

ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξισώσεις

& λίγες
ανισώσεις

Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού με έναν Άγνωστο



1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $2x = 4$

β. $6x = 0$

γ. $3x = 2x$

δ. $5x = -25$

ε. $-8x = 2$

στ. $-x = 9$

ζ. $-x = -9$

η. $4x + 3 = 8$

θ. $4x - 7 = -2$

ι. $-2x + 3 = 3$

2. Μερικές ακόμα , για τις οποίες να κάνετε και επαλήθευση :

α. $-2x - 5 = -9$

β. $-7x + 2 = 3x + 22$

γ. $\omega - 4 = -3\omega + 4$

δ. $7x - 15 = 3x + 9$

ε. $3y - 4 = 5y + 2$

στ. $9\omega + 3 = 2\omega + 10$

ζ. $-3x + 15 = -4x - 3$

η. $x + 3 = x + 3$

θ. $1,5\varphi - 2,3 = -2,3 + 4\varphi$

ι. $0,8x + 3,7 = 5,2x + 3,7$

ια. $6x - 5 + 3x = -6 - 2x + 3x - 1$

3. Να λύσετε κι αυτές τις εξισώσεις με τις παρενθέσεις, κάνοντας καμιά επαλήθευση αραιά και πού :

α. $2 \cdot (3x + 3) = 4 - x$

β. $-5 \cdot (-2x + 1) = 45$

γ. $\cdot (3x - 1) = 3x - 2$

δ. $4x - 1 = 2 \cdot (2x + 4) + 3$

ε. $3 \cdot (x - 2) = 4x + 3 \cdot (4 - x)$

στ. $4 \cdot (x + 1) = 5 - (-2x + 7)$

ζ. $2(x + 4) - (12 - x) = x + 6$

η. $4(x + 1) - (x + 2) = x - 6$

θ. $x + 3 + 3(x + 2) = 9 - 2x$

ι. $8(x + 2) - 5 = 2(x + 3)$

ια. $0,35 \cdot (x - 2) + 4x = 2,7x - 11,25$

4. Σαν τις προηγούμενες, μα λίγο πιο μεγάλες :

α. $-2 \cdot (2x - 1) + 5 = 11 - 4 \cdot (x + 1)$

β. $-2 \cdot (-3x + 3) = 6 \cdot (4x - 9) - 7x$

γ. $2(3\omega + 4) + 5(3\omega - 5) = 3(\omega - 7) + 8$

δ. $5(x - 2) + 4x + 9 = 1 - 3(2x - 4)$

ε. $-9(x + 1) = 2x - 10(x + 2) + 11$

στ. $8 - 3(4x - 2) + x = -10 - 4x + 45$

ζ. $9 - 7(2x - 3) + 4x = 70 - 2x - 8$

η. $3x + 4(x - 2) = x - 5 + 3(2x - 1)$

θ. $8 - 3x + 4(2x - 1) - 5(4 - 4x) = 1$

ι. $0,45 - 4 \cdot (0,2x + 7) = 1,5x - (2x + 3,2) \cdot 1,4$

5. Τώρα, με τρεις παρενθέσεις, κατάλληλες για τιμωρία :

α. $4(3 - x) - 2(3x - 4) + 9x = -8x - 3(1 - x) + 23$

$$\beta. \quad 4(x - 1) - 10(x - 9) = 8x - 1 - 9(x - 8)$$

$$\gamma. \quad -10 + 24(y + 2) + 2(5y + 9) - y = -8(y + 2) + 3$$

6. Να λυθούν κι ετούτες με τα κλάσματα :

$$\alpha. \quad \frac{4x}{3} = 2(1 - x)$$

$$\beta. \quad \frac{2}{5 - x} = \frac{3}{4}$$

$$\gamma. \quad \frac{x + 2}{3} = \frac{2x + 7}{4}$$

$$\delta. \quad \frac{3 - x}{2} = \frac{-6 - 5x}{7}$$

$$\epsilon. \quad \frac{11}{5} = \frac{2 - x}{-x + 7}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{x + 4}{5} = \frac{2 + x}{3}$$

$$\zeta. \quad \frac{3}{5} = \frac{x + 4}{x + 6}$$

$$\eta. \quad \frac{3 - x}{2} = \frac{6 - 2x}{4}$$

$$\theta. \quad -\frac{x}{2} = 3(2 - 3x)$$

$$\iota. \quad \frac{3x}{2} = -\frac{1 - x}{3}$$

$$\kappa\alpha. \quad 2x + \frac{1 - x}{3} = 0$$

$$\iota\beta. \quad \frac{5x}{5} - \frac{x}{2} = 0$$

$$\iota\gamma. \quad -\frac{7x - 3}{3} + \frac{2x}{8} = 0$$

7. Αυτές; Να μην τις λύσουμε κι αυτές;

$$\alpha. \quad \frac{3y + 5}{2} - \frac{3y + 1}{4} = 3$$

$$\beta. \quad \frac{y + 1}{3} - \frac{y + 1}{3} = 7$$

$$\gamma. \quad \frac{2x}{5} - \frac{y + 1}{3} = \frac{5 - y}{10}$$

$$\delta. \quad \frac{y + 1}{3} + \frac{y + 1}{3} = y + 5$$

$$\epsilon. \quad \frac{t - 2}{3} = -\frac{11}{2} - \frac{2t - 1}{4}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{2x - 3}{3} - x = \frac{x + 1}{6} - \frac{1}{4}$$

$$\zeta. \quad -x - \frac{2x-3}{3} = \frac{5}{12} - \frac{1+x}{6}$$

$$\eta. \quad \frac{9x-2}{4} - \frac{x}{3} = 5 - \frac{1-x}{6}$$

$$\theta. \quad 7 - \frac{x+2}{2} = \frac{x+5}{3} - \frac{x+6}{4}$$

8. Εξισώσεις κι άλλες εξισώσεις :

$$\alpha. \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = 3x + \frac{1}{3}$$

$$\beta. \quad \frac{3(1-x)}{4} - \frac{x}{2} = 3(x-1) - \frac{1-x}{4}$$

$$\gamma. \quad \frac{3x-1}{4} - \frac{2x-5}{6} = \frac{5x+1}{12}$$

$$\delta. \quad \frac{x+3}{3} - \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$$

$$\epsilon. \quad \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{3} = -\frac{5x+2}{12}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{x+10}{5} - \frac{3(x+1)}{10} = 1 - \frac{x-3}{5}$$

$$\zeta. \quad \frac{7x+16}{20} + \frac{2x-4}{5} = \frac{3x}{4}$$

$$\eta. \quad \frac{2+2x}{10} - \frac{1-3x}{5} = \frac{x}{5} - \frac{7}{2}$$

$$\theta. \quad \frac{3x-4}{3} - \frac{4x-6}{2} + \frac{x+7}{6} = 0$$

9. Και μερικές ακόμη, με κλάσματα :

$$\alpha. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{x}{50}$$

$$\beta. \quad \frac{3y-2}{9} + 1 = 2 - \frac{y-1}{6}$$

$$\gamma. \quad \frac{x+3}{9} - \frac{x}{6} = \frac{1}{3} - \frac{x}{18}$$

$$\delta. \quad \frac{x-7}{2} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{x+9}{9}$$

$$\epsilon. \quad 6 - \frac{2x}{5} = \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4}$$

$$\sigma\tau. \quad t - \frac{3 \cdot (t+1)}{4} = \frac{2t-1}{3}$$

$$\zeta. \quad x-14 - \frac{3(x-2)}{10} = \frac{2(2x-1)}{5}$$

$$\eta. \quad \frac{5(x+3)}{7} - (3x+2) = \frac{2-x}{7} - 20$$

$$\theta. \quad \frac{-x+2}{3} - \frac{2(x+1)}{6} = -\frac{5x}{2} + 4$$

$$\iota. \quad 3x - \frac{x-1}{2} = 3(x-2) - 2 + \frac{3-2(x-2)}{4}$$

$$\kappa\alpha. \quad x + \frac{5}{6} - \frac{2(x+1)}{3} = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}$$

$$\iota\beta. \quad \frac{5}{8}(x-24) - \frac{6}{4}(4-2x) = -36$$

10. Κι άλλες με κλάσματα, για χόρταση :

$$\alpha. \quad \frac{2 \cdot (\omega-3)}{5} - \frac{3 \cdot (\omega-2)}{4} = 1$$

$$\beta. \quad 7 - \frac{x-8}{2} = \frac{x-5}{3} - \frac{x-4}{4}$$

$$\gamma. \quad 3 \cdot (2+x) - \frac{x+1}{2} = 3x - 2 + \frac{3-2x}{4}$$

$$\delta. \quad \frac{5x}{3} - \frac{3(2x+1)}{5} = 1 - \frac{x-2}{3}$$

$$\epsilon. \quad \frac{1}{2}(x-3) + x - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(x+6) - \frac{x}{2}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{8-x}{6} + \frac{2(x-1)}{2} = \frac{x+6}{2} - \frac{x}{3}$$

$$\zeta. \quad \frac{2(2x-1)}{3} + \frac{3(x-1)}{2} + \frac{4(2x-3)}{5} = \frac{9(x-4)}{5}$$

$$\eta. \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} = \frac{x-3}{4} + 1$$

$$\theta. \quad \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$$

$$\iota. \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{7x+6}{12} = \frac{3x-2}{4} + \frac{5x-4}{6}$$

$$\iota\alpha. \quad 5(2x-3) - \frac{2(x+4)}{5} = -\frac{3(4-2x)}{2} + \frac{2x}{3}$$

$$\iota\beta. \quad 9 - \frac{x-3}{6} - \frac{3(x-3)}{3} + 4 = -\frac{x+5}{8}$$

11. Και μερικές για απαιτητικούς λύτες :

$$\alpha. \quad \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\beta. \quad \frac{7(x-3)}{4} - x - \frac{5(x-1)}{6} = \frac{3(2-x)}{5} - 2$$

$$\gamma. \quad 4 - \left(\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{4} \right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{3x-1}{3} \right)$$

$$\delta. \quad \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x - 1 \right) - 1 \right] - 1 = x + \frac{13}{27}$$

$$\epsilon. \quad 2x - \frac{2(3x-1)}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} - 2 + \frac{1-5x}{5} \right)$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{x-2}{3} - \frac{5}{9} \left(\frac{7x-10}{2} \right) = 13(5-x) - \frac{1}{4}$$

12. Να λυθούν κι αυτές οι περιέργες :

$$\alpha. \quad (x-1) \cdot (x-2) = 0$$

$$\beta. \quad (2x+1) \cdot (3x-2) = 0$$

13. Μερικές ακόμα όλων των ειδών, λίγο ανακατεμένες :

$$\alpha. \quad \frac{x+1}{3} = \frac{2x-9}{4} - \frac{1}{6}$$

$$\beta. \quad \frac{x-6}{2} - \frac{4}{3} = \frac{x+1}{9} + 1$$

$$\gamma. \quad \frac{3x-8}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7x+3}{10} - \frac{x}{2}$$

$$\delta. \quad \frac{\alpha+3}{2} - \frac{2 \cdot (\alpha+1)}{3} = \alpha - 5$$

$$\epsilon. \quad \frac{4\alpha}{5} - 3 = \frac{7 \cdot (\alpha-3)}{10} + \frac{2}{5}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{4} + \frac{x-2}{7}$$

$$\zeta. \quad \frac{2x-3}{2} - \frac{-3x-1}{4} = \frac{3-x}{4} - 1$$

$$\eta. \quad x + \frac{5}{6} - \frac{2 \cdot (x+1)}{3} = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}$$

$$\theta. \quad \frac{2 \cdot (x+1)}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+2 \cdot (x+2)}{6} - \frac{x}{3}$$

$$\iota. \quad \frac{x+5}{2} + 2 = \frac{2 \cdot (x+7) + 1}{10} - 9$$

$$\iota\alpha. \quad \frac{1}{2}(x-2) - (-x-3) = \frac{1}{3}(x-2x) + (-x+2)$$

$$\iota\beta. \quad 3 \cdot [2 \cdot (x+5) - 1] - x + 2 \cdot (x+6) = 20x$$

$$\iota\gamma. \quad 2 \cdot [x + 3 \cdot [-(x+1) + 2]] = 5 \cdot (x+1)$$

14. Μεγάλες ναι, άλυτες όμως όχι :

$$\alpha. \quad 3 \cdot x - \frac{x-1}{2} = 3 \cdot (x-2) - 2 + \frac{3-2(x-2)}{4}$$

$$\beta. \quad 3 \cdot \left(1 + \frac{2x}{3}\right) - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right) = 9 \cdot \left(\frac{-(-4x+3)}{6} - \frac{3}{2}\right) + 8$$

15. Να λυθεί η παρακάτω τρομαχτική εξίσωση :

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^{-2} - (-2)^{-1} \cdot (x-1) = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot x - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 2^{-3}$$

16. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση όπου x ο άγνωστος και a κάποιος ρητός αριθμός. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του a , αν η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 3 ;

$$(2a+1) \cdot x + \frac{a}{3} \cdot x = -2(a+x) - (a+1)$$

17. Αν λ είναι η τιμή της παράστασης : $(-1)^{100} + (-1)^{101} + (-1)^{102}$ να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $\lambda x = 1$

β. $(\lambda + 1)x = 0$

γ. $(\lambda + 1)x = \lambda$

18. Δίνεται η εξίσωση :

$$(3\lambda + 1) \cdot x - \lambda \cdot x + 5 = 5\lambda \cdot x - 12$$

όπου λ είναι γνωστός ρητός αριθμός και x ο άγνωστος. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να επαληθεύεται από τη μονάδα;

19. Να βρείτε τον ρητό a ώστε η εξίσωση : $(a - 3) \cdot x = 6$ να είναι αδύνατη.
-

20. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η εξίσωση : $\frac{\lambda-1}{2} \cdot x + \frac{1}{3} = \frac{x+1}{3}$ να είναι αόριστη.

Επίλυση Τύπων



- 21.** Να λύσετε το δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα : $F = m \cdot a$, ως προς την επιτάχυνση a .

- 22.** Να λύσετε το Νόμο των Ιδανικών Αερίων : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

α. ως προς τον όγκο V **β.** ως προς την απόλυτη θερμοκρασία T

- 23.** Να λύσετε το Νόμο των Charles και Gay-Lussac : $V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$

α. ως προς τον όγκο V_0 **β.** ως προς τη θερμοκρασία θ

- 24.** Να λύσετε τον τύπο του Εμβαδού Τραπεζίου : $E = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2}$

α. ως προς v **β.** ως προς β

- 25.** Να λύσετε τον τύπο μετατροπής των βαθμών Fahrenheit, σε βαθμούς Celsius : $F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$, ως προς C° .

- 26.** Να λύσετε τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης : $F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$ ως προς :

α. τη μάζα m **β.** τη Σταθερά Παγκόσμιας Έλξης G

- 27.** Να λύσετε το Νόμο του Coulomb : $F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$ ως προς :

α. το φορτίο Q_1 **β.** την απόσταση d^2

- 28.** Να λύσετε την εξίσωση του ηλεκτρισμού : $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, ως προς την αντίσταση R_2 .
-

- 29.** Να λύσετε την εξίσωση της Έλλειψης : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

α. ως προς x^2

β. ως προς β^2

Προβλήματα Εξισώσεων



Εύρεση αριθμών

- 30.** Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε το $\frac{1}{3}$ του αριθμού αυτού βρίσκουμε 35. Ποιος είναι ο αριθμός;
-

- 31.** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, ώστε:

α. Το άθροισμά τους να είναι 15.

β. Το πενταπλάσιο του μεσαίου να είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων.

