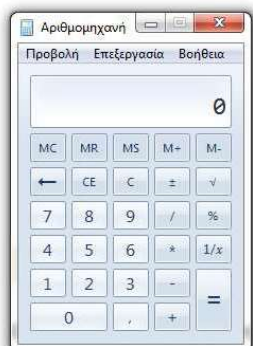
.....

13. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa3_3.ggb.

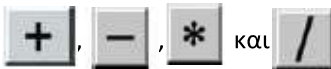
Α.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

~

Τυπική προβολή



Τα σύμβολα για τις βασικές πράξεις είναι τα ακόλουθα:



Με το πάτημα του πλήκτρου  στην οθόνη εμφανίζεται το αποτέλεσμα της πράξης.

14. Να καταγράψετε τα βήματα που θα ακολουθήσετε για να εκτελέσετε τις πράξεις:

(α) Άθροισμα των αριθμών 128,35 και 59,003

.....

(β) Διαφορά των αριθμών 752 και 38,498

.....

(γ) Γινόμενο των αριθμών 1520,39 και 3,759

.....

(δ) Πηλίκο των αριθμών 859 και 10,19

.....

Τα ακόλουθα πλήκτρα αποτελούν βοηθητική μνήμη:

	εμφανίζει στην οθόνη τον αριθμό που είναι τοποθετημένος στη μνήμη,
	σβήνει το περιεχόμενο της μνήμης και
	προσθέτει στον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης
	αφαιρεί από τον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

15. Να καταγράψετε τα βήματα που θα ακολουθήσετε για να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $(1,5 : 3 + 0,4 \cdot 7) \cdot 5 - 31,2 : (0,9 \cdot 2 + 3,3 : 1,1)$ με τη χρήση υπολογιστή τσέπης ή την αριθμομηχανή του υπολογιστή σε τυπική προβολή.

.....

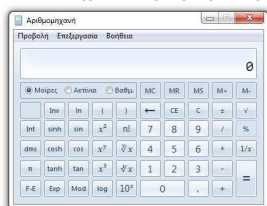


Προτεραιότητα πράξεων:

- Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.
- Δυνάμεις
- Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις
- Προσθέσεις και Αφαιρέσεις

Οι πράξεις ίδιας προτεραιότητας εκτελούνται από αριστερά προς τα δεξιά.

Επιστημονική Προβολή



Ένας επιστημονικός υπολογιστής τσέπης ή η επιστημονική προβολή της αριθμομηχανής του υπολογιστή περιλαμβάνει και σύμβολα για άλλες πράξεις, όπως την πράξη της δύναμης, αλλά και την χρήση των παρενθέσεων.

Με το πλήκτρο  μπορείτε να υπολογίσετε δυνάμεις.

Αρχικά πληκτρολογείτε την βάση

Στη συνέχεια πατάτε το παραπάνω πλήκτρο και

Τέλος, πληκτρολογείτε τον εκθέτη.

16. Να υπολογίσετε με τη χρήση υπολογιστή τσέπης ή την αριθμομηχανή του υπολογιστή τις δυνάμεις και να καταγράψετε το αποτέλεσμα:

(α) $2,52^1$

(β) $2,52^2$

(γ) $2,52^3$

(α) $0,22^1$

(β) $0,22^2$

(γ) $0,22^3$

Τι παρατηρείτε ανάμεσα στις δυνάμεις με την ίδια βάση και το αποτέλεσμα της πράξης;

.....

17. Ποια αριθμητική παράσταση υπολογίζεται, με τις παρακάτω πράξεις που έχουν γίνει στο κομπιουτεράκι και ποιο είναι το τελικό αποτέλεσμα;

$7,28 \div 5,2 - 0,4 = ?$ $5,8 + 4,2 = ?$ 

$2,4 + 7,1 = ?$ $\div 5 = ?$ $+ 0,1 = ?$ 

$2,03 + 0,47 = ?$ $\times 3,2 = ?$   $? \times \text{MC}$ $?$

18. Πώς μπορούν να αξιοποιηθούν οι παρενθέσεις   σε έναν επιστημονικό

υπολογιστή τσέπης ή στην επιστημονική προβολή της αριθμομηχανής του υπολογιστή;

.....

Ασκήσεις προς λύση

- 3.1.** Δίνονται τα ψηφία 4, 1, 5, 6, 9, 2, 7. Αφού τοποθετήσετε τα ψηφία σε αύξουσα σειρά, να τοποθετήσετε υποδιαστολή, ώστε να προκύψει αριθμός ο οποίος θα βρίσκεται μεταξύ των:
- A. 1 και 10
B. 100 και 1.000
Γ. 1.000 και 10.000
- 3.2.** Να συμπληρώσετε το ψηφίο που λείπει στον αριθμό $12,\square 7$ αν γνωρίζετε ότι, όταν ο αριθμός στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο δέκατο, γίνεται ίσος με 12,6.
- 3.3.** Αν είναι $x = 3,4$, $y = 2,7$ και $z = 6,3$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
- A. $x + y$
B. $y + z$
Γ. $z + x$
Δ. $x + y + z$
- 3.4.** Αν $x = 19,2 - 13,8$ και $y = 93,5 - 87,3$, να κάνετε τις πράξεις:
- A. $y - (y - x) + 4$
B. $x + y - (y + 2)$
Γ. $x - (y - 5)$
- 3.5.** Να κάνετε τις πράξεις:
- A. $12,34 + 6,09 - 12,98 + 1,56$
B. $0,304 + 2,06 - 1,99 + 1,002$
- 3.6.** Να κάνετε τις πράξεις:
- A. $(12,5 : 10) - (846 : 1.000) + (313 : 100)$
B. $(0,03 : 0,1) + (0,6 : 0,001) - (0,7 : 0,01)$
- 3.7.** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- A. $20 \cdot x^2 + (20 \cdot x)^2$, όταν $x = 0,1$
B. $y^2 + 2 \cdot y - 0,3$, όταν $y = 0,4$
- 3.8.** Αν $x - y = 3$ και $z = w = 1,5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $K = 13 \cdot x - (3^2 + 2^2) \cdot y + (1,4 : 0,14) \cdot w + (x - y)^2 \cdot z + (2^2 - 3) \cdot z$
- 3.9.** Τα $\frac{4}{5}$ του λίτρου γάλακτος κοστίζουν 0,8 ευρώ. Να υπολογίσετε πόσο κοστίζουν:
- A. το $\frac{1}{5}$
B. το 1 λίτρο
Γ. τα 3 λίτρα
- 3.10.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
- A. $(3,4 - 2,1)^2 - 19 \cdot 0,01 + 0,05$
B. $(6^2 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 9 - 1,8 : 0,9)^{2014} + (4^3 + 2 \cdot 18 - 0,5 : 0,01)^4$

- 3.11.** Μια μικρή οικογενειακή γαλακτοβιομηχανία διαθέτει 950 κιλά γάλα και θέλει να τα συσκευάσει σε μπουκάλια χωρητικότητας 2 λίτρων το καθένα. Πόσα δοχεία θα χρειαστεί;
- 3.12.** Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 52,4 dm. Να υπολογίσετε την πλευρά του.
- 3.13.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου που έχει μήκος 1,3 m και πλάτος 4,7 m.

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α': Αριθμητική – Άλγεβρα,
Κεφάλαιο 4 - Εξισώσεις και προβλήματα**

Κεφάλαιο 4: Εξισώσεις και προβλήματα

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης. Οι εξισώσεις: $\alpha + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$ και $x : \alpha = \beta$

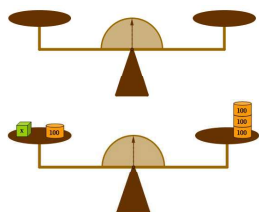
~



Εικόνα από αγγείο του 6ου αιώνα π.Χ. (Νέα Υόρκη, Μητροπολιτικό Μουσείο).



Μία εξίσωση είναι σαν ένας ζυγός διότι δείχνει ότι δύο ποσότητες είναι ίσες.



Εξίσωση με έναν άγνωστο
 $x + 100 = 300$



Η εξίσωση περιλαμβάνει δύο ίσα μέρη, τα οποία λέγονται μέλη της εξίσωσης. Στην εξίσωση έχουμε δύο μέλη. Το πρώτο και το δεύτερο μέλος:
 $x + 100 = 300$

Πρώτο μέλος	Δεύτερο μέλος
-------------	---------------



Για να λύσετε μία εξίσωση που περιλαμβάνει μία μεταβλητή, βρίσκετε την τιμή (ή τις τιμές) της μεταβλητής που επαληθεύει την ισότητα.



Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

1. Δραστηριότητα

Προσπαθήστε να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια γραμμάτων.

- (α) Ένας φυσικός αριθμός:
 (β) Η τιμή ενός τετραδίου:
 (γ) Ο χρόνος που διαθέσατε για διάβασμα χτες:
 (δ) Το βάρος της σχολικής σας τσάντας:

2. Δραστηριότητα

Προσπαθήστε να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων.

- (α) Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού:
 (β) Ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού:
 (γ) Ένας άρτιος φυσικός αριθμός:
 (δ) Ένας περιττός φυσικός αριθμός:
 (ε) Τα πολλαπλάσια του 3:
 (στ) Το διπλάσιο ενός αριθμού:
 (ζ) Ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8:
 (η) Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4:
 (θ) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει 22:
 (ι) Αν σε ένα αριθμό προσθέσουμε 5, το άθροισμα γίνεται 8:

3. Γράψτε συντομότερα τις εκφράσεις:

(α) $x + x + x + x$	(β) $\alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta$	(γ) $3 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$
(δ) $18 \cdot x + 7 \cdot x + 4 \cdot x$	(ε) $15 \cdot \beta - 9 \cdot \beta$	(στ) $5 \cdot \beta + 9 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta - 4 \cdot \alpha$

4. Να βρείτε τον αριθμό x σε κάθε περίπτωση:

(α) $x + 5 = 6$	(β) $x - 10 = 2$	(γ) $6 - x = 4$
-----------------	------------------	-----------------

5. (α) Να αντικαταστήσετε το x , με τους αριθμούς 1, 3, 4, 6 και 11, σε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης, του παρακάτω πίνακα.