γ. Το διπλάσιο του μεσαίου να είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων.

- 32.** Είναι $2 \cdot 2 = 2 + 2$. Μπορείτε να βρείτε ζευγάρια διαφορετικών ρητών α, β , ώστε να είναι: $\alpha \cdot \beta = \alpha + \beta$;
-

- 33.** Να βρεθεί αριθμός που το διπλάσιό του αυξημένο κατά 5 ισούται με το τριπλάσιό του ελαττωμένο κατά 19.

- 34.** Να βρεθούν δύο αριθμοί, αν γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 50 και ο ένας είναι επταπλάσιος του άλλου.

- 35.** Δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 35 και ο λόγος τους είναι $\frac{2}{7}$. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

- 36.** Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 177. Αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο, παίρνουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 9. Να βρείτε τους δύο αριθμούς.

- 37.** Σε ένα διψήφιο αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος του πρώτου κατά 27. Ποιος είναι ο αριθμός;

- 38.** Ποιος αριθμός πρέπει να αφαιρεθεί από τους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{13}{2}$ και $\frac{17}{3}$, ώστε να γίνουν ίσα;

- 39.** Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{3}{2}$ και $\frac{7}{3}$, ώστε να γίνουν ίσα;

- 40.** Αν από το πενταπλάσιο ενός αριθμού αφαιρέσουμε τον αριθμό 145, βρίσκουμε τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού αυξημένα κατά 14. Ποιος είναι ο αριθμός;

Εύρεση ηλικιών

- 41.** Σε ένα παιχνίδι η Ελένη ρωτήθηκε πόσων χρονών είναι και απάντησε ως εξής :

- Αν στην ηλικία μου προσθέσεις 3
- διαιρέσεις το άθροισμα με 2
- προσθέσεις στο πηλίκο την ηλικία μου
- διαιρέσεις το νέο άθροισμα με 2

θα βρεις αποτέλεσμα 15. Πόσων χρονών είναι η Ελένη;

42. Το άθροισμα των ηλικιών τριών ατόμων είναι 100. Ο μεγαλύτερος έχει ηλικία ίση με το άθροισμα των ηλικιών των άλλων δύο και ο μικρότερος είναι 10 χρόνια μικρότερος απ' τον μεσαίο. Να βρείτε τις ηλικίες και των τριών ατόμων.

43. Ένας πατέρας είναι 58 χρονών και ο γιος του 27. Μετά από πόσα χρόνια ο πατέρας θα έχει διπλάσια ηλικία από τον γιο του;

44. Ο πατέρας της Αλέκας έχει τετραπλάσια ηλικία από αυτή. Αν μετά από 5 χρόνια θα έχει τριπλάσια ηλικία από την κόρη του να βρείτε τη σημερινή ηλικία της Αλέκας.

Γεωμετρικά προβλήματα

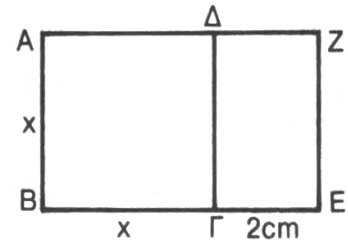
45. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο με περίμετρο 9 cm, ώστε η μία διάστασή του να είναι διπλάσια από την άλλη.

46. Ποιες είναι οι διαστάσεις ορθογωνίου, αν αυτό έχει περίμετρο 35 m και οι διαστάσεις του διαφέρουν κατά 2,5 m;

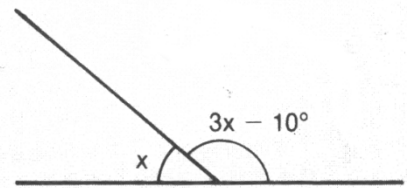
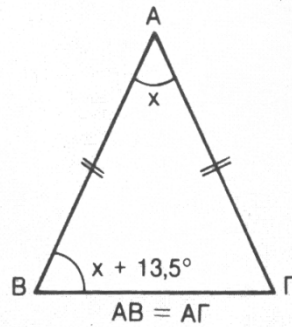
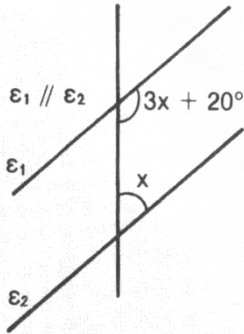
47. Η διαφορά των διαστάσεων ενός ορθογωνίου είναι 30 cm και η περιμέτρός του είναι 4 m. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

48. Οι βάσεις ενός τραπεζίου διαφέρουν κατά 3 cm, το ύψος του είναι 17 cm και το εμβαδόν του 119 cm². Να βρείτε τις βάσεις του τραπεζίου αυτού.

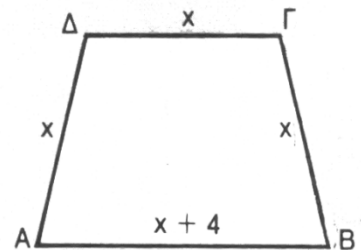
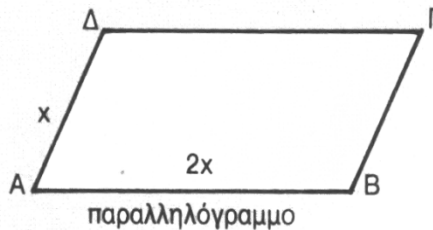
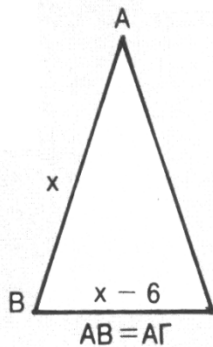
49. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, αν τον εμβαδόν του είναι κατά 35 cm^2 μικρότερο, από το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABEZ$.



50. Να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση το x :



51. Να υπολογίσετε τις πλευρές των παρακάτω σχημάτων, αν το καθένα έχει περίμετρο 60 cm .



52. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι 154 cm^2 και το ύψος του είναι 11 cm . Να βρείτε τις βάσεις του, αν ξέρουμε ότι διαφέρουν κατά 4 cm .

53. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A είναι τριπλάσια της Γ και η γωνία B είναι διπλάσια της Γ . Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

54. Η γωνία B ενός τριγώνου ABΓ είναι τα $\frac{3}{5}$ της γωνίας A και η γωνία γ είναι το $\frac{1}{3}$ της γωνίας B. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.
-

Προβλήματα χρόνου

55. Η απόσταση Αθήνα - Κόρινθος είναι 80 km. Δυο αυτοκίνητα ξεκίνησαν στις 7 π.μ. , το ένα από Αθήνα για Κόρινθο με μέση ταχύτητα 70 km/h και το άλλο από Κόρινθο για Αθήνα με μέση ταχύτητα 90 km/h. Ποια ώρα θα συναντηθούν και σε ποια απόσταση από την Αθήνα;
-
56. Ένα αυτοκίνητο διάνυσε με σταθερή ταχύτητα μια απόσταση σε 5 h, ενώ ένα δεύτερο αυτοκίνητο που έτρεχε 20 km την ώρα λιγότερο, χρειάστηκε για την ίδια απόσταση 7 h. Να βρείτε την απόσταση αυτή.
-
57. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από Αθήνα για Θεσσαλονίκη στις 6 π.μ. με μέση ταχύτητα 70 km/h. Ύστερα από 1 ώρα ξεκινάει ένα δεύτερο αυτοκίνητο από Αθήνα για Θεσσαλονίκη με μέση ταχύτητα 90 km/h. Ποια ώρα θα συναντηθούν και σε πόση απόσταση από την Αθήνα;
-
58. Ένα μηχάνημα για να τελειώσει ένα έργο χρειάζεται 32 h, ενώ ένα δεύτερο μηχάνημα χρειάζεται για το ίδιο έργο 28 h. Αν χρησιμοποιηθούν και τα δύο μηχανήματα συγχρόνως σε πόσες ώρες θα τελειώσει το έργο;
-
59. Ένας εργάτης εκτελεί ένα έργο σε 8 ώρες και ένα άλλος εκτελεί το ίδιο έργο σε 12 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσουν το έργο και οι δύο εργάτες, αν εργαστούν μαζί;
-

60. Μια βρύση μπορεί να αδειάσει μια γεμάτη δεξαμενή σε 8 ώρες, ενώ μια άλλη να γεμίσει την άδεια δεξαμενή σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε συγχρόνως τις δύο βρύσες;
-
61. Μια βρύση γεμίζει άδεια δεξαμενή σε 12 ώρες και μια δεύτερη βρύση την γεμίζει σε 2 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε την πρώτη βρύση και μετά από $1\frac{1}{2}$ ώρες ανοίξουμε και τη δεύτερη;
-
62. Σε μια κυλιόμενη σκάλα πολυκαταστήματος, για να ανέβει κανείς από έναν όροφο στον επόμενο, χρειάζεται 30 s. Αν ο Νίκος ανεβαίνει συγχρόνως τα σκαλοπάτια της κυλιόμενης σκάλας, τότε φθάνει στον επόμενο όροφο σε 5 s. Αν η σκάλα ήταν ακίνητη, πόσο χρόνο θα χρειαζόταν ο Νίκος να φθάσει στον επόμενο όροφο;
-
63. Ο Πέτρος παίζει σε μια κυλιόμενη σκάλα. Με το χρονόμετρο του ρολογιού του παρατήρησε ότι, αν μείνει ακίνητος, χρειάζεται 63s για να ανέβει. Αν ανέβει και ο ίδιος 16 σκαλοπάτια, καθώς η σκάλα κυλάει, τότε χρειάζεται 45s. Πόσα σκαλοπάτια έχει η σκάλα;
-
64. Ο Χάρης μπορεί να χτίσει ένα μικρό τοίχο μόνος του, αν δουλέψει 9 h . Ο Βαγγέλης, για τον ίδιο τοίχο, χρειάζεται 10 h. Αν δουλέψουν μαζί, τότε η εργασία τους μειώνεται σε απόδοση κατά 10 τούβλα την ώρα, τελειώνουν όμως τον τοίχο σε 5 ώρες. Να βρείτε πόσα τούβλα είχε ο τοίχος.
-
65. Σε μια σιδηροδρομική γραμμή κινούνται 2 τρένα Α και Β, με ταχύτητες 5 και 10 km/h, αντίστοιχα, πλησιάζοντας το ένα προς το άλλο. Όταν η απόστασή τους είναι 10 km, μια μύγα που κινείται με ταχύτητα 50 km/h ξεκινά από το Α και κατευθύνεται προς το Β. Μόλις φτάνει στο Β επιστρέφει στο Α και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο, ως τη στιγμή που θα συναντηθούν τα τρένα. Να βρείτε πόσα km θα έχει διανύσει η μύγα, ώσπου να συνθλιβεί.

66. Ένα τρένο, μετά από ταξίδι $1\frac{1}{2}$ h με σταθερή ταχύτητα, παθαίνει βλάβη. Η επισκευή διαρκεί $\frac{1}{2}$ h. Κατόπιν, το τρένο συνεχίζει το ταξίδι του με ταχύτητα ίση προς τα $\frac{4}{5}$ της αρχικής. Έτσι, φτάνει στον προορισμό του με καθυστέρηση 3 h. Να βρείτε πόσο χρόνο θα διαρκούσε το ταξίδι, αν δεν πάθαινε βλάβη και ταξίδευε με την αρχική του ταχύτητα.
-

Προβλήματα ποσοστών

67. Ο Θεόφιλος πλήρωσε 5 € για ένα εισιτήριο, με έκπτωση 60%. Πόσο κοστίζει το εισιτήριο;
-
68. Η τιμή ενός ανταλλακτικού αυτοκινήτου μειώθηκε κατά 22% και έτσι πουλιέται 400 €. Να βρείτε πόσο στοίχιζε αρχικά το ανταλλακτικό αυτό.
-
69. Κατάθεσε κάποιος στο Ταμιευτήριο κεφάλαιο 1240 € και σε 1 χρόνο πήρε τόκο και κεφάλαιο 1302 €. Πόσο ήταν το επιτόκιο;
-
70. Για ένα εμπόρευμα με συντελεστή Φ.Π.Α. 18% πληρώσαμε συνολικά 472 €. Ποια είναι η τιμή του εμπορεύματος χωρίς Φ.Π.Α.;
-
71. Ένας λογαριασμός της Δ.Ε.Η. είναι 385 €. Από το ποσό αυτό τα 123 € είναι δημοτικά τέλη και άλλες εισφορές. Αν η κατανάλωση ρεύματος επιβαρύνεται με φόρο 15%, ποια είναι η πραγματική αξία του ρεύματος που καταναλώθηκε;
-
72. Ένας φαρμακοποιός ανάμειξε 3 λίτρα οινόπνευμα περιεκτικότητας 80% σε καθαρό οινόπνευμα και 4,5 λίτρα οινόπνευμα περιεκτικότητας 25% σε καθαρό οινόπνευμα. Να βρείτε την περιεκτικότητα του μείγματος σε καθαρό οινόπνευμα.

73. Μια βιομηχανία αναφυκτικών θέλει να παρασκευάσει πορτοκαλάδα περιεκτικότητας 40% σε καθαρό χυμό πορτοκαλιού. Διαθέτει δύο τύπους πορτοκαλάδας, ο πρώτος έχει περιεκτικότητα 80% σε καθαρό χυμό και ο δεύτερος 20%. Πόσα λίτρα πρέπει να αναμείξει από το δεύτερο τύπο με 1000 λίτρα από τον πρώτο;
-

74. Πόσα κιλά ψευδάργυρου πρέπει να συντήξουμε με 140 κιλά χαλκού, ώστε να πάρουμε ένα κράμα που να περιέχει 44% ψευδάργυρο και 56% χαλκό.
-

Δ ι ά φ ο ρ α

75. Σε μια διαδρομή με λεωφορείο μια μητέρα και το παιδί της πλήρωσαν μαζί 13,50 €. Πόσο κοστίζει το εισιτήριο, αν το παιδί πλήρωσε μισό εισιτήριο;
-

76. Ένας χωρικός ρωτήθηκε πόσα πρόβατα και πόσες κότες έχει κι εκείνος αποκρίθηκε ως εξής: «Τα ζώα μου, όλα μαζί, έχουν 32 κεφάλια και 82 πόδια». Πόσα πρόβατα και πόσες κότες είχε ο χωρικός;
-

77. Αγόρασε κάποιος ένα σαλόνι που αποτελείται από 4 πολυθρόνες και έναν καναπέ και πλήρωσε 4800 €. Αν ο καναπές κοστίζει όσο 2 πολυθρόνες να βρείτε την τιμή κάθε πολυθρόνας.
-

78. Σε ένα τεστ με 10 ερωτήσεις κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, ενώ για κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται σ' αυτήν λάθος απάντηση, αφαιρούνται 3 μονάδες. Ο Στέλιος πήρε στο τεστ 26 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;
-

79. Από τον πληθυσμό μιας κοινότητας είναι παντρεμένοι τα $\frac{2}{3}$ των αντρών και τα $\frac{3}{5}$ των γυναικών. Να βρείτε τι μέρος των ατόμων της

κοινότητας δεν είναι παντρεμένοι, αν είναι γνωστό ότι και οι 2 σύζυγοι, κάθε ζεύγους, είναι μέλη της κοινότητας.

80. Ένα Γυμνάσιο έχει 350 μαθητές. Η Α' τάξη έχει 20 μαθητές περισσότερους από τη Β' τάξη και η Γ' τάξη έχει 12 μαθητές λιγότερους από τη Β'. Πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη του Γυμνασίου;

81. Από τους μαθητές μιας τάξης οι μισοί πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια, το $\frac{1}{3}$ χρησιμοποιεί ποδήλατο, το $\frac{1}{9}$ πηγαίνει με το λεωφορείο και δύο μαθητές τους πηγαίνουν οι γονείς τους με το αυτοκίνητό τους. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

82. Ένας καφεπώλης έχει δύο είδη καφέ. Ο πρώτος πουλιέται 8,50 € το κιλό και ο δεύτερος 10 € το κιλό. Θέλει να φτιάξει ένα μείγμα 9 κιλών που να πουλιέται 9,50 € το κιλό. Πόσα κιλά θα αναμείξει από κάθε είδος;

83. Μια θεατρική παράσταση την παρακολούθησαν συνολικά 100 γονείς και παιδιά. Οι εισπράξεις ήταν 590 €. Αν κάθε παιδί πλήρωσε 5 € και κάθε γονέας 8 €, να βρεθεί πόσοι ήταν οι γονείς και πόσα τα παιδιά.

84. Ο Νίκος διάβασε ένα βιβλίο 250 σελίδων σε 5 μέρες. Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;

M i n d T r a p

85. Ο πλασιέ Πέτρος Κωστέας πουλούσε ένα υπερσύγχρονο προστατευτικό κερί αυτοκινήτου, το οποίο ισχυριζόταν ότι ήταν καλύτερο κι από ατσάλι. Ο Κωστέας πουλούσε το ένα κουτί 55 € και τα δύο 90 €. Έλεγε ότι το κέρδος του ήταν το ίδιο και στις 2 περιπτώσεις και αφού αυτά ήταν τα 2 τελευταία κουτιά, που του είχαν απομείνει, ήθελε να τα πουλήσει στα γρήγορα. Αν δεχτούμε ότι ήταν σωστά αυτά

που είπε ο Κωστέας, για το κέρδος του, πόσο πρέπει να του κόστιζε το κάθε κουτί προστατευτικού υγρού;

86. Ο Κώστας Περιστέρης είχε μια συλλογή από φωτογραφικά άλμπουμ σπάνιων πουλιών, την οποία ήθελε να πουλήσει. Πούλησε τα μισά άλμπουμ και ένα μισό άλμπουμ στον καθηγητή Πετράκη. Μετά πούλησε τα μισά, από όσα είχαν απομείνει και ένα μισό άλμπουμ στον κύριο Γεωργίου. Τώρα ο Περιστέρης έμεινε με 1 άλμπουμ. Πόσα άλμπουμ είχε αρχικά ο Περιστέρης;

87. Στο ζωολογικό κήπο, ένα κλουβί φιλοξενεί παγόνια και αγριόχοιρους. Αν υπάρχουν συνολικά 30 μάτια και 44 πόδια, πόσα παγόνια και πόσοι αγριόχοιροι υπάρχουν μέσα στο κλουβί;

88. Αν το ύψος κάποιου είναι 80 εκ. και το μισό του συνολικού του ύψους, τότε ποιο είναι το ύψος του;

Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού



89. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α. $x - 5(x + 2) < 2x - 3(x + 1)$

β. $18 - 3(x - 1) \leq 5(x + 1) - 2$

γ. $5x + 2(x + 3) > 7(x + 3) - 4$

δ. $\frac{1}{3}(3 - 2x) - \frac{1}{10}(3x - 1) < 4$

ε. $6(x - 3) - 2(3x + 7) \geq 4(3 - 6x) - (x - 3)$

90. Να λυθούν κι αυτές οι ανισώσεις :

α. $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{1}{2}$

β. $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-3}{3} \leq \frac{x+1}{2} + 3x$

γ. $\frac{x+1}{3} - \frac{2(x-1)}{5} > \frac{x}{3} + \frac{1-x}{15}$

δ. $\frac{3(x-4)}{10} - \frac{5x-1}{20} < \frac{x+5}{6}$

91. Συνέχεια της προηγούμενης :

α. $\frac{x-2}{6} - \frac{1-3x}{2} < \frac{3-2x}{3} - 2$

β. $\frac{x-1}{6} - \frac{3-2x}{8} > 2(x-2)$

γ. $2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{1}{3} - \frac{x+1}{6} + 4$

δ. $\frac{x+2}{4} - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{1}{8} - \frac{x-1}{2}$

ε. $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \leq x - 2 + \frac{3 \cdot (x-2) + 1}{6}$

στ. $\frac{x+1}{5} + \frac{x}{2} \leq x + 3 - \frac{3(x+1) - 11}{10}$

92. Να σχεδιάσετε και να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$\begin{array}{llll} \alpha. \begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq -3 \end{cases} & \beta. \begin{cases} x > -6 \\ x \leq 7 \end{cases} & \gamma. \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} & \delta. \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ \epsilon. \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} & \sigma\tau. \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} & \zeta. \begin{cases} x < \frac{13}{5} \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} & \eta. \begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \end{array}$$

93. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων, σε κάθε περίπτωση :

α. $2(x - 1) > 3(x - 3)$ και $5x - 2 > 2(x + 5)$

β. $-2(x - 19) > 7x + 2$ και $13 - 5x \leq 7(x - 1) - 4$

γ. $2(2x - 3) \geq 4x + 8$ και $\frac{x}{3} - \frac{3x}{5} < 1$

δ. $3(2x - 4) < -2(2 - 3x)$ και $\frac{x}{3} - 2 < \frac{3x}{4}$

ε. $2(x + 4) - (x + 6) \leq 12 - x$ και $2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$

94. Ομοίως :

$$\begin{array}{ll} \alpha. \begin{cases} 3x - 4 < 2(3 - x) \\ 2x - 3(x + 1) > x - 5(x + 1) \end{cases} & \beta. \begin{cases} 6(x + 1) > 4(x - 2) - 3(x - 3) \\ 7 - 6x < 2(5x - 2) - 3(1 - 4x) \end{cases} \end{array}$$

95. Σε κάθε περίπτωση, να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

α. $x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1$ και $x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1$

$$\beta. \quad \frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} < \frac{x}{6} \quad \text{και} \quad x - \frac{x-1}{2} < \frac{x-2}{3}$$

$$\gamma. \quad \frac{1-x}{2} + \frac{2-x}{3} > \frac{1-x}{4} \quad \text{και} \quad \frac{2(x+1)}{3} < \frac{3(x-1)}{4}$$

$$\delta. \quad \frac{x+2}{5} - \frac{x+1}{10} \leq -\frac{x-2}{5} - \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad \frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{6} \geq -\frac{x-3}{2} + \frac{5}{3}$$

$$\epsilon. \quad \frac{2(x-1)}{5} - \frac{5x+6}{2} \geq -\frac{x+4}{10} \quad \text{και} \quad \frac{3x-2}{2} \leq \frac{1+5x}{3} + 5$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} < \frac{7x-3}{6} \quad \text{και} \quad \frac{x-3}{2} - \frac{3(x+1)}{4} > \frac{5}{2} - \frac{x+10}{2}$$

$$\zeta. \quad \frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \quad \text{και} \quad \frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$$

$$\eta. \quad \frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad \frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$$

96. Ομοίως :

$$\alpha. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x+1}{8} < \frac{1}{2} - \frac{x-4}{6} \\ \frac{3x+1}{3} < \frac{3x-1}{2} - \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\beta. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-3}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{5x}{4} \\ \frac{x-1}{6} - \frac{3-2x}{3} < \frac{x-1}{2} \end{array} \right.$$

$$\gamma. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{3} + \frac{1}{4} \leq \frac{x}{2} \\ \frac{3x+1}{3} > \frac{3x-2}{2} - \frac{x-2}{3} \end{array} \right.$$

$$\delta. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} - \frac{2x-1}{2} \geq \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{2x-1}{3} < 1 - \frac{x}{3} \end{array} \right.$$

97. Ομοίως :

$$\alpha. \begin{cases} 21 - (x + 4,5) \cdot 2 > 7 \cdot (x - 1) + 1 \\ \frac{2x}{6} + 6 + \frac{x}{3} \geq \frac{x}{2} + 2 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{9x+3}{9} > x - \frac{1}{3} \\ 5 \cdot \left(x - \frac{4}{5}\right) + 16 < 11 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x + \frac{1}{2}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) \geq \frac{15}{30} \\ -x - \frac{1 - \frac{x}{3}}{4} + \frac{1 - \frac{x}{6}}{2} \leq \frac{1 - \frac{x}{4}}{3} - \frac{5}{12} \end{cases}$$

Προβλήματα Ανισώσεων



98. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια πλατεία με εμβαδό, μεταξύ 110 m² και 125 m². Το μήκος της πλατείας είναι 15 m. Μεταξύ ποιων ορίων θα περιέχεται το πλάτος της;

99. Ένας φυσικός αριθμός είναι μεταξύ 59 και 68 και όταν διαιρεθεί με 12 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

100. Ένας παραγωγός ροδάκινων υπολογίζει ότι την εποχή της συγκομιδής τους, θα χρειαστεί κάθε εβδομάδα να συσκευάζει 3 με 4 t (= τόνους) ροδάκινα σε τελάρα των 6 και 12 kg. Χρειάζεται 2άσιο αριθμό τελάρων των 6 απ' όσα των 12 kg. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός των τελάρων, που πρέπει να προμηθευτεί, έτσι ώστε να μην του λείπουν τελάρα, αλλά και να μη δεσμεύσει χρήματα για τελάρα, που δε θα χρησιμοποιηθούν.

101. Μια τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Δυο γραφεία ταξιδίων Α και Β προσφέρουν τις υπηρεσίες τους, νοικιάζοντας εκδρομικά λεωφορεία, όπως φαίνεται παρακάτω:

- Γραφείο Α : 200 € και 0,5 € ανά χιλιόμετρο.
- Γραφείο Β : 250 € και 0,2 € ανά χιλιόμετρο.

Ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά για τα x χιλιόμετρα, που θα διανυθούν;

102. Το πάγιο ποσό στο λογαριασμό κατανάλωσης νερού είναι 2 € , ενώ κάθε κυβικό μέτρο νερού (m^3) κοστίζει 0,3 €. Πόσα κυβικά μέτρα μπορούμε να καταναλώσουμε, ώστε να πληρώσουμε το πολύ 50 € ;

103. Το πλήθος των μαθητών ενός σχολείου, σε μια παρέλαση, είναι μεγαλύτερο από 452 και μικρότερο από 456. Στη δοκιμή, παρατάχτηκαν σε εξάδες και περίσσεψαν 4, οι οποίοι τελικά δεν παρέλασαν. Να βρείς τον αριθμό των μαθητών του σχολείου.

104. Να βρείτε ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που, αν προστεθεί στον αριθμητή του κλάσματος $\frac{-2}{7}$, δίνει έναν αριθμό μεγαλύτερο του -10 .

105. Να βρεις ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, που επαληθεύει την ανίσωση:

$$\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x-2}{4} < 1$$

ΑΛΓΕΒΡΑ

Πραγματικοί Αριθμοί

Ρητές τετραγωνικές ρίζες



1. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών :

α. $\sqrt{1}$

β. $\sqrt{0}$

γ. $\sqrt{-9}$

δ. $\sqrt{100}$

ε. $\sqrt{0,0169}$

στ. $\sqrt{0,001}$

ζ. $\sqrt{14400}$

η. $\sqrt{1000000}$

θ. $\sqrt{0,0001}$

2. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των παρακάτω κλασμάτων :

α. $\sqrt{\frac{64}{49}}$

β. $\sqrt{\frac{100}{81}}$

γ. $\sqrt{\frac{225}{196}}$

δ. $\sqrt{\frac{0,04}{0,25}}$

ε. $\sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{1}{900}}$

στ. $\sqrt{\frac{108}{3}}$

ζ. $\sqrt{\frac{1,6}{0,1}}$

η. $\sqrt{\frac{325}{13}}$

θ. $\sqrt{\frac{256}{400}}$

3. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των παρακάτω γινομένων :

α. $\sqrt{25 \cdot 49}$

β. $\sqrt{100 \cdot 64}$

γ. $\sqrt{121 \cdot 16}$

δ. $\sqrt{400 \cdot 3600}$

ε. $\sqrt{289 \cdot 0,0196}$

στ. $\sqrt{49 \cdot \frac{1}{81}}$

4. Να βρεθούν μερικές χιλιάδες τετραγωνικές ρίζες ακόμα :

α. $\sqrt{121}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{12.100}$

β. $\sqrt{16}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,0016}$

γ. $\sqrt{36}$, $\sqrt{0,0036}$, $\sqrt{360000}$

δ. $\sqrt{16900}$, $\sqrt{1,69}$, $\sqrt{0,0169}$

ε. $\sqrt{225}$, $\sqrt{2,25}$, $\sqrt{2.250.000}$

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$
1	4	1	2	2	4	$\sqrt{5}$
9	16					
4			7			
	25					$\sqrt{13}$

6. Εξετάστε αν οι αριθμοί $\sqrt{36} + \sqrt{64}$ και $\sqrt{36 + 64}$ είναι ίσοι. Να κάνετε το ίδιο και για τους αριθμούς $\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}$ και $\sqrt{4 \cdot 36}$. Ποιες υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε; Ισχύουν για οποιουσδήποτε αριθμούς;

7. Να γίνουν οι πράξεις :

α. $4\sqrt{\frac{1}{4}} - 8 \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{25}{9}}$

β. $\sqrt{81} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2}$

γ. $\sqrt{13 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}$

δ. $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

ε. $\sqrt{31 - \sqrt{40 - \sqrt{16}}}$

στ. $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

ζ. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{64}+1}}$

8. Να γίνουν οι πράξεις :

α. $\sqrt{5+2(3-1)} \cdot \sqrt{10^2-6^2}$

β. $\sqrt{5^2-3^2} : \sqrt{3^2 \cdot \sqrt{16}}$

γ. $\sqrt{3^2} - 2\sqrt{(-3)^2} + 4\sqrt{9}$

Άρρητες τετραγωνικές ρίζες



9. Να βρεθούν, με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και με προσέγγιση εκατοστού, οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών :

$$\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{20}$$

10. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$

β. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt{2}$

γ. $7\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 12\sqrt{5}$

δ. $4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

ε. $3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} - \sqrt{5} - 4\sqrt{7}$

στ. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{3}$

11. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $3(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) + 2(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

β. $2(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + 3(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

γ. $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-7)^2} - 3\sqrt{(-5)^2}$

δ. $3(\sqrt{8} + 2\sqrt{3}) + 2(3\sqrt{8} - 2\sqrt{3})$

ε. $3(2\sqrt{3} - \sqrt{7}) - 4(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$

στ. $2\sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{5}) - 3\sqrt{6}(4\sqrt{5} - \sqrt{6})$

ζ. $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) - 3\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1) - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{32} - 2\sqrt{8}$

β. $3\sqrt{20} + \sqrt{72} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{45}$

γ. $\sqrt{50} - \sqrt{108} - \sqrt{2} + \sqrt{27}$

δ. $2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$

ε. $3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48} - 3\sqrt{3}$

στ. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15}$

ζ. $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

η. $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

θ. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ι. $\sqrt{\frac{\alpha}{7}} \cdot \sqrt{14\alpha}$

13. Υπολογίστε τις παραστάσεις :

$A = \left(2\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$

$B = \left(2\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$

14. Αν $x = \sqrt{5}$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση : $A = (1 + x)(1 - x) + 3x$

15. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{2\sqrt{3y^3}}{y} : \sqrt{\frac{12y}{x}}$

β. $\frac{9\sqrt{200} - 12\sqrt{32}}{3\sqrt{2}}$

γ. $\frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$

16. Να γίνουν ρητοί οι παρονομαστές των κλασμάτων :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{7}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

Διάρφορες



17. Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση: $\sqrt{3(x-2)-5(x+3)}$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\sqrt{3} + x = 3x + \sqrt{2}$

β. $3 + \sqrt{2} \cdot x = \sqrt{5} + 6$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $\frac{3 \cdot \sqrt{y}}{2} - \frac{2\sqrt{y}}{3} = \frac{\sqrt{y} + 2}{2}$

β. $\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 3) = \frac{\sqrt{x} + 1}{6}$

20. Να λύσετε την ανίσωση : $3(x - \sqrt{5}) + 4(x - 2\sqrt{5}) > 5x + 3\sqrt{5}$

ΑΛΓΕΒΡΑ

Συναρτήσεις

Συναρτήσεις γενικά



1. Αν $y = \frac{x^2 - 4}{2}$ να υπολογίσετε τις τιμές του y αν :

$$x = 1, x = 0, x = -1, x = 2, x = \sqrt{2}, x = 1/2, x = (1,8)$$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y = 3x$ και $z = -x + 4$.