Ισότητα	Αντικατάσταση με το 1	Αντικατάσταση με το 3	Αντικατάσταση με το 4	Αντικατάσταση με το 6	Αντικατάσταση με το 11
$x - 1 = 5$					
$5 - x = 4$					
$2x = 8$					
$\frac{6}{x} = 2$					
$\frac{x}{2} = 3$					
$x + 7 = 18$					

- (β) Σημειώστε με ✓ στην περίπτωση που ο αριθμός επαληθεύει την ισότητα και με × στην περίπτωση που δεν την επαληθεύει.

Ισότητα	Αριθμός 1	Αριθμός 3	Αριθμός 4	Αριθμός 6	Αριθμός 11
$x - 1 = 5$					
$5 - x = 4$					
$2x = 8$					
$\frac{6}{x} = 2$					
$\frac{x}{2} = 3$					
$x + 7 = 18$					

6. Πρόβλημα

Ένας εργαζόμενος στον ζωολογικό κήπο κρατά μία καμηλοπάρδαλη που μόλις γεννήθηκε για να την ζυγίσει. Η ζυγαριά κατέγραψε 153 κιλά. Ο εργαζόμενος μόνος του ζυγίζει 86 κιλά.

- (α) Πόσο ζυγίζει η καμηλοπάρδαλη;



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (β) Επαλήθευση

.....

.....

.....



Τα βήματα για την επίλυση του προβλήματος:

1. Γράφετε την εξίσωση. Το ζητούμενο είναι το βάρος της καμηλοπάρδαλης.
2. Αφαιρείτε και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. (Κάνετε αφαίρεση, αφού είναι η αντίθετη πράξη της πρόσθεσης που υπάρχει στην εξίσωση).
3. Βρίσκετε την τιμή της μεταβλητής (την τιμή του αγνώστου).



Για να λύσετε μία εξίσωση μπορείτε να εργαστείτε έτσι ώστε να απομονώσετε τον άγνωστο στην μία πλευρά της εξίσωσης.



Για να επαληθεύσετε μία εξίσωση, αντικαθιστάτε την τιμή που βρήκατε στην εξίσωση και ελέγχετε αν ισχύει η ισότητα.



Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

Χρησιμοποιείτε πολλαπλασιασμό για να λύσετε τις εξισώσεις που περιλαμβάνουν διαίρεση και διαίρεση για να λύσετε τις εξισώσεις που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό.



Όταν διαιρείτε και τα δύο μέλη μίας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό, δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως διαιρέτη τον αριθμό μηδέν (0). Εξηγήστε γιατί:

.....

.....

.....

7. Να λύσετε την εξίσωση $a - 14 = 26$ και να κάνετε επαλήθευση.

.....

.....

.....

8. Να λύσετε την εξίσωση $6 - x = 5$, περιγράφοντας τα βήματα επίλυσης.

.....	
.....	
.....	

9. Να βρείτε τον αριθμό b σε κάθε περίπτωση:

(α) $4b = 12$	(β) $20 = 2b$	(γ) $\frac{b}{6} = 5$
---------------	---------------	-----------------------

10. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4} = 10,5$

.....	1. Η πράξη που υπάρχει είναι διαίρεση.
.....	2. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 4.
.....	3. Βρίσκουμε την λύση.

(β) Πώς θα επαληθεύσετε την λύση σας;

.....

.....

.....

11. Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις:

(α) $3x = 5$	(β) $\frac{x}{4} = 18$	(γ) $100 = 16y$
--------------	------------------------	-----------------

12. Στην περιοχή της Κέρκυρας η μέση ετήσια βροχόπτωση είναι περίπου 2,80 φορές μεγαλύτερη από αυτήν της Αθήνας. Αν η βροχόπτωση στην Κέρκυρα είναι 137 mm, ποια είναι η μέση ετήσια βροχόπτωση στην Αθήνα;

.....

.....

.....

13. Αν οι γωνίες Α και Β είναι παραπληρωματικές και το μέτρο της γωνίας Α είναι 78° , ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Β;

.....

.....



Ο όγκος ισούται με το
γινόμενο:
Μήκος x Πλάτος x Ύψος

14. Ποιο είναι το ύψος μιας δεξαμενής χωρητικότητας 6 m^3 που έχει μήκος $1,5 \text{ m}$ και πλάτος 2 m ; Να διαλέξετε τη σωστή απάντηση και να εξηγήσετε γιατί.

(α) $1,5 \text{ m}$ (β) 3 m (γ) 2 m

.....
.....

15. Οι μινιατούρες αυτοκινήτων κατασκευάζονται με κλίμακα $\frac{1}{43}$ του πραγματικού μεγέθους. Αν το μήκος του πραγματικού αυτοκινήτου είναι $4,61$ μέτρα, πόσα εκατοστά είναι το μήκος της μινιατούρας;



.....
.....
.....
.....

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $\frac{4}{x} = \frac{16}{20}$

(β) $\frac{38}{5} = x + \frac{8}{5}$

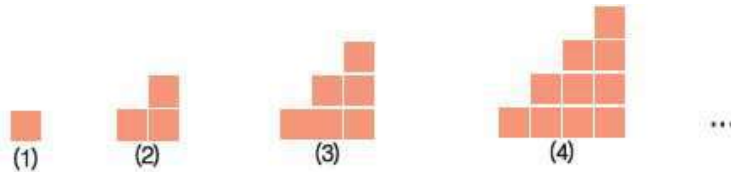
(γ) $\frac{x+5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

17. Τα τετράγωνα που αποτελούν τους «δομικούς λίθους» με τους οποίους κατασκευάζονται τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm .

(α) Βρείτε την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξηγήστε πώς φθάσατε στην απάντησή σας.

(β) Γράψτε έναν τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείτε να υπολογίσετε την περίμετρο κάθε σχήματος.

(γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm ;



.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ασκήσεις προς λύση

4.1. Διατυπώστε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας μεταβλητές:

- (α) Η περίμετρος ενός τετράγωνου.
- (β) Το γινόμενο δύο αριθμών είναι 8.
- (γ) Από το πενταπλάσιο ενός αριθμού αφαιρούμε το 2.
- (δ) Η περίμετρος ισοσκελούς τριγώνου με βάση 3 cm.
- (ε) Η ηλικία του παιδιού είναι το μισό της ηλικίας του πατέρα ελαττωμένο κατά 5 χρόνια ακόμη.
- (στ) Το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου.
- (ζ) Η περίμετρος ισοπλεύρου τριγώνου.

4.2. (α) Αν με λ συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πώς θα συμβολίσετε τον επόμενο του;

(β) Αν με $\kappa - 1$ συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πως θα συμβολίσετε τον προηγούμενο και τον επόμενο του αριθμού;

(γ) Αν με $\nu + 1$ συμβολίζεται ένας φυσικός αριθμός, πως θα συμβολίσετε τον επόμενο του αριθμού και πως τον τριπλάσιο του αριθμού;

4.3. Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

(α) $\kappa + \kappa + \kappa + \kappa + \kappa$

(β) $4\omega + 3\omega + 10\omega$

(γ) $11z + 7z - 9z$

4.4. Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 2, 4, 7 είναι λύση της εξίσωσης $\gamma - 2 = 1 + 4$.

4.5. (α) Αν ισχύει ότι $\frac{x}{y} = 0$, (με $y \neq 0$), ποια είναι η τιμή του x ;

(β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{x-3}{5} = 0$

(ii) $\frac{6-3y}{8} = 0$

(iii) $\frac{5z-60}{9} = 0$

4.6. (α) Αν ισχύει ότι $\frac{\kappa}{\lambda} = 1$, να βρείτε τη σχέση που έχουν οι αριθμοί κ , λ .

(β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{x+5}{8} = 1$

(ii) $\frac{3\omega-7}{20} = 1$

(iii) $\frac{2\nu+3}{9} = 1$

4.7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{1}{2}x = 1$

(β) $\frac{5}{7}x = 1$

(γ) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1$

4.8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{3}{4} : x = 2$

(β) $\lambda : \frac{3}{8} = \frac{5}{9}$

(γ) $1,2 : \nu = \frac{5}{8}$

4.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3\gamma - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(β) $\frac{x}{4} - \frac{7}{8} = 2$

(γ) $\frac{5z}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

4.10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{\omega}{2} = 0$

(β) $3\phi = 0$

(γ) $3x + 2 = 2$

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α': Αριθμητική – Άλγεβρα,
Κεφάλαιο 5 - Ποσοστά**

Κεφάλαιο 5: Ποσοστά

Α.5.1. Ποσοστά

~



Το σύμβολο **α%** ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και

είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{100}$.



Χρησιμοποιείται επίσης το ποσοστό **α ‰** που διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και

είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$.



Το ποσοστό **α%** του **β** είναι

$\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$



Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.

18. Δραστηριότητα

Στον πίνακα της δραστηριότητας mpa51.ggb φαίνεται το σύνολο των μαθητών που ψήφισαν στα σχολεία Α, Β, Γ και Δ και οι ψήφοι που πήραν οι αντίστοιχοι πρόεδροι δεκαπενταμελούς που εκλέχτηκαν.

Βρείτε, ποιος από τους προέδρους που εκλέχτηκαν, είναι ο πιο δημοφιλής.

Ποια διαδικασία ακολουθήσατε;

.....

.....

.....

.....

.....