α. Αν $x = -2$ να υπολογίσετε την παράσταση : $A = y \cdot z + 3 \cdot y - 2z$

β. Αν $x = \frac{1}{3}$ να λύσετε την εξίσωση :

$$t \cdot y + \frac{t - z}{3} = -6z + \frac{y - t}{2}$$

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y = -x + 4$ και $z = 2x - 3$. Να λύσετε την εξίσωση : $2(y - z) - \frac{y}{5} = 1 - \frac{z}{10}$

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y = x^2 + 2x$, $z = \frac{x-1}{x}$ και $h = \sqrt{9+x^3}$. Αν είναι $x = -2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{2z - y + 3z}{y \cdot z \cdot h}$$

5. Το ιδανικό βάρος B (σε kg) ενός ενήλικα δίνεται ως συνάρτηση του ύψους του h (σε cm) από την ισότητα $B = \frac{3h}{4} - 60$.

- α. Να βρείτε το ιδανικό βάρος 2 ατόμων, τα οποία έχουν ύψη 165 και 192 cm.
- β. Ένα άτομο έχει ύψος 1,70 m και βάρος 65 κιλά. Το βάρος του είναι το ιδανικό; Αν όχι, ποια είναι η διαφορά του απ' το ιδανικό, σε ποσοστό %;

6. Οι τύποι δύο συναρτήσεων είναι $y = 3x - 4$ και $z = -x^2 + 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x	-3	-2	-0,5	0	0,5	1	2,5
y							
z							

7. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών της συνάρτησης : $y = 3x + 4$

x	-3	-2	0	1	4	6
y						

8. Ομοίως, για τη συνάρτηση : $y = -2x + 3$

x	3		0		$\frac{1}{2}$		
y		5		0		-2	-0,3

9. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{5x-1}{3}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x	-3		-2		0		4
y		3		8		-12	

10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x^3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

11. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών, για τη συνάρτηση:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

x	-1	0	1/2	1	1,5	2
y						

12. Δίνεται η συνάρτηση $y = -5x^2 + 2x$, όπου το x παίρνει τις τιμές -2, -1, 0, 1, 2, 3. Να φτιάξετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

13. Δίνεται η συνάρτηση : $y = -x^2$

- α. Αν για την ανεξάρτητη μεταβλητή ισχύει ότι $-4 < x < 4$ κι επιπλέον είναι ακέραιος αριθμός, τότε να φτιάξετε πίνακα τιμών για την εξαρτημένη μεταβλητή.
- β. Αντιστρόφως, να εξετάσετε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για τη μεταβλητή y.

14. Δίνεται η συνάρτηση $y = 2^x + |x|$. Να κάνετε πίνακα τιμών της συνάρτησης, αν ο x είναι ακέραιος με: $-3 \leq x \leq 3$
-

15. Παρακάτω, δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης: $y = (\lambda - 1)x$

x	1	-4	4,8	6	-10
y	0,25	-1	1,2	1,5	-2,5

Να βρείτε τον αριθμό λ .

16. Παρακάτω, δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης: $y = (\lambda + 2)x + \mu$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

17. Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = \alpha \cdot x + 2\beta$ είναι και ο εξής:

x	-4	-3	0	2
y	5	3	-3	-7

Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

18. Αντίστοιχα για τη συνάρτηση $y = x^2 + \beta x + \gamma$ έχουμε:

x	-1	0	1	2	3
y	0	1	4	9	16

Να βρείτε τους αριθμούς β και γ .

19. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{-3x+1}{x-4}$. Να φτιάξετε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης, δίνοντας στο x πέντε τιμές, από το σύνολο των φυσικών, μικρότερες του 7. Υπάρχει κάποιος αριθμός, που δημιουργεί πρόβλημα;
-

Γραφικές Παραστάσεις



20. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x^2$ δίνοντας στο x :

- α. ακέραιες τιμές
 - β. πραγματικές τιμές
-

21. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{12}{x}$ όταν :

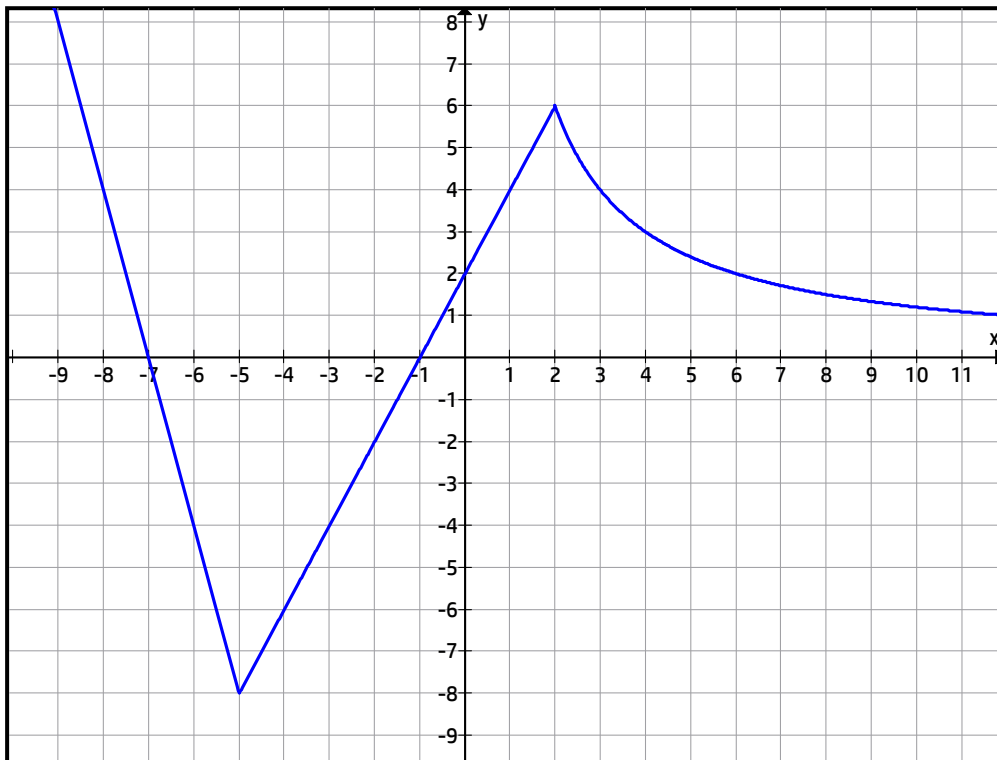
- α. ο x είναι ακέραιος και $-3 \leq x \leq 3$
 - β. ο x είναι πραγματικός και $-4 \leq x \leq 4$
-

22. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^3$ όταν :

- α. ο x είναι ακέραιος και $-2 \leq x \leq 2$
 - β. ο x είναι πραγματικός και $-3 < x < 3$
-

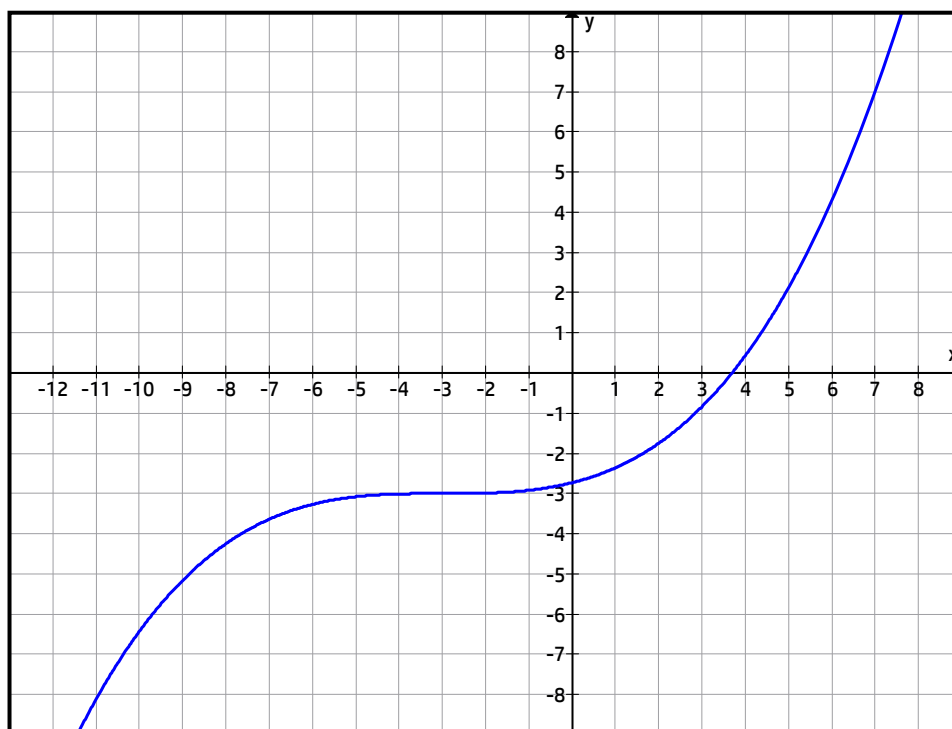
23. Στην παρακάτω γραφική παράσταση, να υπολογίσετε προσεγγιστικά τα παρακάτω :

- α. το y αν $x = -7, -5, -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 2, 4, 8$
- β. το x αν $y = -8, -2, 0, 6, 1, \frac{1}{1000}$



24. Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης, να βρείτε :

- α.** τις τεταγμένες των σημείων με $x = -11$, -3 , 0 , $\frac{3}{4}$, 7
- β.** την τετμημένη του σημείου με τεταγμένη -8 .



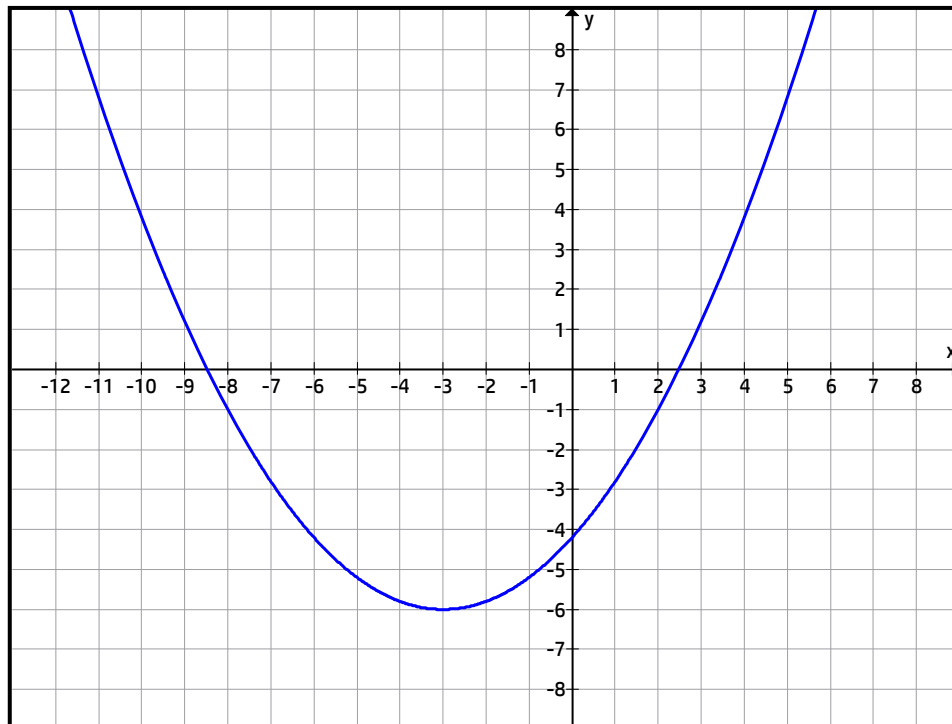
25. Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης, να βρείτε:

α. τις τεταγμένες των σημείων με τετμημένες :

$$-9, -\sqrt{9}, 0, 1, \frac{5}{2} \text{ και } 4$$

β. τις τετμημένες των σημείων με τεταγμένη 4

γ. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης



Εύρεση τύπου



26. Ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι τριπλάσιος από τον παρονομαστή του. Να εκφράσετε τον αριθμητή ως συνάρτηση του παρονομαστή και μετά, αντίστροφα, τον παρονομαστή ως συνάρτηση του αριθμητή. Με τι είναι ίσο το κλάσμα, τελικά;

27. Ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι διπλάσιος από τον παρονομαστή του αυξημένο κατά 4. Να εκφράσετε τον αριθμητή ως συνάρτηση του παρονομαστή και μετά, αντίστροφα, τον παρονομαστή ως συνάρτηση του αριθμητή.

- 28.** Η απόσταση Θεσσαλονίκη - Καβάλα είναι 169 km. Αν ένα αυτοκίνητο κινείται από Καβάλα προς Θεσσαλονίκη με ταχύτητα 70 km/h να γράψετε την απόσταση του αυτοκινήτου από τη Θεσσαλονίκη, ως συνάρτηση του χρόνου t .
-
- 29.** Η απόσταση δύο πόλεων A και B είναι 300 km. Αν ένα αυτοκίνητο κινείται από την πόλη A προς την πόλη B με 80 km/h να γράψετε το χρόνο οδήγησης, ως συνάρτηση της απόστασης από την πόλη B.
-
- 30.** Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E ενός τετραγώνου, ως συνάρτηση της πλευράς του a .
-
- 31.** Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 14 και εμβαδό 12. Να εκφράσετε το μήκος του y ως συνάρτηση του πλάτους x .
-
- 32.** Ένα τραπέζιο έχει τη μεγάλη του βάση διπλάσια της μικρής και ύψος 4 cm. Να εκφράσετε το εμβαδό του τραapeζίου, ως συνάρτηση της μικρής του βάσης.
-
- 33.** Ένα τρίγωνο έχει βάση 3 cm και ύψος 8 cm. Αν η βάση του αυξηθεί κατά x , ενώ το ύψος του παραμένει σταθερό, να εκφράσετε το εμβαδό E του τριγώνου, ως συνάρτηση του x . Να κάνετε το ίδιο και στην περίπτωση που το ύψος μειωθεί, ταυτόχρονα, κατά x .
-
- 34.** Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος 5 και η άλλη x . Να γράψετε το μήκος της υποτείνουσας y , ως συνάρτηση της κάθετης x .
-
- 35.** Για την παρακολούθηση μιας συναυλίας, πληρώνουμε 5 ευρώ για κάθε εισιτήριο και 1,30 ευρώ για κάθε αναψυκτικό. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης, που μας δίνει το ποσό που θα πληρώσει κάθε άτομο στη συναυλία αυτή;

36. Η μέση αύξηση στους μισθούς των δημοσίων υπαλλήλων το έτος 2001 ήταν 3 %. Να εκφράσετε το νέο μισθό y ενός δημοσίου υπαλλήλου (μετά την αύξηση), ως συνάρτηση του παλιού μισθού x (πριν την αύξηση).

37. Ο μισθός ενός υπαλλήλου αυξήθηκε κατά 10 %. Να εκφράσετε τις νέες αποδοχές του ως συνάρτηση των προηγούμενων. Αν οι νέες αποδοχές του είναι 1650 ευρώ να βρείτε τις προηγούμενες.

38. Ένας πωλητής παίρνει μισθό 750 ευρώ το μήνα και 5 % επί των πωλήσεων, που κάνει. Να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές του, έστω y , ως συνάρτηση των πωλήσεων x .

39. Ένα κατάστημα κάνει εκπτώσεις 30 % στις αναγραφόμενες τιμές. Να εκφράσετε το ποσό που θα πληρώσουμε στο ταμείο, για ένα προϊόν, ως συνάρτηση της αναγραφόμενης τιμής.

40. Ένας γεωργός καλλιεργεί 600 m² ενός αγρού εκτάσεως 15 στρεμμάτων, σε μία ώρα.

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν E της επιφάνειας που καλλιεργεί, ως συνάρτηση του χρόνου t .

β. Να βρείτε πόσες ώρες πρέπει να εργαστεί με τον ίδιο ρυθμό ο γεωργός για να τελειώσει τον αγρό αυτό.

41. Τα έσοδα y και τα έξοδα z (σε ευρώ) μιας οικογένειας εκφράζονται συναρτήσει του χρόνου t (σε ημέρες) από τους τύπους:

$$y = 1800 \cdot t + 2400 \quad \text{και} \quad z = 600 \cdot t + 1800$$

α. Να εκφράσετε την αποταμίευση x της οικογένειας, συναρτήσει του χρόνου.

β. Να βρείτε σε πόσο χρόνο η οικογένεια θα έχει αποταμιεύσει 20.000 ευρώ.

Ποσά Ανάλογα



42. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $\frac{x}{5} = \frac{48}{3}$

β. $\frac{48}{30} = \frac{12}{x}$

γ. $\frac{0,7}{6,7} = \frac{x}{134}$

δ. $\frac{3}{4} = \frac{x-2}{12}$

ε. $\frac{-x}{2} = \frac{x+7}{5}$

στ. $\frac{6}{4x-1} = \frac{28}{9x+5}$

ζ. $\frac{x}{4} = \frac{3x+1}{15}$

43. Να εξετάσετε αν οι πίνακες αναφέρονται σε ποσά ανάλογα :

x	1,5	4,5	9
ψ	3	9	18

x	2	4	8
ψ	7	3,5	1,6

44. Να εξετάσετε αν οι πίνακες αντιστοιχούν σε ποσά ανάλογα :

x	2	10	20
ψ	1,5	7,5	14

x	1,5	3	9	27
ψ	90	45	15	5

x	2	8	16	32
ψ	7	14	28	56

45. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες αντιστοιχούν σε ποσά ανάλογα κι αν ναι, να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέγεθος x με το μέγεθος y.

x	0,5	1	2	3	6
ψ	2,5	5	10	15	30

x	27	30	2	21	5
ψ	81	90	6	84	20

x	64	4	128	-0,8	16
ψ	16	1	32	-0,2	4

46. Δίνονται οι πιο κάτω πίνακες τιμών δυο μεταβλητών μεγεθών x και y. Να εξετάσετε εάν τα μεγέθη είναι ανάλογα και στην περίπτωση που είναι, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που τα συνδέει.

x	2	4	10	35	40	66
y	1,6	3,2	8	28	36	52,8

x	0,6	1,5	2,7	3,6	5	123
y	2,16	5,4	9,72	12,96	18	442,8

47. Μια δεξαμενή νερού, σε 2 ώρες δέχεται 150 λίτρα νερό. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της δεξαμενής :

Χρόνος (σε ώρες)			5	12	
Νερό (σε λίτρα)	150	300			1800

48. Αν από 3 κιλά σταφύλια γίνονται 1,2 κιλά κρασί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι με x συμβολίζουμε το βάρος των σταφυλιών και με y το βάρος του παραγομένου κρασιού. Κατόπιν να βρείτε:

- α. τον τύπο που εκφράζει την ποσότητα του κρασιού, ως συνάρτηση εκείνης των σταφυλιών.
- β. τον τύπο που εκφράζει την ποσότητα των σταφυλιών, ως συνάρτηση εκείνης του κρασιού.

x	3		400	0,6		1000
y		2,8			240	

49. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x$ και να βρείτε τη γωνία, που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε επίσης την $y = -x$. Τι γωνία σχηματίζει αυτή με τον οριζόντιο άξονα;

50. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $y = 5x$ σε καθεμία από τις περιπτώσεις :

- α. Αν ο x είναι ακέραιος, από -3 έως και 4 .
- β. Αν ο x είναι πραγματικός, μεγαλύτερος του -2 .
- γ. Αν ο x είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

51. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

α. $y = 5$

β. $y = 0$

γ. $y = -1$

δ. $x = -3$

ε. $x = 0$

στ. $x = 2$

52. α. Μια ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A (4, 7) . Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει την παραπάνω ευθεία για γραφική παράσταση.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απ' τα σημεία O (0, 0) και A (-1, 6) .

53. Μια ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A (x - 3, 4 - 3x) . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, αν γνωρίζουμε ότι η τεταγμένη του σημείου είναι διπλάσια από την τετμημένη.

Ποσά Ανάλογα



54. Μια συνάρτηση με τύπο $y = \alpha \cdot x + \beta$ έχει τον παρακάτω πίνακα τιμών. Να βρείτε για ποια συνάρτηση πρόκειται.

x	2	10	20
ψ	1,5	7,5	14

55. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\lambda + 1)x + 2$ διέρχεται από το σημείο A (1, 4) .

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

β. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών :

x			0		2	3
y	-2	0		4		

- γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση, όταν $-3 < x < 4$.
-
56. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 5$ όταν :
- α. ο x είναι φυσικός αριθμός
 - β. ο x είναι ακέραιος αριθμός
 - γ. ο x είναι πραγματικός αριθμός και $-2 \leq x \leq 2$
-
57. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης : $y = 3 \cdot |x|$
-
58. α. Να εξετάσετε αν τα σημεία $K(2, -50)$ και $\Lambda(-5, 25)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -10x - 25$.
- β. Να εξετάσετε αν τα σημεία $E(2, 6)$ και $\Lambda(-1, -5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 4x - 1$.
-
59. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$. Στη συνέχεια, χωρίς να κατασκευάσετε πίνακα τιμών, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x - 2$.
-
60. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x + 3$:
- α. όταν ο x είναι φυσικός αριθμός
 - β. όταν $-3 \leq x \leq 3$
 - γ. όταν ο x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή
-
61. α. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + 5$ και $y = -2x + 5$. Τι παρατηρείτε;

β. Ομοίως, για τις $y = 2x + 3$ και $y = 2x + 5$. Τι παρατηρείτε;

γ. Ξανά, για τις $y = -3x + 2$ και $y = \frac{1}{3}x + 1$. Τι παρατηρείτε;

δ. Άλλη μία για τις $y = 3x - 5$ και $y = -3x + 5$.

62. α. Ομοίως για τις συναρτήσεις $y = \frac{2}{3}x$ και $y = -\frac{3}{2}x$, αν ο x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός από -6 έως και 6 .

β. Μια από τα ίδια, αν $y = -3x$ και $y = 0,8x$ και x οποιοσδήποτε πραγματικός από -2 έως και 3 .

63. α. Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων xOy να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -200x + 200$, με $-3 \leq x \leq 3$.

β. Να κάνετε το ίδιο για την $y = 0,003x + 0,01$, με $-2 \leq x \leq 2$.

64. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = 1,2 \cdot x + 4$ και $y = \frac{6}{5} \cdot x - 1$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι ευθείες και μάλιστα παράλληλες. Στη συνέχεια να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

65. α. Να βρείτε τα σημεία, στα οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 6$. Στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της συνάρτησης $y = 6x - 12$, με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα. Κατόπιν, να τη σχεδιάσετε για $x_A \leq x \leq x_B$, όπου x_A και x_B οι τετμημένες των σημείων A και B , αντίστοιχα.

66. Να βρείτε τα σημεία, στα οποία τέμνει τους δύο άξονες, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x - 7$. Στη συνέχεια, να τη σχεδιάσετε με τη βοήθεια δύο άλλων, τυχαίων σημείων της και να επαληθεύσετε τα αρχικά συμπεράσματά σας.

67. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + \beta$ διέρχεται από το σημείο M, με συντεταγμένες $(-1, 1)$. Να βρείτε το β και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

68. Μια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή, που περνάει απ' τα σημεία $A(2, -6)$ και $B(0, 8)$. Να βρείτε την εξίσωση της συνάρτησης.

69. α. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $y = 5x$ και $y = -4x + 18$. Αν οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε ένα σημείο A, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού, με δύο τρόπους: πρώτα γραφικά κι έπειτα αλγεβρικά.

β. Να κάνετε το ίδιο για τις συναρτήσεις $y = 2x - 7$ και $y = -x - 1$

γ. Ομοίως για τις $y = 3x - 6$ και $y = -4x + 1$

70. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, με τύπο $y = \lambda x + 10$, διέρχεται από το σημείο $A(-2, 6)$. Να βρείτε τον αριθμό λ .

71. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από τα σημεία A $(0, -5)$ και B $(2, 3)$. Τα σημεία Γ $(1, -1)$ και Δ $(-1, 9)$ βρίσκονται, επίσης, πάνω στην ευθεία αυτή;

72. Δίνεται η συνάρτηση $y = -2x + 4$. Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα Ox στο A και τον Oy στο B, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου OAB.

73. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = 3x + 2$ και $y = -x + 10$. Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι γραφικές τους παραστάσεις.

74. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A $(3, 2)$, B $(8, 8)$ και Γ $(-2, -4)$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

75. α. Δίνονται οι ευθείες $y = -\frac{1}{2}x + 5$ και $y = (-2\lambda + 1)x - 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- β. Ομοίως, για τις $y = (\lambda + 1)x + 5$ και $y = (6\lambda - 13)x + 3$.
- γ. Ομοίως, για τις ευθείες $y = (\lambda^2 - 1)x + 4$ και $y = (\lambda - 1)^2 x + 3$.
-
76. Δίνεται η ευθεία $y = (2\lambda + 1)x - \kappa + 2$. Να βρείτε τους αριθμούς κ , λ , ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στην $y = \lambda x + 2$ και να περνάει απ' το σημείο $(0, 3)$.
-
77. Να γράψετε την ευθεία η οποία διέρχεται απ' το σημείο, στο οποίο η $y = 3x - 1$ τέμνει τον άξονα y' και είναι παράλληλη στην $y = -x$.
-
78. Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση ευθεία παράλληλη στην $y = 2x + 5$ και διέρχεται απ' το σημείο τομής των συναρτήσεων: $y = \frac{3}{2}x - 3$ και $y = -\frac{5}{2}x + 5$
-
79. Έστω η συνάρτηση $y = 2x + 3\beta - 3$. Να βρείτε το β αν γνωρίζετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται απ' το σημείο $K(1, 4)$.

Ποσά Αντιστρόφως Ανάλογα



80. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες αντιστοιχούν σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα:

x	1,5	4,5	9
ψ	3	9	18

x	2	4	8
ψ	7	3,5	1,6

- 81.** Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες αντιστοιχούν σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα :

x	2	10	20
ψ	1,5	7,5	14

x	1,5	3	9	27
ψ	90	45	15	5

x	2	8	16	32
ψ	7	14	28	56

-
- 82.** Να βρείτε ποιες από τις μεταβλητές των παρακάτω πινάκων είναι αντιστρόφως ανάλογες και ποιες όχι :

Μήκος ορθογωνίου (m)	20	30	60	28	40
Πλάτος ορθογωνίου (m)	21	14	7	15	10,5

A	200	100	20	25	80	400	62,5
B	5	10	50	40	12,5	2,5	16

X	40	32	16	6,4	60	12
Ψ	20	25	50	125	13,4	66,6

83. Σε μια κλήρωση του ΛΟΤΤΟ μοιράστηκαν 378.000 ευρώ σε όσους πέτυχαν 6άρι.

α. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης, που δίνει το ποσό y που κερδίζει κάθε τυχερός, σε σχέση με το πλήθος x των τυχερών.

β. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

x		6	7
y	94500		

84. Η μέση ταχύτητα v ενός κινητού και ο χρόνος t , που απαιτείται για να διανύσει μια απόσταση s , είναι ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα; Με την απάντησή σας κατά νου, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

v (σε km/h)	60		90	45		100
t (σε h)		5		8	9	

85. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{8}{x}$ και $y = -\frac{8}{x}$. Έχουν κάποιο κοινό σημείο, οι δύο γραφικές παραστάσεις;

86. Να βρείτε τα σημεία που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x$ και $y = \frac{8}{x}$.

87. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , όταν:

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ διέρχεται από το σημείο $A(1/2, 6)$.

β. Η γραφική παράσταση της $y = \frac{1-2\alpha}{x}$ διέρχεται από το σημείο $A(3,5, 2)$.

88. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{x-2}$ δίνοντας στο x καθεμία απ' τις τιμές $-2, 0, 1, \frac{1}{2}, 3, 4$. Υπάρχει κάποιος αριθμός που δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε;

89. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδό 60 m^2 . Να εκφράσετε το ύψος u του τριγώνου, ως συνάρτηση της βάσης του β . Στη συνέχεια, να κάνετε τη γραφική παράσταση και να υπολογίσετε γραφικά τη βάση ενός τέτοιου τριγώνου, με ύψος 12 m .

Προβλήματα



90. Αν για 3 κιλά πορτοκάλια πληρώνουμε 3,60 ευρώ, να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε για τα 7 κιλά.

91. Με 21 κιλά αλεύρι γίνονται 28 κιλά ψωμί. Πόσο αλεύρι χρειαζόμαστε για να παρασκευάσουμε 360 κιλά ψωμί. Πόσο ψωμί θα παρασκευάζαμε με 12 κιλά αλεύρι;

92. Πέντε βρύσες που έχουν την ίδια παροχή νερού γεμίζουν μια δεξαμενή σε 7 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοιχτούν μόνο οι 2 βρύσες;

93. Να βρείτε τρεις αριθμούς που έχουν άθροισμα 17 και είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $-3, \sqrt{3}$ και $1 - \sqrt{3}$ αντίστοιχα.

94. Να βρείτε δυο αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$ και άθροισμα 140 .

95. Οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 5, 6 και 7 . Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.

96. Σε μια επιχείρηση, έχουν συγκεντρωθεί 19200 ευρώ να μοιραστούν ως μπόνους σε 3 πωλητές αυτοκινήτων, ανάλογα με τα αυτοκίνητα που πούλησαν τη χρονιά που πέρασε. Αν ο ένας πούλησε 12 αυτοκίνητα, ο άλλος 16 και ο τελευταίος 20, να βρείτε πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας.

97. Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή «βάρος θαλασσινού νερού» είναι ανάλογη με τη μεταβλητή «βάρος παραγόμενου αλατιού» και ότι το 3,1 % του βάρους του θαλασσινού νερού είναι αλάτι. Να υπολογίσετε από πόσους τόνους θαλασσινού νερού μπορούμε να πάρουμε 1.426 κιλά αλάτι.