19. Να γράψετε, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:

(α) $\frac{4}{5} =$	(β) $\frac{3}{8} =$	(γ) $\frac{84}{91} =$
---------------------	---------------------	-----------------------

20. Να γράψετε, ως κλάσματα τα ακόλουθα ποσοστά:

(α) 12% =	(β) 73% =	(γ) 32,5% =
-----------	-----------	-------------

21. Να υπολογίσετε:

(α) το 10% των 3000 €	(β) το 45% της 1 ώρας	(γ) το 20% του λίτρου
(δ) το 50 % των 500 γραμμαρίων	(ε) το 25% του 1 κιλού	

22. Να βρείτε τι ποσοστό είναι:

(α) τα 50 € για τα 1.000 €	(β) οι 30 ημέρες για 1 έτος	(γ) τα 50 στρέμματα για τα 2.500 στρέμματα
----------------------------	-----------------------------	--

A.5.2. Προβλήματα με ποσοστά

~



Τα καταστήματα συχνά πωλούν προϊόντα με έκπτωση. Έκπτωση (εκ-πτώση) είναι η μείωση της τιμής πώλησης ενός προϊόντος. Συνηθέστερα ένα κατάστημα προσφέρει έκπτωση σε ένα προϊόν με βάση ένα ποσοστό της αρχικής τιμής του προϊόντος.



1. Η έκπτωση δίνεται συνήθως ως ποσοστό.
2. Από το ποσοστό της έκπτωσης μπορείτε να υπολογίσετε το ποσό της έκπτωσης πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό με την αρχική τιμή.
3. Για να υπολογίσετε την τιμή του προϊόντος με έκπτωση αφαιρείτε το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή.



Το ποσό της έκπτωσης και η τιμή με έκπτωση είναι ίδια.

- Ποιο κλάσμα είναι ίσο με 50%;
- Πώς θα μπορούσατε να λύσετε το πρόβλημα χωρίς να κάνετε υπολογισμούς;



Η φράση -50% είναι το ίδιο

με το $\frac{1}{2}$ της τιμής.



Άρα για να βρείτε την τιμή μπορείτε να υπολογίσετε το μισό των 5 ευρώ που είναι 2,5 ευρώ.

23. Πρόβλημα:

Σε ένα βιβλιοπωλείο ένα βιβλίο που πωλείται προς 15 ευρώ μπορεί να αγοραστεί 10% φθηνότερα.

(α) Σε τι αναφέρεται το 10%;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή πώλησης του DVD;

.....

.....

.....

.....

4. Σε ένα πολυκατάστημα ένα φόρεμα αξίας 40 ευρώ έχει 25% έκπτωση.

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση 25% έκπτωση;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή του φορέματος με την έκπτωση;

.....

.....

.....

5. Σε ένα κατάστημα πώλησης προϊόντων βιολογικής παραγωγής πωλείται μία σαλάτα αξίας 5 ευρώ που έχει ένα αυτοκόλλητο που αναγράφει «-50%».

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση -50%;

.....

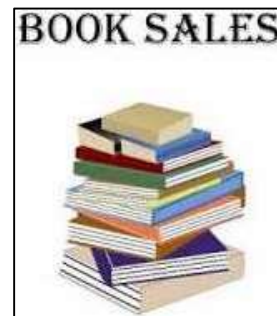
(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή της σαλάτας με την έκπτωση;

.....

.....





Από το ποσοστό έκπτωσης μπορείτε να υπολογίσετε το ποσοστό της τιμής που τελικά θα πληρωθεί, αν αφαιρέσετε από το 100 το ποσοστό έκπτωσης.

6. Σε ένα bazaar βιβλίων, η τιμή πώλησης μία σειράς βιβλίων που το καθένα αξίζει 9 ευρώ είναι το $\frac{1}{3}$ της αρχικής τιμής.

(α) Σε τι αναφέρεται η φράση είναι το $\frac{1}{3}$ της αρχικής τιμής;

.....

(β) Ποια είναι η έκπτωση;

.....

(γ) Ποια είναι η τιμή του κάθε βιβλίου με την έκπτωση;

.....

.....

7. Σε ένα βιβλιοπωλείο ένα βιβλίο που πωλείται προς 15 ευρώ μπορεί να αγοραστεί 10% φθηνότερα. Ποια είναι η έκπτωση; Ποια είναι η τιμή πώλησης του DVD; Να υπολογίσετε την τιμή με έκπτωση με τον τρόπο που περιγράφεται αριστερά.

.....

.....

.....

.....

Ανακεφαλαίωση

Τα καταστήματα συχνά πωλούν προϊόντα με μειωμένες-χαμηλότερες τιμές κάνοντας έκπτωση. Συνηθέστερα αυτή η έκπτωση είναι ένα ποσοστό της αρχικής τιμής. Οι φράσεις «-30%», «10% off», «στο $\frac{1}{3}$ της αρχικής τιμής», «Έκπτωση 15%», «Save 25%», «Get a 20% discount» χρησιμοποιούνται για να δείχνουν την έκπτωση.

Διαδικασία:

1. Για να υπολογίσετε το ποσό της έκπτωσης, πολλαπλασιάζετε το ποσοστό της έκπτωσης με την αρχική τιμή.
2. Για να υπολογίσετε την τιμή με έκπτωση, αφαιρείτε το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή.

8. Πρόβλημα:

Ο Κώστας εντόπισε σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικού εμπορίου το τηλεχειριζόμενο ελικόπτερο που ήθελε να αγοράσει. Παρατηρώντας την τιμή είδε ότι είχε 49,00 ευρώ. Ωστόσο είδε και την τιμή 39,84 ευρώ στην οποία είχαν προστεθεί 9,16 ευρώ. Δεν γνώριζε όμως γιατί υπήρχαν δύο τιμές...



είναι το μικρότερο τηλεχειριζόμενο ελικόπτερο στην αγορά. Με ένα σύστημα ελέγχου 3.5 καναλιών, καθώς και το σχεδιασμό αυτόματης ισορροπίας είναι πραγματικά το ιδανικό όχημα για πτήση, όταν υπάρχει έλλειψη χώρου ή αν είστε αρχάριοι σε θέματα πτήσεων.

- **Τηλεχειρισμός:** Τυπικός 3.5 καναλιών.
- **Μπαταρία:** 6 x AA (για τον τηλεχειρισμό του).
- **Πρόσθετα χαρακτηριστικά:** Φορτίζει μέσω του τηλεχειρισμού του με ικανότητα πτήσης έως και 7 λεπτά.
- **Βάρος:** 0.025kg.
- **Εγγύηση:** 1 χρόνος, DOA 7 ημερών

Κατασκευαστής:	
Κατηγορία:	ΜΟΝΤΕΛΙΣΜΟΣ
Υποκατηγορία:	ΕΛΙΚΟΠΤΕΡΑ
Τιμή:	39.84 € + 9.16 € 23% ΦΠΑ = 49.00 €
Διαθεσιμότητα:	Άμεσα διαθέσιμο για online παραγγελία / Διαθεσιμότητα καταστημάτων Αθήνας - Θεσσαλονίκης

Έτσι, ξεκίνησε την διερεύνησή του. Πρώτα από όλα ο Κώστας έλεγξε αν η πρόσθεση $39,84 + 9,16$ δίνει ως αποτέλεσμα 49,00 ευρώ. Στη συνέχεια προσπάθησε να κατανοήσει την φράση «23% ΦΠΑ» που αναγραφόταν δεξιά του ποσού 9,16 ευρώ. Ποιο ρόλο έχει;

Ξεκίνησε με το λεξικό για να βρει το αρκτικόλεξο ΦΠΑ.

Το λεξικό έγραφε: **Φ.Π.Α.** (ο) Φόρος Προστιθέμενης Αξίας.

«Δεν φαίνεται πολύ διαφωτιστικό» είπε από μέσα του...

Η ηλεκτρονική εγκυκλοπαίδεια Βικιπαίδεια ήταν το επόμενο βήμα. Άνοιξε τον υπολογιστή, άνοιξε τον φυλλομετρητή του και πληκτρολόγησε: <http://el.wikipedia.org/>

Στη συνέχεια έγραψε το αρκτικόλεξο ΦΠΑ και εντόπισε: <http://el.wikipedia.org/wiki/ΦΠΑ>

Από όλα τα αναγραφόμενα κατέληξε ότι ο ΦΠΑ είναι ένας **φόρος** (δηλαδή ένα ποσό χρημάτων που καταβάλλουν οι πολίτες στο κράτος) που **προστίθεται** στην αξία μίας παρεχόμενης υπηρεσίας ή ενός προϊόντος που κάποιος αγοράζει.

Τα πράγματα γίνονταν πιο ξεκάθαρα. Το ποσοστό 23% ήταν το ποσοστό ΦΠΑ που προστίθεται στην αξία του ελικοπτέρου που ήθελε ο Κώστας να αγοράσει.

Το αρχικό πρόβλημα επαναδιατυπώθηκε στο μυαλό του Κώστα ως εξής:

Το τηλεχειριζόμενο ελικοπτερο κοστίζει 39,84 ευρώ. Αν ο ΦΠΑ είναι 23% ποιο είναι το ποσό του ΦΠΑ που θα πληρώσει; Ποιο είναι το συνολικό ποσό που θα πληρώσει για την αγορά του ελικοπτέρου περιλαμβάνοντας τον ΦΠΑ;

Ο Κώστας θυμήθηκε την διαδικασία που είχε ακολουθήσει για να υπολογίσει το ποσό της έκπτωσης, όπου και αυτή δινόταν ως ποσοστό.

Από ~~το ποσοστό της έκπτωσης~~ (το ποσοστό του ΦΠΑ) μπορεί να υπολογιστεί το ποσό ~~της έκπτωσης~~ (του ΦΠΑ) πολλαπλασιάζοντας το ποσοστό με την αρχική τιμή.

Το ποσοστό ΦΠΑ είναι 23%, δηλαδή $23/100$ ή 0,23

Το ποσό του ΦΠΑ είναι $0,23 \times 39,84 = 9,1632$ ευρώ (με στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο εκατοστό είναι 9,16 ευρώ).