98. Τρεις φίλοι έκαναν μια επιχείρηση και διέθεσαν το ίδιο ποσό. Τα χρήματα το πρώτου έμειναν στην επιχείρηση 8 μήνες, του δεύτερου 10 μήνες και του τρίτου 16 μήνες. Από την επιχείρηση κέρδισαν 34000 ευρώ. Πόσα χρήματα αναλογούν στον καθένα, από το κέρδος αυτό;

99. Δυο συνέταιροι μιας επιχείρησης κέρδισαν 40.000 ευρώ. Αν το κεφάλαιο του πρώτου 32.000 ευρώ και το κέρδος του δεύτερου 24.000 ευρώ, να βρείτε το κέρδος του πρώτου και το κεφάλαιο του δεύτερου.

100. Τρεις έμποροι άρχισαν επιχείρηση με 450.000 ευρώ. Ο Α κατέθεσε 120.000 ευρώ. Μετά τη λήξη της επιχείρησης πήραν για κεφάλαιο και κέρδος μαζί, ο Β 180.000 ευρώ κι ο Γ 216.000 ευρώ. Ποιο ήταν το κεφάλαιο των Β και Γ και ποιο το κέρδος του Α;

101. Μια φωτογραφία δείχνει ένα δέντρο σε σμίκρυνση 1:240 . Αν το ύψος του δέντρου στη φωτογραφία είναι 6 cm, να υπολογίσετε το πραγματικό του ύψος.

102. Σε χάρτη με κλίμακα 1 : 800.000 ένας δρόμος έχει μήκος 32 cm. Να βρείτε το πραγματικό του μήκος.

103. Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1 : 1.500.000 . Να βρείτε την απόσταση δύο πόλεων στο χάρτη, αν η πραγματική τους απόσταση είναι 169 km.

104. Ένα λουλούδι έχει διάμετρο 47 mm. Αν το ζωγραφίσουμε σε μεγέθυνση 3 : 1 να βρείτε τη διάμετρο που θα έχει η ζωγραφιά.

105. Σε μια αεροφωτογραφία τα 20 m απεικονίζονται ως 1 cm. Αν μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα 72 m, να υπολογίσετε τη διάμετρο της πλατείας στην αεροφωτογραφία.

106. Οι διαστάσεις ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 57 και 24 μέτρα, το μήκος και το πλάτος αντίστοιχα. Να βρείτε τις διαστάσεις, με τις οποίες πρέπει να σχεδιαστεί, αν στο σχέδιο το πλάτος είναι 8 εκατοστά.

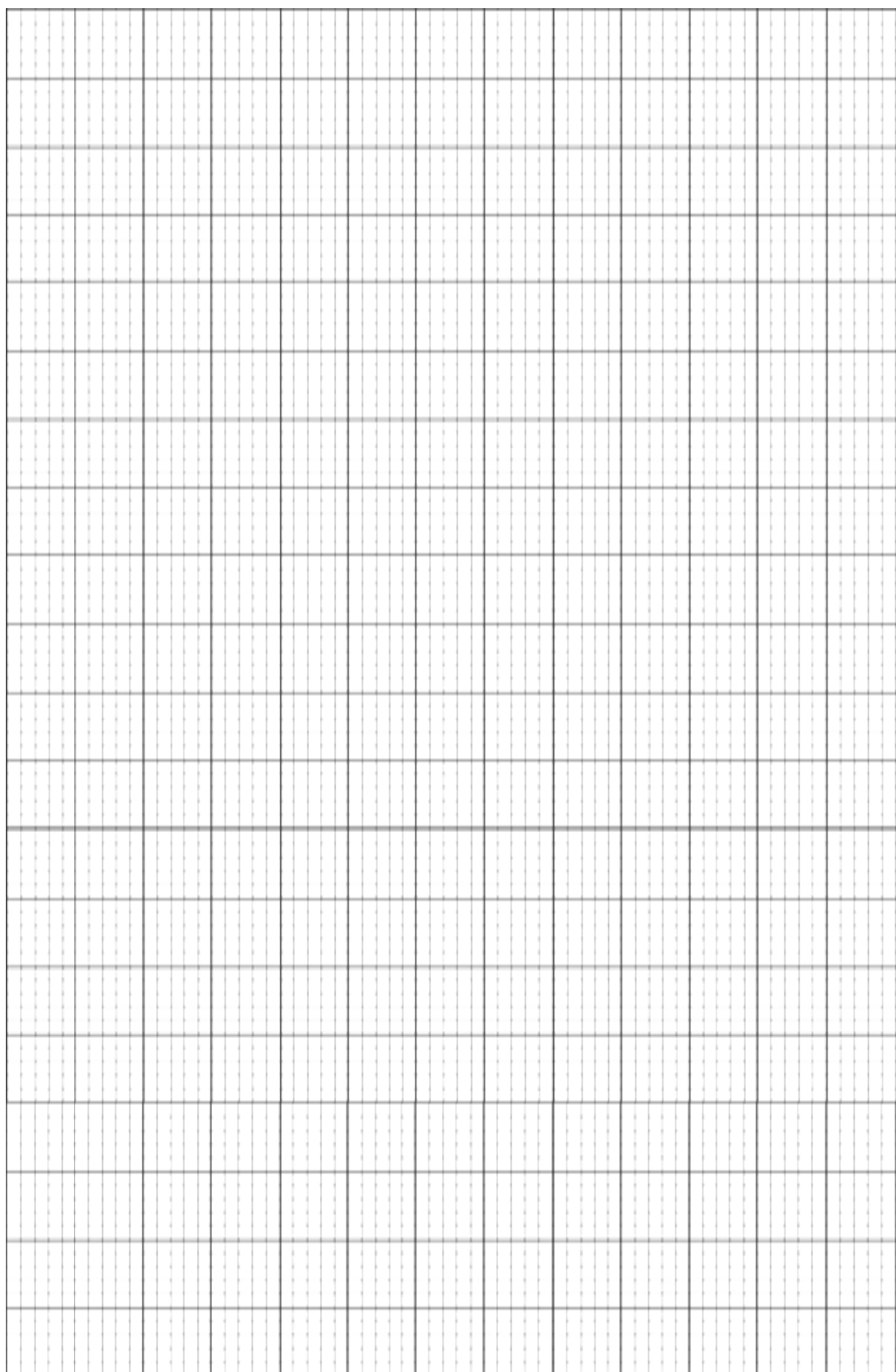
107. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλίμακα	Μήκος σχεδίου	Πραγματικό μήκος
1 : 4	6 cm	
5 : 3		6 cm
7 : 200		40 cm
	8 cm	40 km
	3 dm	9 km

- 108.** Από ένα λιμάνι Α αναχωρούν, την ίδια στιγμή, δυο πλοία με κατεύθυνση το λιμάνι Β. Το ένα έχει ταχύτητα 18 μίλια την ώρα και το άλλο 15 μίλια την ώρα. Αν το ταχύτερο έφτασε στο τέρμα 24 λεπτά νωρίτερα από το άλλο, να βρεθεί η απόσταση των λιμανιών ΑΒ.
-
- 109.** Αν ο Γιώργος ξοδεύει 72 ευρώ την ημέρα, τότε θα μπορέσει να κάνει καλοκαιρινές διακοπές για 20 μέρες. Να υπολογίσετε πόσες ημέρες διακοπών μπορεί να κάνει με τα ίδια χρήματα, αν ξοδεύει 80 ευρώ την ημέρα.
-
- 110.** Ένας επιπλοποιός που εργάζεται 8 ώρες καθημερινά, καταφέρνει να τελειώσει ένα έπιπλο σε 5 μέρες. Σε πόσες μέρες θα το τελειώσει, αν εργάζεται 10 ώρες ημερησίως;
-
- 111.** Ένα έργο ολοκληρώνεται σε 25 ημέρες, αν εργάζονται σε αυτό 24 εργάτες. Αν θέλουμε το έργο να τελειώσει 5 μέρες νωρίτερα, πόσους εργάτες χρειάζεται να προσλάβουμε ή να απαλλάξουμε; Υποθέτουμε ότι όλοι οι εργάτες με την ίδια απόδοση και δεν υπάρχουν σούπερμαν ή κοπρίτες.
-
- 112.** Μια οικογένεια καταναλώνει 200 γραμμάρια λάδι την ημέρα κι έτσι ένα δοχείο της φτάνει για 84 μέρες. Αν κατανάλωνε 300 γραμμάρια τη μέρα, τότε για πόσο διάστημα θ' αρκούσε το ίδιο δοχείο;
-
- 113.** Ένα αυτοκίνητο κινείται σε μια διαδρομή με 95 km/h και φτάνει στον προορισμό του σε 4 ώρες. Στο γυρισμό κάνει την ίδια διαδρομή σε 5 ώρες. Ποια ήταν η ταχύτητά του, κατά την επιστροφή;
-
- 114.** Ένας μηχανικός υπολόγισε ότι 12 εργάτες, που εργάζονται 20 μέρες, εκτελούν τα 200 μέτρα ενός έργου. Ύστερα από 5 ημέρες, απ' την αρχή του έργου, αποχωρούν 2 εργάτες. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν οι υπόλοιποι το έργο, που έχει απομείνει;
-

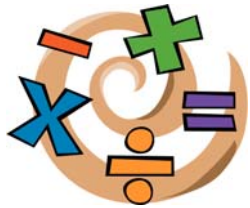
115. Σ' ένα φρούριο βρίσκονται οχυρωμένοι 1000 άντρες, με τροφή για 54 ημέρες. Μετά από 18 μέρες η φρουρά αυξήθηκε κατά 500 άντρες. Πόσες μέρες, συνολικά, διάρκεσε η τροφή;

116. Έχουμε 24 εργάτες με 3 εκσκαφείς (μπουλντόζες), οι οποίοι τελειώνουν ένα έργο σε 14 ημέρες. Σε πόσες μέρες θα τελείωναν το ίδιο έργο 26 εργάτες με 2 εκσκαφείς;



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων & Πυθαγόρειο Θεώρημα

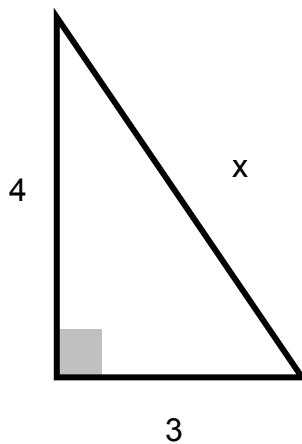


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

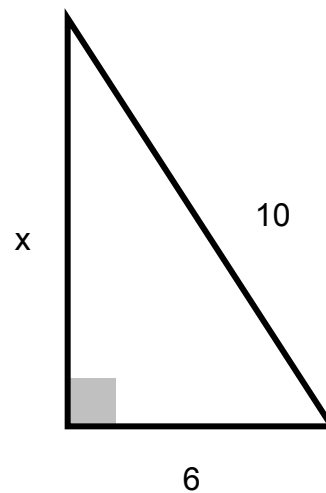
● ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1. Να υπολογίσετε το μήκος x , σε καθένα από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

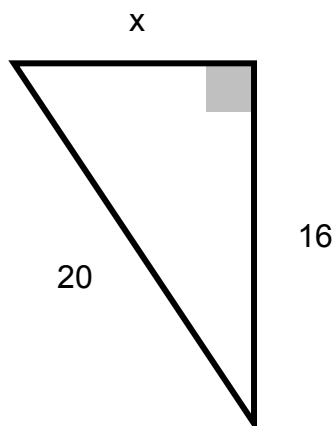
α.



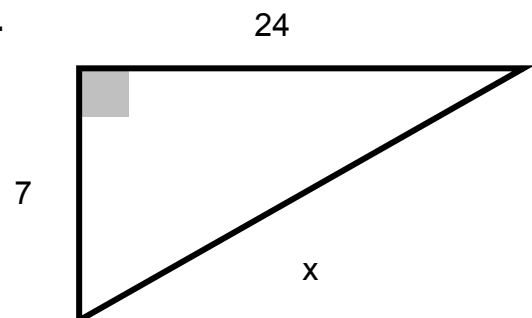
β.



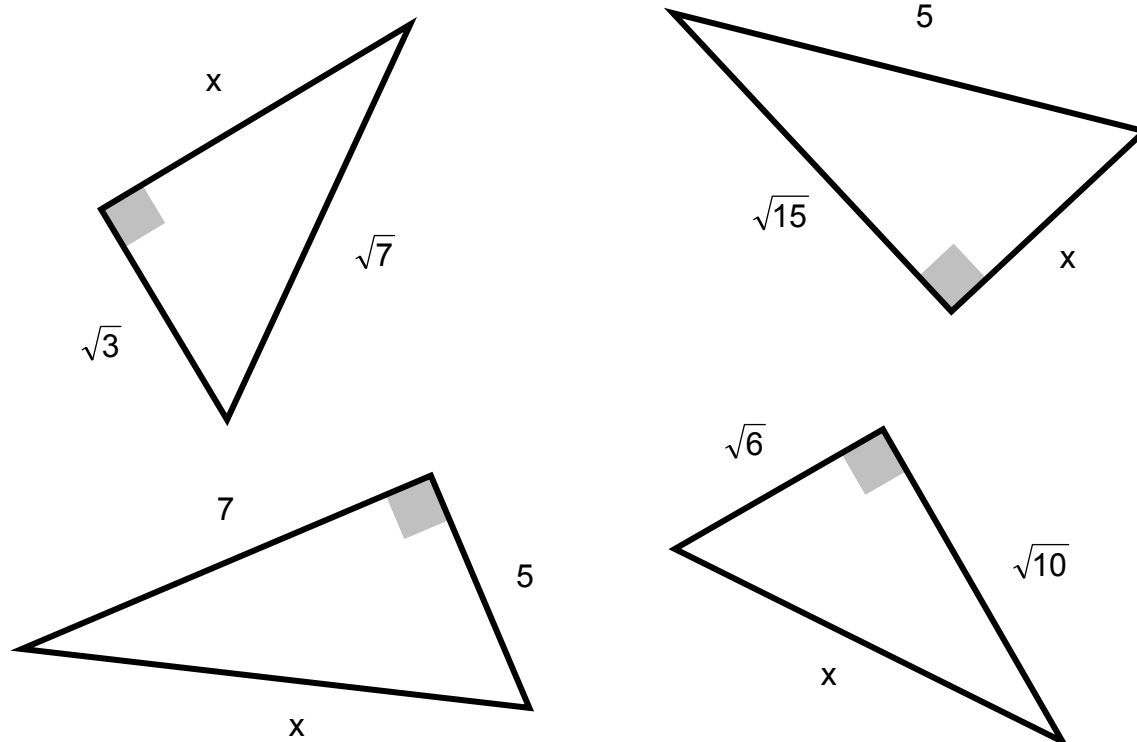
γ.



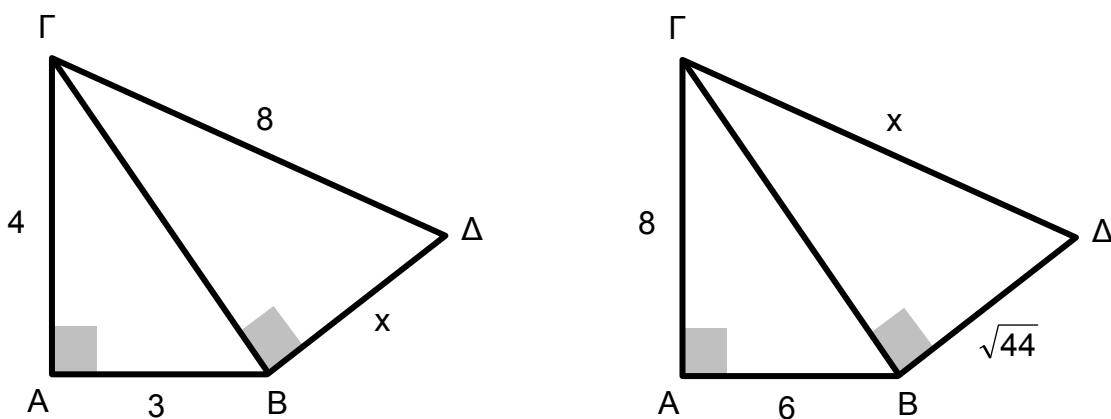
δ.