Η τιμή με ΦΠΑ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{r} 39,84 \text{ (Αρχική τιμή)} \\ + 9,16 \text{ (Ποσό ΦΠΑ)} \\ \hline 49,00 \text{ (Τιμή με ΦΠΑ)} \end{array}$$



Τόκος

Είναι το χρηματικό ποσό που είναι υποχρεωμένος να δώσει ο οφειλέτης στο δανειστή για ορισμένη ποσότητα χρηματικού δανείου που πήρε και για ορισμένο χρονικό διάστημα. Ο τόκος είναι στην ουσία η αμοιβή-αποζημίωση του δανειστή για το ποσό που δάνεισε στον οφειλέτη.



Επιτόκιο

Είναι το ποσοστό επί τοις εκατό (%) του τόκου προς το συνολικό χρηματικό ποσό. Το επιτόκιο αναφέρεται πάντα σε ετήσια βάση.



Επιτόκιο α% σημαίνει ότι στο τέλος του χρόνου τα 100 ευρώ θα αυξηθούν κατά α ευρώ, δηλαδή συνολικά (100 + α) ευρώ.



Γενικά, όταν θέλετε να δανειστείτε χρήματα από μια τράπεζα, η τράπεζα ζητάει να της επιστρέψετε τα χρήματα με τόκο. Το ίδιο όμως συμβαίνει και όταν κάποιος καταθέτει στην τράπεζα χρήματα. Τα χρήματα αυτά τοκίζονται (δηλαδή ο πελάτης θα εισπράξει τόκο) γιατί στην περίπτωση αυτή ο πελάτης είναι ο δανειστής και η τράπεζα ο οφειλέτης.

9. Ο Γιώργος κατέθεσε στην τράπεζα 1500 ευρώ για ένα χρόνο με επιτόκιο 2%. Πόσος είναι ο τόκος που θα εισπράξει στο τέλος του χρόνου;

Για να υπολογίσετε τον ετήσιο τόκο, πολλαπλασιάζετε το κεφάλαιο (π.χ. κατάθεση ή χρηματικό δάνειο) επί το επιτόκιο. Δηλαδή, ετήσιος τόκος = κεφάλαιο · επιτόκιο

.....

.....

.....

.....

10. Ένας έμπορος δανείστηκε από την τράπεζα 5.500 ευρώ για ένα χρόνο με επιτόκιο 8%. Πόσα ευρώ θα πληρώσει στο τέλος του χρόνου;

.....

.....

.....

.....

11. Ένας επιχειρηματίας δανείστηκε από την τράπεζα 50.000 ευρώ για 7 μήνες με επιτόκιο 6%. Τι τόκο θα πληρώσει στο τέλος των 7 μηνών;

Για να υπολογιστεί ο τόκος για χρονικό διάστημα διαφορετικό του έτους, πολλαπλασιάζεται το κεφάλαιο επί το επιτόκιο, επί το κλάσμα που αντιστοιχεί στο μέρος του έτους που μας ενδιαφέρει.

.....

.....

.....

.....

12. Να υπολογίσετε τον τόκο που θα εισπράξετε αν καταθέσετε στην τράπεζα 1000 ευρώ με επιτόκιο 5% για 9 μήνες

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις προς λύση

5.1. Να γράψετε, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:

(α) $\frac{4}{5}$

(β) $\frac{39}{70}$

(γ) $\frac{11}{20}$

(δ) $\frac{5}{16}$

5.2. Να γράψετε, ως κλάσματα, τα ακόλουθα ποσοστά:

(α) 17%

(β) 21,5%

(γ) 95%

(δ) 30%

5.3. Ποια θα είναι η τιμή πώλησης ενός tablet, αξίας 120 €, με επιβάρυνση ΦΠΑ 23%;

5.4. Μία εταιρεία κατασκευής επίπλων πούλησε έπιπλα αξίας 3.000 € με έκπτωση 450 €. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης;

5.5. Ένα εισιτήριο τρένου για μία συγκεκριμένη διαδρομή κοστίζει 25 ευρώ. Αν για τρία εισιτήρια πληρώσει κάποιος 60 ευρώ, τι ποσοστό έκπτωσης του έγινε;

5.6. Ο Γιώργος αγόρασε έναν υπολογιστή αξίας 500 ευρώ και ο καταστηματάρχης του έκανε έκπτωση 140 ευρώ. Τι ποσοστό έκπτωσης του έγινε;

5.7. Ο ακαθάριστος μισθός ενός υπαλλήλου είναι 1650 ευρώ. Στο μισθό του γίνονται κρατήσεις για τα διάφορα ασφαλιστικά ταμεία 23%. Ποιος είναι ο καθαρός μισθός του υπαλλήλου;

5.8. Ένας ιχθυοπώλης αγόρασε ψάρια που έκαναν 250 € και τα πούλησε με ζημιά 20%. Πόσο ζημιώθηκε;

5.9. Ένας έμπορος αγοράζει το αυτοκίνητο 14.700 € και το πουλάει 18.816 €. Πόσο % κερδίζει;

5.10. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε μια εγκυκλοπαίδεια με κέρδος 40% και κέρδισε 356 €. Πόσο την είχε αγοράσει;

5.11. Εμπορικό κατάστημα πουλάει τα εμπορεύματά του με έκπτωση 30% στην τιμή πώλησης. Πόση έκπτωση θα κάνει το κατάστημα σε έναν πελάτη που αγόρασε εμπορεύματα αξίας 7.352 €;

5.12. Αγοράσαμε μία ανθοδέσμη και πληρώσαμε συνολικά μαζί με τον Φ.Π.Α. 22,61 €. Αν ο συντελεστής για τον Φ.Π.Α. είναι 13%, να υπολογίσετε:

(α) την αξία των ειδών αυτών χωρίς Φ.Π.Α.

(β) τον Φ.Π.Α. που πληρώσαμε γι' αυτά.

5.13. Ένα αυτοκίνητο κόστιζε 20.000 €. Έγινε μια πρώτη αύξηση κατά 10% και μετά λίγους μήνες μια δεύτερη αύξηση κατά 15%. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η τιμή αυξήθηκε συνολικά κατά 25%. Να εξετάσετε αν είναι σωστή η άποψη αυτή.

5.14. Ένα tablet κοστίζει 120 €. Την περίοδο των εκπτώσεων το κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών το πουλάει 15% φθηνότερα. Πόσο θα μας κοστίσει τελικά, αν το αγοράσουμε στις εκπτώσεις πληρώνοντας επιπλέον Φ.Π.Α. 23% στην τιμή αγοράς;

5.15. Ένας έμπορος αγόρασε 5 ποδήλατα αξίας 625 €. Πόσο πρέπει να πουλήσει το καθένα, αν το ποσοστό κέρδους του είναι 25%;

5.16. Ένα σκάφος πουλιόταν προς 55.000 €. Την 1/11/2012 αυξήθηκε η τιμή του κατά 12% και στις 15/1/2013 ελαττώθηκε κατά 12%.

(α) Να βρείτε την τελική τιμή του σκάφους στις 15/1/2013.

(β) Πόση θα ήταν η τελική τιμή του σκάφους, αν αρχικά ελαττωνόταν η τιμή του κατά 12% και ακολουθούσε αύξηση κατά 12%;

- 5.17.** Η τιμή ενός ποδηλάτου μειώθηκε κατά 16% και κοστίζει τώρα 168 €. Ποια ήταν η αρχική τιμή του ποδηλάτου;
- 5.18.** Καταθέτει ο Κώστας σε μια τράπεζα 7.000 € με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρει σε δύο χρόνια, αν γίνεται ανατοκισμός κάθε εξάμηνο;
- 5.19.** Από ένα μπουκάλι οινόπνευμα εξατμίστηκε το 20% του όγκου του. Το μπουκάλι στην αρχή είχε 150 mL. Πόσα mL οиноπνεύματος εξατμίστηκαν και πόσα mL οινόπνεύματος απέμειναν στο μπουκάλι;
- 5.20.** Ένα αφρόλουτρο πάνω στην συσκευασία γράφει «Περισσότερο προϊόν 50% δωρεάν» και παρακάτω «600 mL +250 mL δωρεάν».
- (α) Θεωρείτε ότι είναι σωστά αυτά που γράφει;
- (β) Σε ποια περίπτωση η προσφορά θα ήταν πραγματικά δωρεάν το 50% του αφρόλουτρου;
- 5.21.** Ο πληθυσμός μιας πόλης ήταν το έτος 2010, 20.000 κάτοικοι. Το 2011 αυξήθηκε κατά 6%, το 2012 κατά 5% και το 2013 μειώθηκε κατά 5%. Να βρεθεί ο τελικός πληθυσμός το 2013.
- 5.22.** Κατατέθηκε ένα ποσό 120.000 €, σε ένα λογαριασμό ταμειυτηρίου, με επιτόκιο 2,5% το χρόνο.
- (α) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του πρώτου έτους;
- (β) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του δεύτερου έτους, αν ο τόκος του πρώτου έτους κεφαλαιοποιηθεί;
- 5.23.** Τι ποσό πρέπει να καταθέσετε στην τράπεζα, για να πάρετε στο τέλος του έτους 5.000 €, αν το επιτόκιο είναι 2%;

**Α' Γυμνασίου, Μέρος Α', Άλγεβρα,
Κεφάλαιο 7, Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί**

Μέρος Α' - Κεφάλαιο 7ο - Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

Α.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου



Θερμόμετρο με βαθμούς Κελσίου και βαθμούς Φαρενάιτ.



Τα σύμβολα «+» και «-» λέγονται **πρόσημα**. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντιστοίχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**.



Σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς, μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο +



Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη της τοποθέτησης πρόσημου μπροστά από όλους τους αριθμούς. Έτσι γίνεται φανερό ποιοι αριθμοί είναι οι **θετικοί** και ποιοι οι **αρνητικοί**.

1. Γιατί υπάρχει η ανάγκη εισαγωγής αρνητικών αριθμών;

.....