2. Να υπολογίσετε το μήκος x , σε καθένα από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



3. Να υπολογίσετε την πλευρά x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα:

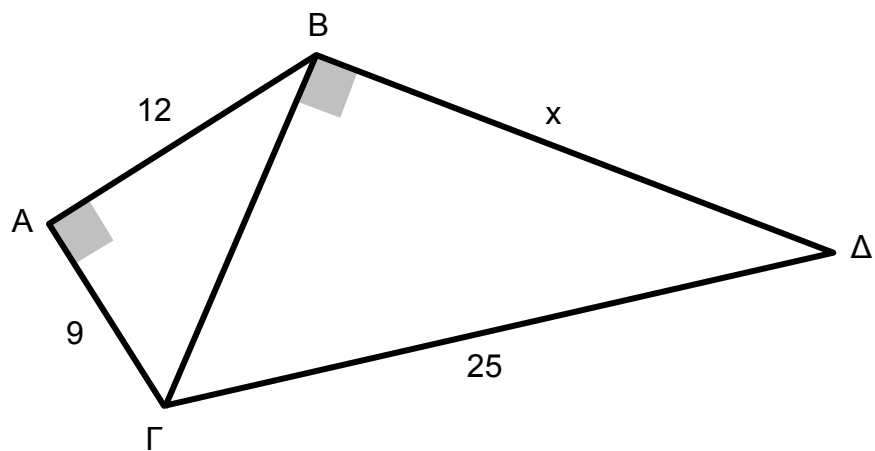


4. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($A=90^\circ$) έχει κάθετες πλευρές $KL = 5$ cm και $KM = 12$ cm. Να φτιάξετε σχήμα, τοποθετώντας τα σωστά γράμματα στις κορυφές του τριγώνου και κατόπιν να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας.

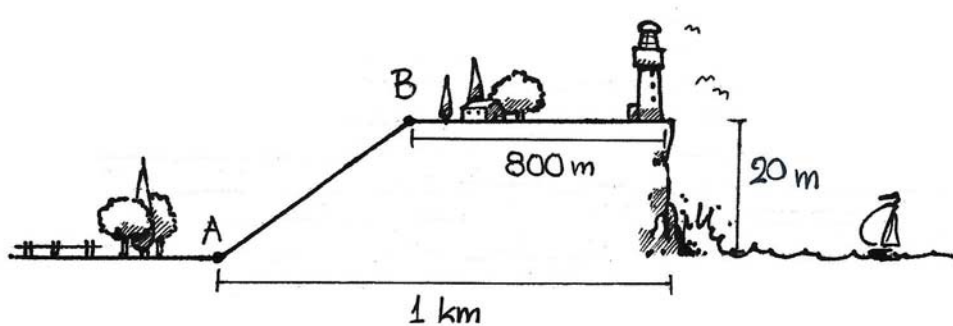
5. Μία πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 20 cm και μια άλλη πλευρά του 16 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της τρίτης πλευράς (Υπόδειξη: Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις).

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB = AG = 13$ και $BΓ = 10$. Να υπολογίσετε το ύψος από την κορυφή A.

7. Να υπολογίσετε την πλευρά x στο παρακάτω σχήμα:



8. Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του δρόμου AB;



● ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ

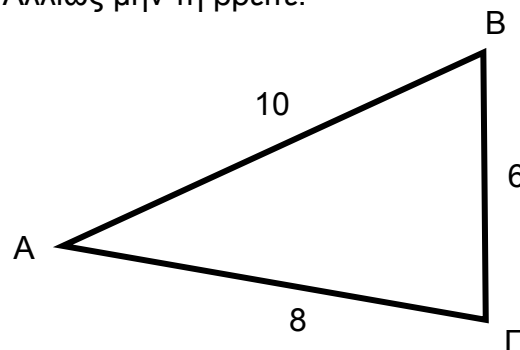
9. Να εξετάσετε εάν είναι ορθογώνια τα εξής τρίγωνα ΑΒΓ με πλευρές:

- α. $\alpha = 25 \text{ cm}$, $\beta = 20 \text{ cm}$, $\gamma = 15 \text{ cm}$
- β. $\alpha = 10 \text{ m}$, $\beta = 12 \text{ m}$, $\gamma = 14 \text{ m}$
- γ. $\alpha = 2,5$, $\beta = 2$, $\gamma = 1,5$
- δ. $\alpha = 3,5 \text{ cm}$, $\beta = 30 \text{ mm}$, $\gamma = 0,045 \text{ m}$

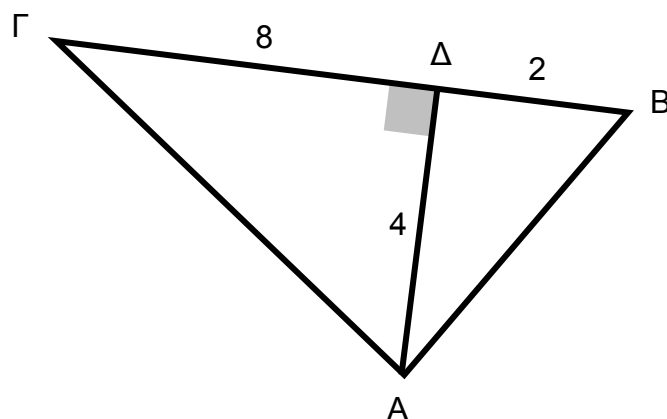
10. Να εξετάσετε εάν είναι ορθογώνια τα εξής τρίγωνα ΑΒΓ με πλευρές:

- α. $AB = 1$, $B\Gamma = \sqrt{2}$, $\Gamma A = \sqrt{3}$
- β. $AB = 7$, $B\Gamma = 8$, $\Gamma A = \sqrt{15}$
- γ. $AB = \sqrt{5}$, $A\Gamma = \sqrt{6}$, $B\Gamma = \sqrt{11}$
- δ. $AB = \sqrt{10}$, $A\Gamma = \sqrt{12}$, $B\Gamma = \sqrt{23}$

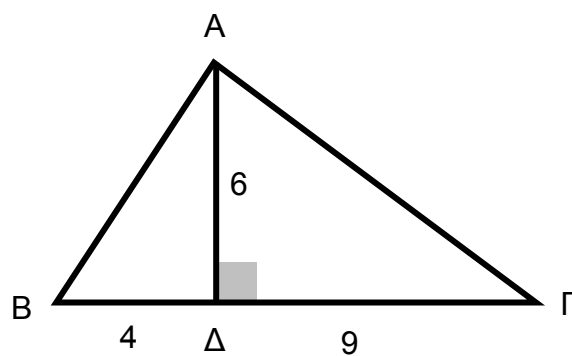
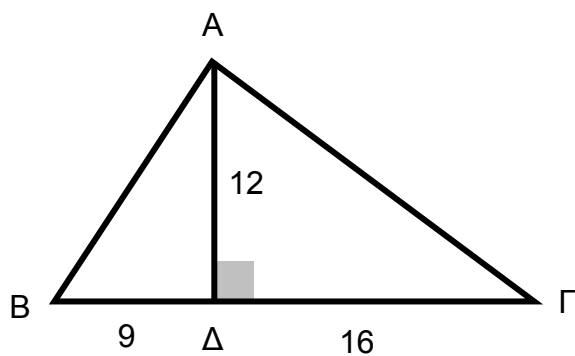
11. Να εξετάσετε αν το παρακάτω τρίγωνο είναι ορθογώνιο και αν είναι να βρείτε την ορθή γωνία. Αλλιώς μην τη βρείτε.



12. Να εξετάσετε αν το παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Αν δεν είναι δεν πειράζει.



13. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$, σε κάθε περίπτωση, είναι ορθογώνιο:



● ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΙ & ΕΜΒΑΔΑ

14. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = B\Gamma = 0,5 \text{ cm}$. Αν το ύψος, που φέρνουμε από την κορυφή A είναι $0,4 \text{ cm}$ να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

15. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6 cm και 5 cm . Να βρεθεί η περίμετρος του.

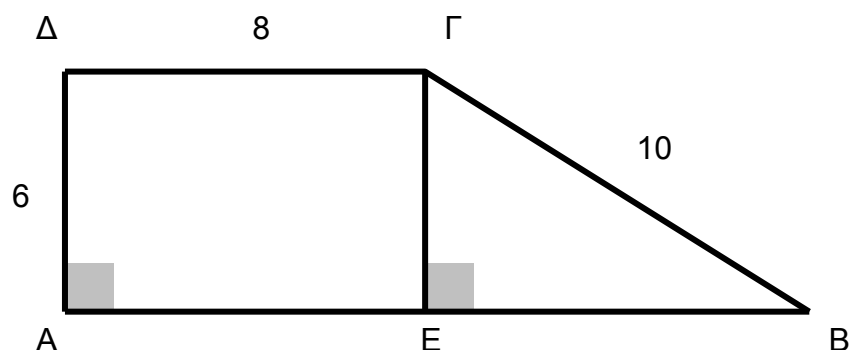
16. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα είναι 6 cm και η μία κάθετη πλευρά του είναι τριπλάσια της άλλης. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.

17. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στη γωνία $\hat{A}$ έχει κάθετες πλευρές με μήκη $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 8 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που σχηματίζεται με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$.

18. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου, που έχει πλευρά τη διαγώνιο ενός άλλου τετραγώνου με πλευρά 5 cm .

19. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου, που σχηματίζεται με πλευρά το ύψος ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 6 cm .

20. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$, του παρακάτω σχήματος:



21. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση 8 cm και περίμετρο 18 cm . Να βρεθεί το ύψος του και το εμβαδόν του.

22. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = A\Gamma = 18,5 \text{ cm}$ και περίμετρο 51 cm . Να βρεθεί το εμβαδόν του.

23. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = A\Gamma = 0,5 \text{ m}$ και το ύψος του AD είναι 4 dm . Να υπολογιστεί η περίμετρος του τριγώνου και το εμβαδόν του.

24. Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 13 cm και η μία διάστασή του είναι 5 cm . Να βρεθεί η άλλη διάσταση και το εμβαδόν του.

25. Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει μήκος $6,1 \text{ cm}$ και η βάση του 6 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

26. Σε ισόπλευρο τρίγωνο, να βρείτε:

- α. το ύψος και το εμβαδόν του, αν το μήκος της πλευράς του είναι 4 cm .
- β. την πλευρά και το εμβαδόν, αν το ύψος του είναι 7 cm .

27. Σε ισόπλευρο τρίγωνο, να βρείτε:

- α. το ύψος και το εμβαδόν του, αν το μήκος της πλευράς του είναι 5 cm .
- β. την πλευρά και το εμβαδόν, αν το ύψος του είναι 6 cm .

28. Σε ισόπλευρο τρίγωνο, το ύψος είναι $3\sqrt{3} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του και το εμβαδό του.

29. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 17 \text{ cm}$ και η μία κάθετη πλευρά του είναι 8 cm . Να βρείτε το εμβαδόν του.

30. Αν ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο έχει:

- α. υποτείνουσα 16 cm , να βρείτε το εμβαδόν του.

β. κάθετη πλευρά 6 cm, να βρείτε την υποτείνουσα και το εμβαδόν του.

31. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ορθές. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του αν:

α. $AB = 8$ cm, $B\Gamma = 13$ cm και $\Delta\Gamma = 20$ cm.

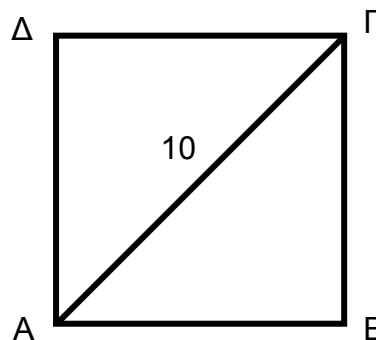
β. $\Delta\Gamma = 6$ cm, $A\Delta = 8$ cm και $B\Gamma = 10$ cm.

32. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο με μήκος βάσης 16 και περίμετρο 36. Να βρεθούν:

α. το εμβαδό και

β. όλα τα ύψη του

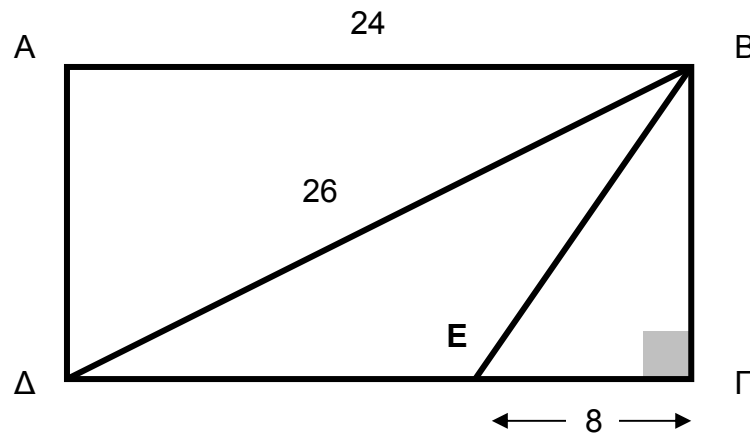
33. Να υπολογίσετε την πλευρά και το εμβαδόν στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος:



34. Σε ισοσκελές τραπέζιο, η μικρή του βάση είναι 50 cm, κάθε μία από τις μη παράλληλες πλευρές του είναι 10 cm και το ύψος του είναι 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

35. Το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 9,4$ cm και η διαγώνιός του $B\Delta$ είναι ίση με 12,3 cm. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.

36. Στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε την EB και το εμβαδόν του τριγώνου ΔBE .

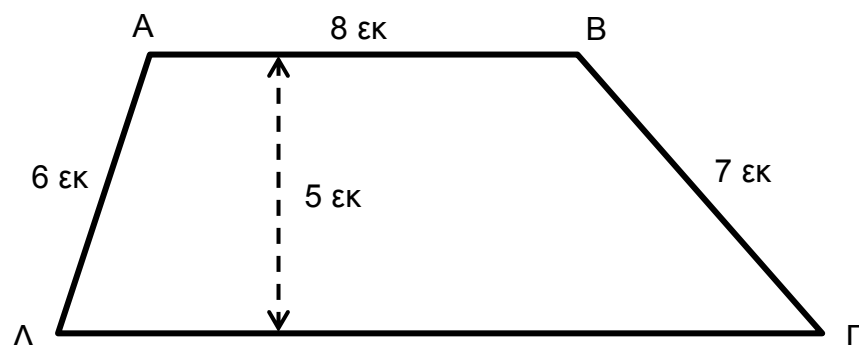


37. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει εμβαδό 30 cm^2 και η μία κάθετη πλευρά του είναι 12 cm . Να υπολογίσετε τις άλλες δύο πλευρές του.

38. Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 11 και μια κάθετη πλευρά ίση με 7 . Να βρείτε το εμβαδόν του.

39. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι γωνίες A και Δ είναι ορθές. Αν $AB = 8$, $B\Gamma = 13$, $\Delta\Gamma = 20$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου.

40. Να υπολογιστεί το εμβαδό και η περίμετρος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$):



● ΔΙΑΦΟΡΕΣ / ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

41. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις 36 cm και 27 cm. Να υπολογίσετε τη διαγώνιό του.