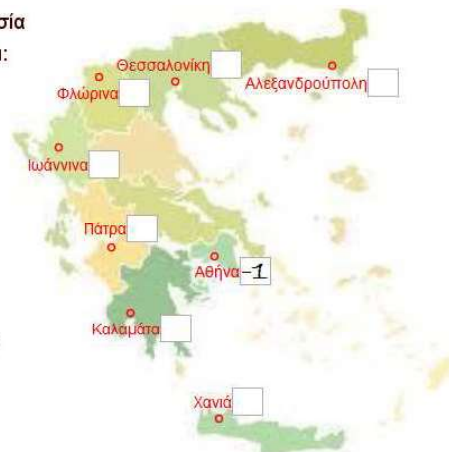
.....

2. Δραστηριότητα.

Η μετεωρολογική υπηρεσία προέβλεψε ότι η θερμοκρασία για τις πόλεις που φαίνονται στο διπλανό χάρτη θα είναι:

Αθήνα: 1°C κάτω από το μηδέν
 Αλεξανδρούπολη: 11°C κάτω από το μηδέν
 Θεσσαλονίκη: 3°C πάνω από το μηδέν
 Ιωάννινα: 8°C κάτω από το μηδέν
 Καλαμάτα: 4°C κάτω από το μηδέν
 Πάτρα: 8°C πάνω από το μηδέν
 Φλώρινα: 12°C κάτω από το μηδέν
 Χανιά: 15°C πάνω από το μηδέν

Να σημειώσετε στο χάρτη αριθμούς που να εκφράζουν τις παραπάνω θερμοκρασίες



3. Στον ανεγκυστήρα ενός γκαράζ υπάρχουν τα κουμπιά που βλέπετε δίπλα.

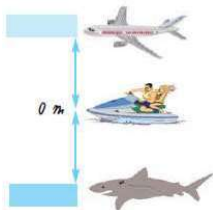
Τι εκφράζουν οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κουμπιά;

.....

.....

4. Στο ακόλουθο σχήμα παρατηρούμε ότι το αεροπλάνο πετάει στα 200 m και ο καρχαρίας βρίσκεται σε βάθος 200 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Προσπαθήστε να εκφράσετε με κατάλληλους αριθμούς τις θέσεις του αεροπλάνου και του καρχαρίας σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας;



.....

.....

.....

.....

5. Να γράψετε τους ακόλουθους αριθμούς.

Τον θετικό αριθμό 3

Τον αρνητικό αριθμό $\frac{3}{4}$

Τον θετικό αριθμό 15,7

Τον αρνητικό αριθμό 0,098



Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.



Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το **ίδιο πρόσημο**.

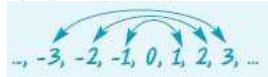
Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο**.



Το σύνολο των αριθμών $0, 1, 2, 3, \dots$ ονομάζεται σύνολο των **φυσικών αριθμών**.



Ακέραιοι αριθμοί είναι οι **φυσικοί** αριθμοί μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς** αριθμούς.



Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: **φυσικοί**, **κλάσματα** και **δεκαδικοί** μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς** αριθμούς.



Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής **O** του ημιάξονα **Ox** των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα **Ox'**, θα έχουμε τη δυνατότητα, με αυτόν τον τρόπο, να παραστήσουμε όλους τους ρητούς αριθμούς.



Η θέση ενός σημείου επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται **τετμημένη του σημείου**.

6. Να διαχωρίσετε τους ακόλουθους αριθμούς σε ομόσημους και ετερόσημους.

Αριθμοί	Ομόσημοι	Ετερόσημοι
-7		
+1,25		
$+\frac{10}{7}$		
$-\frac{3}{4}$		
-0,58		
+5		

7. Δίνονται οι ακόλουθοι αριθμοί. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα έτσι ώστε να δείξετε αν είναι φυσικοί, ακέραιοι ή/και ρητοί. Τοποθετήστε το σύμβολο ✓ αν ο αριθμός ανήκει στο συγκεκριμένο σύνολο.

Αριθμοί	Φυσικοί	Ακέραιοι	Ρητοί
-4			
7			
12,0001			
$\frac{2}{3}$			
$-\frac{2}{3}$			
5,46			
-3,47			
0			
$-\frac{6}{3}$			

8. Να βάλετε σε μία ημιευθεία (ημιάξονα) με όνομα Ox ορισμένους φυσικούς αριθμούς.

Σκεφτείτε ποιος θα είναι ο πρώτος αριθμός.

Σκεφτείτε ποιος θα είναι ο επόμενος αριθμός.

Σχεδιάστε μία ημιευθεία.

Τοποθετήστε ορισμένους φυσικούς αριθμούς.

9. Στον προηγούμενο ημιάξονα που κατασκευάσατε, να φτιάξετε τον αντικείμενο ημιάξονα του ημιάξονα Ox και να τον ονομάσετε Ox'. Να τοποθετήσετε ορισμένους ακέραιους αρνητικούς αριθμούς.

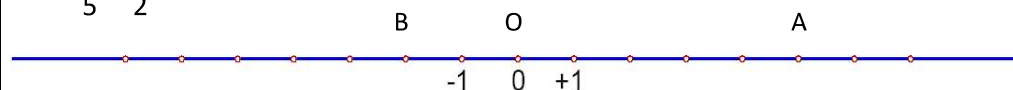
Σκεφτείτε που θα βρίσκεται ο πρώτος αρνητικός ακέραιος αριθμός.

Σκεφτείτε που θα τοποθετήσετε τον επόμενο αρνητικό ακέραιο αριθμό.

Τοποθετήστε ορισμένους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

10. Να σημειώσετε στον άξονα τους παρακάτω αριθμούς: +2, -3, +4, -5, +3,5, -1,5,

$$+\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}, +8, -7.$$



Το σημείο A έχει τετμημένη

Το σημείο B έχει τετμημένη

Το σημείο O έχει τετμημένη

11. Να εργαστείτε στο μικροπείραμα **mpa7_1**. Να κατασκευάσετε την ευθεία και να τοποθετήσετε τους αριθμούς: 1,3 -2,5 3 1 -1,2 -2 -0,2 0,5.

12. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών ρητών αριθμών:

- α) 13,75 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας:
- β) 20° Κέλσιου πάνω από το μηδέν:
- γ) κέρδος 3.368,97 €:
- δ) αύξηση κατά 2.527,15 €:
- ε) μείωση κατά 50 μονάδες:
- στ) έκπτωση 15% επί της τιμής:

Α.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών



Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη α από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|\alpha|$.



Η απόλυτη τιμή είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός αφού εκφράζει απόσταση.



Για να βρείτε την απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού γράψετε τον αριθμό που σας δίνεται χωρίς το πρόσημο του.



Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

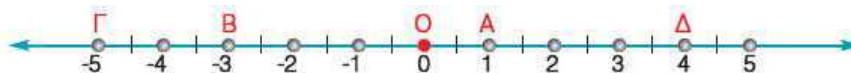


Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.



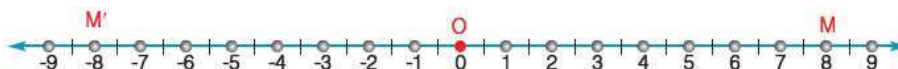
Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

13. Βρείτε πόσες μονάδες απέχουν από την αρχή O του άξονα τα σημεία A , B , Γ και Δ .



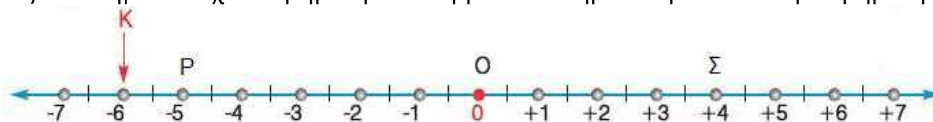
- α) Το σημείο A απέχει από την αρχή O του άξονα μονάδα(ες).
 β) Το σημείο B
 γ) Το σημείο Γ
 δ) Το σημείο Δ

14. Στην παρακάτω ευθεία βρείτε τις τετμημένες των σημείων M' και M .



- α) Τι παρατηρείτε για τις τετμημένες των σημείων M' και M ;

 β) Προσπαθήστε να τοποθετήσετε στην παραπάνω ευθεία των ρητών τα σημεία A' και A που απέχουν από την αρχή O του άξονα 3,5 μονάδες.
 γ) Κάντε το ίδιο για τα σημεία B' και B που απέχουν από την αρχή O του άξονα 5 μονάδες.
 15. α) Το σημείο K έχει τετμημένη -6. Να βρείτε το σημείο Λ με αντίθετη τετμημένη.



- β) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά βάσει του παραπάνω άξονα:
 1. Η απόλυτη τιμή του +2 είναι $|+2| = \dots$
 2. Η απόλυτη τιμή του 1 είναι $|1| = \dots$
 3. Η απόλυτη τιμή του -3 είναι $|-3| = \dots$
 4. Η απόλυτη τιμή του $\frac{5}{2}$ είναι $|\frac{5}{2}| = \dots$
 5. Η απόλυτη τιμή του -1,5 είναι $|-1,5| = \dots$
 6. Η απόλυτη τιμή της τετμημένης του σημείου O είναι:
 7. Η απόλυτη τιμή της τετμημένης του σημείου Σ είναι:
 8. Η απόλυτη τιμή της τετμημένης του σημείου K είναι:
 9. Η απόλυτη τιμή της τετμημένης του σημείου P είναι:

16. Εάν η απόλυτη τιμή του αριθμού α είναι 2, να βρεθεί ο αριθμός α .



Αντίθετοι αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο.



Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.



Ο αντίθετος του 0 είναι το 0.



Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή των αξόνων, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.

17. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των ακόλουθων αριθμών:

- α) -5
 β) 6
 γ) $-3,8$
 δ) $-\frac{4}{3}$
 ε) $+5$
 στ) 0

18. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών:

- $|+4|$
 $|-4|$

Τι παρατηρείτε;

19. Να βρείτε τον αντίθετο αριθμό σε κάθε περίπτωση

- α) Ο αντίθετος του 3 είναι το
 β) Ο αντίθετος του $\frac{1}{2}$ είναι το
 γ) Ο αντίθετος του -5 είναι το
 δ) Ο αντίθετος του $-3,5$ είναι το

20. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Αριθμός	5		-2,1	$\frac{7}{3}$		
Αντίθετος					25	$-\frac{1}{5}$
Απόλυτη τιμή		8				

21. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

- α) $|-3| + |+6| - |-3| = \dots\dots\dots$
 β) $|35 - 4| - |5 + 3| + |7 - 7| - |-8| = \dots\dots\dots$

22. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή 7.

.....

23. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x όταν $|x| = 3$.

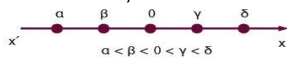
.....

24. Αν δύο σημεία έχουν τετμημένες αντίθετους αριθμούς και απέχουν απόσταση ίση με 10, τότε να βρείτε τις τετμημένες τους.

.....



Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.



Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.



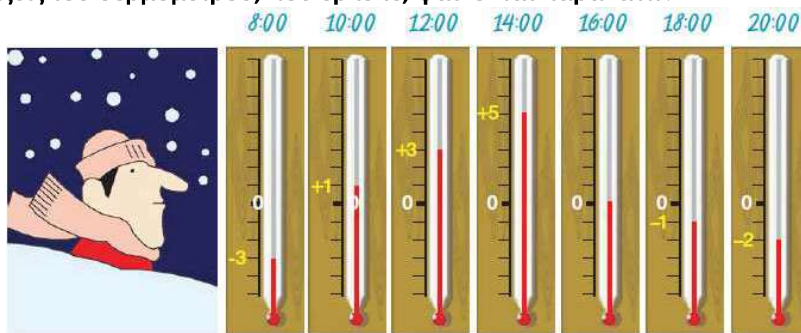
Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



25. Μια κρύα μέρα του χειμώνα ο Κώστας κοιτούσε τη θερμοκρασία κάθε δύο ώρες. Οι ενδείξεις του θερμομέτρου, που έβλεπε, φαίνονται παρακάτω:



α) Να καταγράψετε όλες τις ενδείξεις του θερμομέτρου με αύξουσα σειρά.

.....

β) Να καταγράψετε όλες τις ενδείξεις του θερμομέτρου με φθίνουσα σειρά.

.....

26. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο (>, <, =)

- α) $7 \dots 9$ β) $-7 \dots -9$ γ) $0 \dots -2$ δ) $-4 \dots -\frac{8}{2}$
 ε) $-\frac{3}{2} \dots -\frac{3}{5}$ στ) $\frac{3}{5} \dots -\frac{2}{3}$ ζ) $0 \dots -0,5$ η) $\frac{4}{9} \dots 0$
 θ) $-\frac{1}{2} \dots -\frac{1}{5}$ ι) $\frac{3}{5} \dots \frac{7}{5}$ ια) $-\frac{1}{2} \dots 0,5$

27. Στον άξονα των αριθμών να τοποθετήσετε τους αριθμούς και στη συνέχεια να τους γράψετε κατά αύξουσα σειρά.

- α) 5 β) 7 γ) -5 δ) 0 ε) -2,5 στ) 0,3 ζ) $-\frac{9}{4}$ η) -2,01 θ) 0,5

28. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις:

α) $-5 < x < -2$

β) $-1 \leq x < 3$

A.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών



Για να προσθέσετε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτετε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζετε το πρόσημό τους.



Για να προσθέσετε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρείτε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζετε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.



Ιδιότητες της πρόσθεσης

Μπορείτε να αλλάζετε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος.
(Αντιμεταθετική ιδιότητα)
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα.
(Προσεταιριστική ιδιότητα)
 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Το 0 όταν προστεθεί σε ένα ρητό δεν τον μεταβάλλει.
 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

Το άθροισμα δύο αντιθέτων αριθμών είναι μηδέν.
 $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

29. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που περιγράφονται, να γράψετε την πρόσθεση που της αντιστοιχεί και στη συνέχεια το αποτέλεσμα.

	Πρόσθεση	Αποτέλεσμα
α) Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη αύξηση ήταν 8,5 € και η δεύτερη 6,2 €		
β) Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη μείωση ήταν 8,5 € και η δεύτερη 6,2 €		
γ) Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 8,5 € και μετά μειώθηκε κατά 6,2 €		
δ) Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε κατά 8,5 € και μετά αυξήθηκε κατά 6,2 €		

30. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $3 + 5$	β) $6 + 2$
------------	------------

31. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $-7 + 5$	β) $-\frac{1}{3} + \frac{7}{3}$
-------------	---------------------------------

32. Ας εργαστούμε στο μικροπείραμα **mpa7_2**. Περιγράψτε την διαδικασία με την οποία μπορείτε να προσθέσετε δύο αριθμούς.

.....

.....

.....

.....

33. Ας εργαστούμε στο μικροπείραμα **mpa7_3**. Περιγράψτε την διαδικασία με την οποία μπορείτε να προσθέσετε δύο αριθμούς.

.....

.....

.....

.....

34. Να προσθέσετε σε κάθε ένα από τα παρακάτω τον αντίθετο του αριθμού που υπάρχει και να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $-6 +$	β) $\frac{1}{3} +$	γ) $x +$	δ) $-x +$
-----------	--------------------	----------	-----------

A.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών



Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό **α** τον αριθμό **β**, **προσθέτουμε** στον **α** τον **αντίθετο του β**.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$



Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).

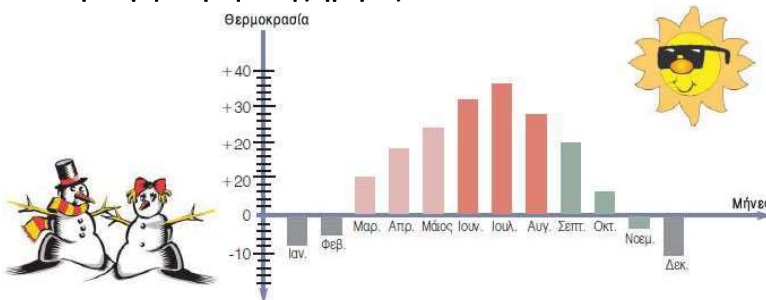


Απαλοιφή παρενθέσεων

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αλλαγμένα πρόσημα.

37. Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία μιας περιοχής για τους 12 μήνες του χρόνου σε συγκεκριμένη ώρα της ημέρας.



α) Ποιος είναι ο πιο ζεστός μήνας του έτους και ποιος ο πιο κρύος;

.....

β) Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ αυτών των μηνών;

.....

γ) Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών;

.....

.....

38. Ας εργαστούμε στο μικροπείραμα **mpa7_4**. Περιγράψτε την διαδικασία με την οποία μπορείτε να αφαιρέσετε δύο αριθμούς.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

39. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(+5) + (-7)$

.....

.....

.....

β) $(9,1-6,2+3,4) + (-7,5+10-8,3)$

.....

.....

.....

40. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-5) - (-7)$

.....

.....

.....

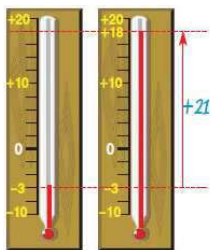
β) $-(9,1-6,2+3,4) - (-7,5+10-8,3)$

.....

.....

.....

41. Ένα βράδυ το θερμόμετρο στο μπαλκόνι ενός σπιτιού έδειχνε -3°C και μέσα στο σπίτι 18°C . Πόση ήταν η διαφορά θερμοκρασίας;



42. Ένας έμπορος χρωστάει στον προμηθευτή του 897,56 € και του οφείλει ένας πελάτης 527,42 €. Πόσα € πρέπει να έχει στο ταμείο για να ξεχρεώσει;

43. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + (+3) = (-9)$

β) $(-8) - x = +7$

Η έκφραση $-x$ σημαίνει ο αντίθετος του x .

Η έκφραση $-x$ μπορεί να αναπαριστά έναν αρνητικό αριθμό, το μηδέν ή ένα θετικό αριθμό.

44. Να υπολογίσετε την τιμή της μεταβλητής x

α) Ποια είναι η τιμή του $-x$ αν $x = -4$;

β) Ποια είναι η τιμή του $-x$ αν $x = 4$;

γ) Για ποιες τιμές του x θα είναι το $-x$ θετικό;

δ) Για ποιες τιμές του x θα είναι το $-x$ αρνητικό;

45. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11)$

46. Ποιο είναι μεγαλύτερο: Το άθροισμα $-227 + 319$ ή Το άθροισμα $227 - 319$;

47. Εξηγήστε τι λάθος εντοπίζετε στην ακόλουθη πρόταση: Αφού το 20 είναι ο αντίθετος του -20 , η θερμοκρασία 20° είναι πολύ ζεστή, αφού η θερμοκρασία -20° είναι πολύ κρύα.

48. Δίνεται ο ακόλουθος άξονας αριθμών:

- α) Αν Γ είναι ο αντίθετος του Β, ποια είναι η τιμή του Ε;
β) Αν Α είναι ο αντίθετος του Β, είναι ο Δ θετικός ή αρνητικός; Γιατί;
γ) Αν ο Δ είναι ο αντίθετος του Β, ποιο από τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, έχει την μεγαλύτερη τιμή;

49. Να γράψετε τους επόμενους τρεις αριθμούς στις ακόλουθες κανονικότητες:

- α) -5, -1, 3, __, __, __
β) 9, 6, 3, 0, __, __, __
γ) -15, -10, -5, __, __, __
δ) 6, 4, 2, __, __, __

A.7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών



Το γινόμενο δύο θετικών ρητών είναι θετικός ρητός.



Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού ρητού.



Το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών είναι θετικός ρητός.



Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

Δηλαδή:

$$+ \cdot + = + \text{ και } - \cdot - = +$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

Δηλαδή:

$$+ \cdot - = - \text{ και } - \cdot + = -$$



Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $\cdot$ μπορεί να παραλείπεται.

50. Όταν ένα διαστημικό λεωφορείο είναι στο πρώτο στάδιο της προσγείωσης κατέρχεται 3,5 μίλια ανά λεπτό. Αυτός ο ρυθμός είναι -3,5 μίλια/λεπτό.

α) Πόσα μίλια θα έχει κατέβει σε 10 λεπτά;

β) Το ύψος που βρίσκεται το διαστημικό λεωφορείο μειώνεται ή αυξάνεται;

γ) Είναι το γινόμενο $(-3,5) \cdot 10$ ίσο με 35 ή -35; Γιατί;

.....

.....

51. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου κάποια ομάδα έχασε σε δύο αγωνιστικές τρεις βαθμούς, ως ποινή για τα επεισόδια που διαδραματίστηκαν στον αγώνα που συμμετείχε. Ποια από τις παρακάτω πράξεις δείχνει το αποτέλεσμα των βαθμών που έχασε η ομάδα;

α) $2 \cdot (-3)$

β) $2 \cdot 3$

52. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα

α) $3 \cdot (-4) =$

β) $2 \cdot (-4) =$

γ) $1 \cdot (-4) =$

δ) $0 \cdot (-4) =$

ε) $-1 \cdot (-4) =$

στ) $-2 \cdot (-4) =$

ζ) $-3 \cdot (-4) =$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου.

(Αντιμεταθετική ιδιότητα)

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$



Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενο τους ή να αναλύουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο.

(Προσεταιριστική ιδιότητα)

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$



Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 1 δεν μεταβάλλεται.

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$



Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με το 0 μηδενίζεται.

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$



Οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

53. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα γινόμενα.

α) $(+1,5) \cdot (-2,2) = \dots\dots\dots$

β) $(-2,2) \cdot (+1,5) = \dots\dots\dots$

γ) $(-0,5) \cdot (+2,2 \cdot (-3,5)) = \dots\dots\dots$

δ) $(-0,5 \cdot (+2,2)) \cdot (-3,5) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

ε) $1 \cdot (+1,5) = \dots\dots\dots$

στ) $1 \cdot (-2,2) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

ζ) $0,15 \cdot (-5) + 1,85 \cdot (-5) = \dots\dots\dots$

η) $(0,15 + 1,85) \cdot (-5) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

θ) $(+3) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = \dots\dots\dots$

ι) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \dots\dots\dots$

ια) $(-0,25) \cdot (-4) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

ιβ) $(-1,3) \cdot 0 = \dots\dots\dots$

ιγ) $0 \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

.....

.....

$++ = +$	Αν καλοί αθλητές (+) παίζουν σε μία ομάδα (+), τότε είναι καλό για την ομάδα (+)
$+- = -$	Αν καλοί αθλητές (+) φύγουν από μία ομάδα (-), τότε είναι κακό για την ομάδα (-)
$-+ = -$	Αν κακοί αθλητές (-) παίζουν σε μία ομάδα (+), τότε είναι κακό για την ομάδα (-)
$-- = +$	Αν κακοί αθλητές (-) φύγουν από μία ομάδα (-), τότε είναι καλό για την ομάδα (+)



Γινόμενο πολλών παραγόντων

Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θετικών ρητών είναι πάντα θετικό. Αν υπάρχει ένας παράγοντας που είναι αρνητικός μετατρέπεται το γινόμενο σε αρνητικό. Στην περίπτωση που υπάρχει και δεύτερος αρνητικός παράγοντας ξαναμετατρέπεται το γινόμενο σε θετικό κ.ο.κ.
Άρα:

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
 - Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό).
 - Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).
- Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.



Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:
 $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) =$
 $(\alpha + \beta)\gamma + (\alpha + \beta)\delta =$
 $\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$

54. Χωρίς να κάνετε τις πράξεις προσπαθήστε να προβλέψετε αν το γινόμενο κάθε έκφρασης είναι θετικό ή αρνητικό.

- α) $(-1)(-2)$
 β) $(-1)(-2)(-3)$
 γ) $(-1)(-2)(-3)(-4)$
 δ) $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)$

Να συμπληρώσετε τα κενά.

- α) Για άρτιο πλήθος αρνητικών παραγόντων, το γινόμενο θα είναι:
 β) Για περιττό πλήθος αρνητικών παραγόντων, το γινόμενο θα είναι:
 γ) Σε ένα γινόμενο που περιέχει αρνητικούς και θετικούς παράγοντες επηρεάζουν οι θετικοί παράγοντες το πρόσημο του γινομένου;

55. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-1,4) \cdot 5$

.....

β) $\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot (-2,1)$

.....

γ) $(-10) \cdot (-0,7)$

.....

56. Να υπολογίσετε το ακόλουθο γινόμενο:

$(-1)(-20)\left(+\frac{2}{3}\right)(-3)(0,25)$

.....

57. Να υπολογίσετε το γινόμενο $(-1)\alpha$, όταν το α παίρνει τις τιμές: $+3$, $-1,2$, $+\frac{2}{3}$, -2 .

.....

58. Να εκτελέσετε τις πράξεις

α) $-6 \cdot (\alpha - 2 - \beta)$

β) $(\alpha - 2)(\beta + 3)$

γ) $2\alpha + 3\beta + 4\alpha - 5\beta$

59. Ισχύει πάντα ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$; Εξηγήστε.

.....

.....

.....

60. Αν $x = -3$, $y = 2$ και $z = -5$, να γράψετε μία έκφραση που θα έχει κάθε μία από τις ακόλουθες τιμές.

α) 17	β) 0	γ) -1	δ) 1	ε) 7

A.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών



Για να **διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς**, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο $+$, αν είναι **ομόσημοι**, Δηλαδή
 $+:+=+$ και $-:-=+$
- το πρόσημο $-$, αν είναι **ετερόσημοι**, Δηλαδή:
 $+:-= -$ και $-:-=-$



Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha : \beta$

ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **λόγος του α προς το β**

και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης
 $\beta \cdot x = \alpha$



Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να

γραφτεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για

να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.



Διαίρεση με διαιρέτη μηδέν δεν ορίζεται.

61. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $(+1,5) : (+5)$

.....

.....

.....

.....

β) $\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right)$

.....

.....

.....

.....

γ) $(-0,45) : (-0,15)$

.....

.....

.....

.....

62. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-6x = -24$

.....

.....

.....

β) $-3x = +15$

.....

.....

.....

γ) $x : (-2) = -3$

.....

.....

.....

63. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left[\frac{2}{3}(-3) - (-2)(-9)\right] : [0,4(-10) - (-0,2)(-5)] + 7$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

64. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$B = \frac{-2 + \frac{3}{4} - \frac{5}{2}}{-2 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\Gamma = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{12}{11}\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{5} - \frac{9}{10}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\Delta = \left(2 - \frac{2}{3}\right) : \left(-3 + \frac{1}{3}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

65. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 3 + \gamma - (3\alpha + 2\beta - \gamma) - 3\left(-\alpha + \frac{\beta}{3}\right) + \beta \cdot (5 - 2)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$B = -(\gamma - 2\alpha) + 2\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\text{αν } \alpha + \beta = -3 \text{ και } \gamma + \delta = -5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις προς λύση

Θετικοί – Αρνητικοί

- 7.1.** Να γράψετε έναν αριθμό που να εκφράζει το καθένα από τα παρακάτω μεγέθη ή τις μεταβολές.
- Βάθος κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας
 - Αύξηση κατά 2 μονάδες
 - Θερμοκρασία πάνω από το μηδέν
 - Ζημία 1.000 ευρώ
 - Υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας
 - Θερμοκρασία κάτω από το μηδέν
 - Αύξηση μισθού κατά 200 ευρώ
- 7.2.** Πάνω στον άξονα $x'x$ έχουμε τα σημεία Μ και Κ που αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 και -3. Να βρείτε τα συμμετρικά τους σημεία ως προς την αρχή Ο του άξονα.
- 7.3.** Να βρείτε ποιοι ακέραιοι αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των αριθμών:
- 3 και 0
 - 2 και 2
 - 5,2 και -3,1
 - 0,2 και 6,9
- 7.4.** Αν σ' έναν άξονα τα σημεία Μ και Λ έχουν τετμημένες -3 και 2 αντίστοιχα, να βρείτε την τετμημένη του μέσου Α του ευθύγραμμου τμήματος ΜΛ.
- 7.5.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς σε κάθε ζευγάρι και να σημειώσετε ανάμεσα τους το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας ($<$, $>$)
- 7 0
 - 5 2
 - 3 -3
 - $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$
 - 0 2,1
 - 7,2 -7
 - 6 1
- 7.6.**
- Οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι και ο 7 είναι ομόσημος του β . Ο αριθμός α είναι αρνητικός ή θετικός;
 - Οι αριθμοί α , β είναι ομόσημοι και ο α είναι ομόσημος του -1. Ο αριθμός β είναι αρνητικός ή θετικός;

Απόλυτη τιμή

- 7.7.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
- $|-3| + \kappa = |-4|$
 - $4x - |-2| + |2| = -|-5|$
 - $y - |4| = |-6| + 1$
- 7.8.** Συμπληρώστε τα κενά με κατάλληλο σύμβολο ($<$ ή $=$ ή $>$ ή $\leq$ ή $\geq$)
- Αν $x \leq 0$: $-x \dots 0$ $-|-x| \dots 0$ $3x \dots 0$ $-4x \dots 0$ $|x| \dots 0$ $-|-x| \dots 0$
 - Αν $y > 0$: $-y \dots 0$ $-|-y| \dots 0$ $3y \dots 0$ $-4y \dots 0$ $|y| \dots 0$ $-|-y| \dots 0$
- 7.9.** Για τους μη μηδενικούς ρητούς αριθμούς z και ω ισχύει $|z| < |\omega|$. Να συγκρίνετε τους z και ω αν:
- $z < 0$ και $\omega > 0$
 - $z < 0$ και $\omega < 0$
 - $z > 0$ και $\omega < 0$
 - $z > 0$ και $\omega > 0$
- 7.10.** Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x σε κάθε περίπτωση:
- $|x| = 3$
 - $|x| = \frac{1}{3}$
 - $|x| = 0$
 - $|x| = -1$

7.11. Γράψτε τους αντίθετους των αριθμών:

α) $|-3|$ β) $|4|$ γ) $|-2,5|$ δ) $\left|\frac{2}{5}\right|$

7.12. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $|-2| \cdot |-3| + |4+3| : 7$ β) $(|8:2+5| : 3-1) \cdot |-4|$

Πρόσθεση ρητών αριθμών

7.13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(-3) + (+4) + (-6) + (+5)$ γ) $\left(\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + (+3) + \left(+\frac{1}{2}\right)$
 β) $(+2,3) + (-1,7) + (-2,8) + (+4,5)$ δ) $\left(\frac{4}{5} + 2\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right)$

7.14. Να τοποθετήσετε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες.

α) $(\dots 2) + (-4) = -6$ γ) $(\dots 8) + (+4) = 12$
 β) $(+3) + (\dots 3) = 0$ δ) $\left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\dots \frac{7}{3}\right) = 1$

7.15. Να υπολογίσετε την θερμοκρασία που θα προκύψει σε κάθε περίπτωση:

α) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους -3°C και ανεβαίνει κατά 4°C .
 β) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους 0°C και ανεβαίνει κατά 2°C .
 γ) Η θερμοκρασία βρίσκεται στους -5°C και ανεβαίνει κατά 5°C .

7.16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $A = x + (y + z)$ αν $x = -3,2$, $y = -1,4$, $z = 4$
 β) $B = (-x) + (-y) + z$ αν $x = -2$, $y = 7,1$, $z = -5,1$

7.17. Να υπολογίσετε το άθροισμα $K + \Lambda$, αν είναι:

$K = |-5,6| + |2,3|$ και $\Lambda = |+8,5| + |-10,24| + |-0,1|$

7.18. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $(-|-5|) + (-|+3|)$
 β) $(+|-1|) + (-|-10|) + (-|+17|)$

7.19. Ένας καταστηματάρχης έχει στο ταμείο του 1050 €. Κατά την διάρκεια της ημέρας έκανε τις παρακάτω διαδοχικές εισπράξεις και πληρωμές: +227 €, -79 €, +29 €, -91 €, -43 €, +118 €. Τι ποσό έχει το ταμείο στο τέλος της ημέρας;

Αφαίρεση ρητών αριθμών

7.20. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:

α) $\left(-\frac{4}{5}\right) - (-3)$ γ) $(-7) - \left(+\frac{5}{6}\right)$
 β) $\left(+2\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ δ) $\left(+1\frac{4}{5}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right)$

7.21. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

α) $(-4) - (-3) + (+9) + (-2) - (-10)$

β) $\left(+\frac{3}{5}\right) - (-3) + \left(2\frac{1}{2}\right) - (-0,2)$

γ) $-\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left[-\left(2\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + 1\frac{3}{10}\right]$

7.22. Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις $x - (-2) = 5$ και $x - (+7) = -10 + (+5)$ έχουν την ίδια λύση.

7.23. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις στην παράσταση $A = -(2x - y + 3) - (-x + 3y - 2) + (2y - 1)$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

7.24. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = -(x - y + 10) - (-6 - 2x) - (x - 4 + y)$

β) $B = 11 - (x + y - z) - (2 - x) + (y - z)$

7.25. Αν $x + y = -1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = -(2x - 3y - 2) + (-x - 2y + 1) - (3 - 4x)$

7.26. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x - |-14| = |-21|$

β) $|+1,2| + x = -2,2 + |-3,2|$

γ) $2,7 + |x| = -|-4,1|$

7.27. Ο Μέγας Αλέξανδρος γεννήθηκε το 356 π.Χ., έγινε βασιλιάς το 336 π.Χ. και έζησε 33 χρόνια. Να βρείτε πόσων ετών έγινε βασιλιάς και ποια χρονολογία πέθανε;

Πολλαπλασιασμός ρητών

7.28. Συμπληρώστε τα πρόσημα και τους αριθμούς όπου λείπουν:

α) $(...2) \cdot (-2) \cdot (+7) = -28$

β) $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-...) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) = 1$

γ) $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) \cdot (+...) = ... \frac{3}{5}$

7.29. Συμπληρώστε με κατάλληλο σύμβολο ($<$ ή $=$ ή $>$) τις παρακάτω προτάσεις:

α) αν $2x < 0$, τότε $x \dots 0$

β) αν $3\kappa > 0$, τότε $\kappa \dots 0$

γ) αν $5\alpha = 0$, τότε $\alpha \dots 0$

δ) αν $(-1)(-\lambda) < 0$, τότε $\lambda \dots 0$

7.30. Με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας, να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $1,2 \cdot 13,4 + 2,8 \cdot 13,4$

β) $4,1 \cdot 19,3 - 2,1 \cdot 19,3$

7.31. Αν είναι $x + y = -1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $3 \cdot (x + 2) + 3y$

β) $1 + 2(x - 2 + y)$

7.32. Αν $xy = -1$, να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $x \cdot (-1) \cdot (-y)$

β) $3 \cdot (-x) \cdot (-2) \cdot y$

7.33. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $3 \cdot (-2) \cdot (-4) - (-1) \cdot (+5) + (-3) \cdot (-4) \cdot (-1)$

β) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

7.34. Να εξετάσετε στις παρακάτω περιπτώσεις, αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι:

α) $3 \cdot (-x) \cdot 2 \cdot y = -6$

β) $\frac{1}{2} \cdot (-x) \cdot (-y) \cdot 2 = 2$

γ) $\frac{4}{5} \cdot y \cdot \left(-\frac{15}{12}\right) \cdot x = -1$

7.35. Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων:

α) $(-2-3) \cdot (-5) - [-(1)-(-4)+3 \cdot 6] + (-1) \cdot (-10+12)$

β) $[-3-2(-5+7)] - [(-2+1)(-2)+3 \cdot (5-9)]$

γ) $-4 + (-2 \cdot 3 + 5) - [4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6+8)] - 3 \cdot 5 + 6$

7.36. Να βρείτε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων:

α) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5} + 1\right) - \left[-\frac{3}{2} + \left(2 - \frac{4}{3}\right) \cdot (-3)\right]$

β) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-12) - \left(-2 - \frac{1}{4}\right) \cdot 4 + \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot (-6)$

γ) $\left[\left(\frac{3}{4} - 1\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - (-1+3) \cdot \frac{1}{8}\right] - \left[-\frac{1}{3} - \left(\frac{7}{4} - 2\right)\right]$

Διαίρεση ρητών αριθμών

7.37. Να υπολογίσετε τα παρακάτω πηλίκα:

α) $\left(+\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{7}{8}\right)$

β) $\left(-5\frac{1}{3}\right) : \left(-2\frac{1}{5}\right)$

γ) $\left(-1\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{1}{4}\right)$

7.38. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x : 5 = -2$

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right) : y = -\frac{3}{4}$

β) $8 : k = -2$

δ) $\lambda : \left(-\frac{2}{3}\right) = -6$

7.39. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

α) $(-10:5-2)-[-7-(-6):(-2)]+14:7\cdot(-2)$

β) $\left[-\frac{1}{2}:3+\left(2-\frac{1}{3}\right):4\right]-\left[\left(-\frac{2}{3}:4\right)-\left(\frac{4}{3}-1:3\right)\right]$

7.40. Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων αριθμητικών παραστάσεων.

α) $\frac{[(-10)-(-3)]:(-1)+(-3)-(-4)}{(-6):(-2)-(-7)(-1)}$

β) $\frac{-[-4+(-8+3):(4-3)]-4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{4}{5}+5\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)}$

7.41. Αν $x = 1$ και $y = -\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{x-5y+2xy}{x+y}$

7.42. Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων αριθμητικών παραστάσεων.

α) $\left[\left(\frac{4}{3}-2\right):\left(-\frac{3}{4}\right)\right]:\left[\left(-\frac{1}{2}-4\right):\left(-2+\frac{5}{7}\right)\right]$ γ) $-\left[\left(\frac{1}{3}-2\right):\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{6}\right)-\left(1-\frac{4}{3}\right):\left(-1-\frac{1}{3}\right)\right]:\left(-\frac{16}{3}\right)$

β) $\frac{-2+\frac{8}{5}}{\left(-\frac{9}{4}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)}$

δ) $\frac{-1+\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{2}}-1$

7.43. Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων αριθμητικών παραστάσεων.

α) $\frac{\left(\frac{3}{4}+1-\frac{7}{5}\right)-\left(1-\frac{3}{4}-\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)}$

γ) $\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{21}\right):\left(-\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{13}{11}\right)}$

β) $\frac{-\frac{2}{3}+\frac{-\frac{3}{8}:\left(\frac{2}{3}-2\right)}{\frac{2}{3}+\frac{-3}{-2}}}{\frac{2}{3}}$

δ) $-\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{\frac{1}{4}-1}+\frac{\left(\frac{1}{5}-2\right):\left(\frac{2}{5}-1\right)}{\frac{1}{5}-1}$

7.44. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\frac{|-10|+|-3|-|-1|}{|-3+5|+|-7|}$.

7.45. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{-\frac{x}{y}-\frac{4}{x}:\frac{4}{y}+5\frac{x}{y}}{3x:y-9\left(2+\frac{x}{y}\right)}$ αν ο λόγος του x προς το y είναι ίσος με -2 .