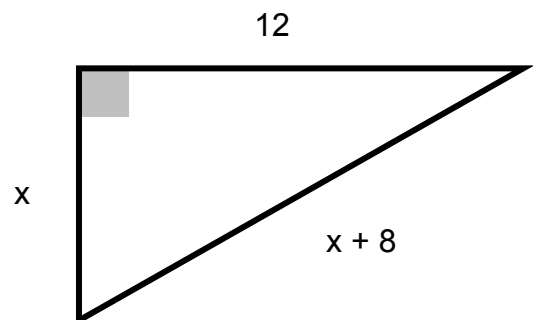
42. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ, ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) αν:

- α. ΑΒ = ΑΓ = 10 cm και ΒΓ = 16 cm.
- β. ΑΒ = 10 cm και ΒΓ = 12 cm.
- γ. ΑΓ = 13 cm και ΒΓ = 10 cm.

43. Σε τετράγωνο να υπολογίσετε :

- α. τη διαγώνιο αν το μήκος της πλευράς του είναι 4 cm.
- β. την πλευρά του αν το μήκος της διαγωνίου είναι 11 cm.
- γ. την πλευρά του αν το μήκος της διαγωνίου είναι $3\sqrt{2}$ cm.

44. Στο διπλανό τρίγωνο, να υπολογίσετε το x.



45. Η βάση ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι τα $\frac{4}{3}$ του ύψος του και η περίμετρός του 70 cm. Να βρεθούν:

- α. οι πλευρές του
- β. το εμβαδόν του και
- γ. η διαγώνιός του.

46. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ΑΓ = 15 cm. Αν η υποτείνουσα ΒΓ είναι 5 cm μεγαλύτερη την πλευράς του ΑΒ, τότε να υπολογίσετε τις πλευρές και το εμβαδόν του τριγώνου.

47. Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 6 cm και η μία κάθετη πλευρά του είναι διπλάσια της άλλης. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

48. Σε ισοσκελές τρίγωνο, κάθε μία από τις ίσες πλευρές του είναι 3 cm μεγαλύτερη από τη βάση. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 36 cm να υπολογίσετε:
- α. την πλευρά του.
 - β. το ύψος του και
 - γ. το εμβαδό του τριγώνου.

49. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG = 6,5$ cm και $BΓ = 5$ cm.
- α. Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ.
 - β. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου.
 - γ. Με τη βοήθεια του εμβαδού, να υπολογίσετε και τα άλλα ύψη του τριγώνου.

50. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6 και 8 cm.
- α. Να υπολογίσετε τη μήκος της υποτείνουσας.
 - β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.
 - γ. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους, προς την υποτείνουσα.
 - δ. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων, στα οποία χωρίζεται η υποτείνουσα από το αντίστοιχο ύψος.

51. Φτιάξτε ένα τετράπλευρο ABΓΔ με κάθετες τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ. Να δείξετε ότι:
- $$A\Delta^2 + B\Gamma^2 = AB^2 + \Delta\Gamma^2$$

52. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευρά α, να δείξετε ότι : $u^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$

53. Έστω ABΓ ορθογώνιο τρίγωνο, όπου $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > AG$. Να δείξετε ότι :
- $$AB^2 - AG^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$$

54. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 40$ cm και κάθετη πλευρά $AB = 32$ cm. Να βρεθεί το ύψος AK , που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

55. Σ' ένα ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ κι επιπλέον $AB = 60$ cm, $\Gamma\Delta = 40$ cm και $A\Delta = 48$ cm. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

56. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με ορθή γωνία την A , δίνονται τα μήκη των πλευρών $AB = x$, $A\Gamma = 8$ και $B\Gamma = x + 4$. Να υπολογίσετε τον αριθμό x .

● Π.Θ. & ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

57. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A, B, αν:

- α. A (0, 2) και B (4, 5)
- β. A (3, 4) και B (1, 7)
- γ. A (0, 2) και B (4, 6)

58. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A (2, 4) , B (5, 1) και Γ (5, 7) είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

59. Σε ένα σύστημα αξόνων, παίρνουμε τα σημεία A (-5, -2) , B (5, -2) , Γ (5, 2) και Δ (-5, 2). Να βρείτε τι είδος τετράπλευρου είναι το ΑΒΓΔ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

60. Να βρείτε την απόσταση του σημείου M (-6, 8) :

- α. από τον άξονα x'x
- β. από τον άξονα y'y
- γ. από την αρχή των αξόνων.

61. Σε ένα σύστημα αξόνων, να πάρετε τα σημεία A (0, 3) , B (-3, 2) και Γ (4, -2) και να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τι είδος τριγώνου είναι το ΑΒΓ;

62. Σ' ένα σύστημα αξόνων (ορθοκανονικό, κατά προτίμηση) να σημειώσετε τα σημεία A (-1, 2) , B (-1 , 4) και Γ (4, 2).

- α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

63. Σε ένα σύστημα αξόνων, να πάρετε τα σημεία A (1, 5) , B (-2, 1) και Γ (4, 1).

- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
- β. Να υπολογίσετε την περιμέτρό του.
- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

64. Σε ένα σύστημα αξόνων, να πάρετε τα σημεία $A(8, 1)$, $B(0, 7)$ και $\Gamma(0, -5)$.
- α. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$.
 - β. Τι είδος τριγώνου είναι το $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε.
 - γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

65. Σε ένα σύστημα αξόνων, να πάρετε τα σημεία $A(-2, -\frac{3}{2})$ και $B(-2, \sqrt{5})$. Να υπολογίσετε:
- α. Το μήκος του τμήματος AB .
 - β. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B από τους άξονες.
 - γ. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B από την αρχή των αξόνων.

66. Σε ένα σύστημα αξόνων, να σημειώσετε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, -1)$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

67. Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(4, 1)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, να βρείτε το εμβαδό και την περίμετρό του.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρία

Λόγος Ευθύγραμμων Τμημάτων



1. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = 2$, να υπολογίσετε τους λόγους: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

2. Ο λόγος του ύψους α του Γιώργου προς το ύψος β του παιδιού του είναι 3. Να αποδείξετε ότι :

α. $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$

β. $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{4}$

3. Σε ένα ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά 6 cm και ύψος $A\Delta$, να υπολογίσετε τους λόγους :

$$\frac{AB}{B\Gamma}, \frac{A\Delta}{B\Gamma}, \frac{A\Gamma}{B\Delta}, \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$$

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 10$ cm και ύψος $BH = 6$ cm, να υπολογίσετε τους λόγους :

$$\frac{AB}{A\Gamma}, \frac{AB}{AH}, \frac{AH}{HG}, \frac{B\Gamma}{BH}$$

5. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = 130$ m και ύψος $A\Delta = 126$ m. Να υπολογίσετε το λόγο : $B\Gamma/AB$

6. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με περίμετρο 36 μέτρα και εμβαδό 80 τετραγωνικά μέτρα, να υπολογίσετε το λόγο του μήκους, προς το πλάτος.

7. Να βρεθούν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι ο λόγος δύο πλευρών του είναι 2 και η περίμετρός του είναι 60 cm.

8. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = 9 m και ΑΔ = 40 m . Να υπολογίσετε τους λόγους :

$$\frac{AB}{AD}, \frac{AD}{AB}, \frac{AB + BG + GD + DA}{AD}, \frac{BG - AB}{AB}, \frac{AB}{AG}$$

9. Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος α προς ένα ευθύγραμμο τμήμα β είναι ίσος με 1,75 . Να υπολογίσετε :

α. το λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$ και

β. ποιο μέρος του α είναι το ευθύγραμμο τμήμα β .

10. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\lambda}{\mu}$ δύο ευθύγραμμων τμημάτων λ και μ , χρησιμοποιώντας τα παρακάτω δεδομένα :

α. $\lambda = 0,4 \cdot \mu$

β. $\mu = 5\lambda$

γ. $\lambda = \frac{2}{7}\mu$

11. Αν α, β, γ και δ είναι ευθύγραμμα τμήματα τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = 2$, $\frac{\beta}{\gamma} = 3$,

$\frac{\gamma}{\delta} = 4$, να υπολογίσετε τους λόγους : $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\alpha}$

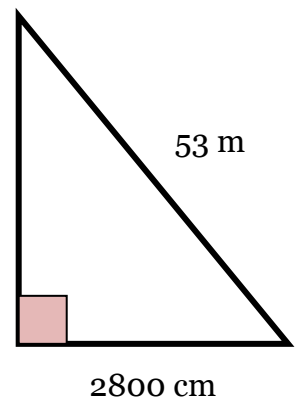
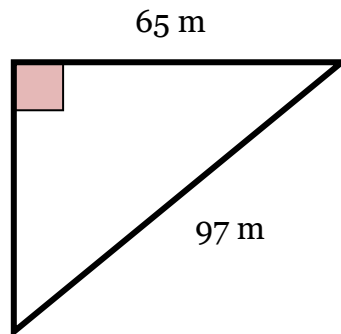
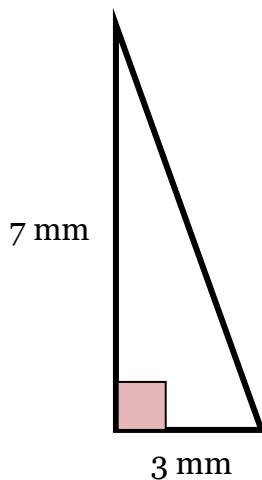
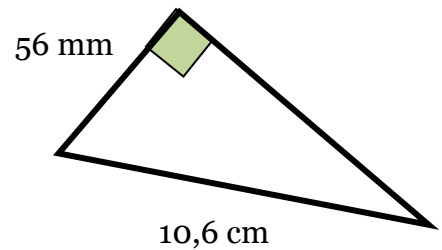
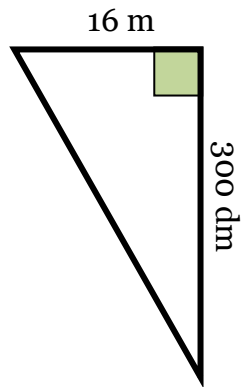
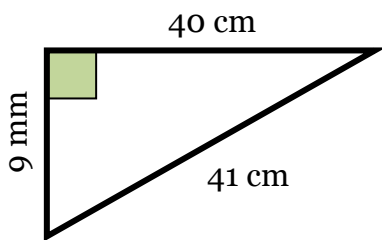
12. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος α προς ένα άλλο τμήμα β είναι $\frac{2}{9}$, να υπολογίσετε τους λόγους : $\frac{2\beta}{9\alpha}$, $\frac{2\beta}{27\alpha}$

13. Αν για τα ευθύγραμμα τμήματα α, β ισχύει $\frac{\beta}{\alpha} > 2$, τότε να εξετάσετε αν ισχύει: $\alpha < \beta$
-

Εύρεση Τριγωνομετρικών Αριθμών



14. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



15. Να κατασκευάσετε γωνία ω τέτοια, ώστε:

α. $\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{5}$

β. $\varepsilon\phi\omega = 1,5$

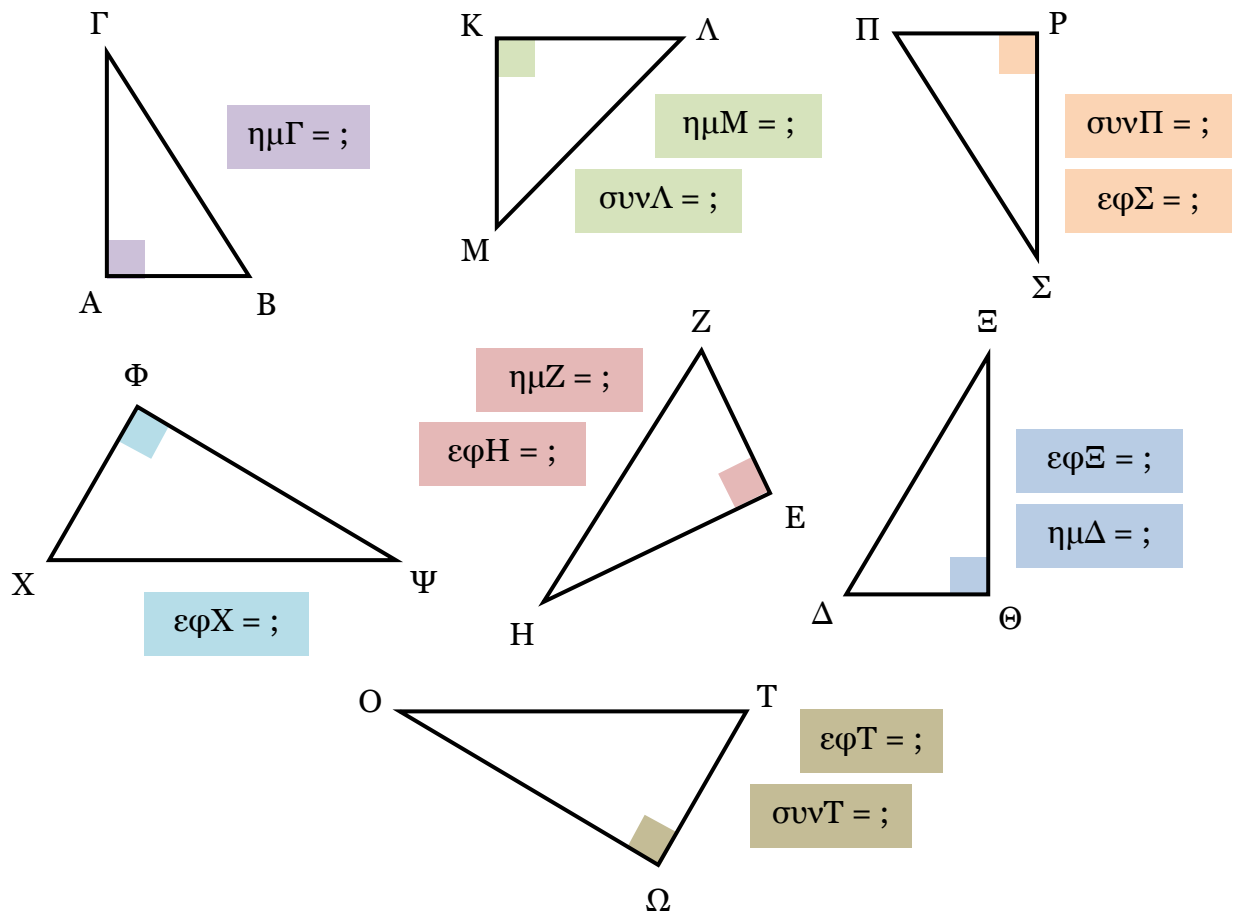
γ. $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$

δ. $\eta\mu\omega = 0,5$

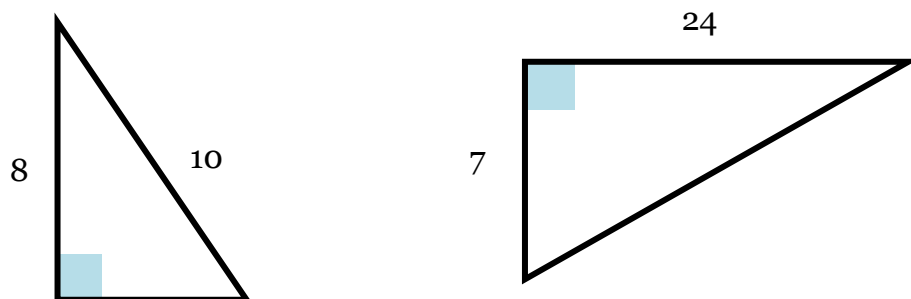
ε. $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$

στ. $\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu\omega$

16. Στα παρακάτω τρίγωνα να εφαρμόσετε τους ορισμούς, για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που σας ζητούνται :



17. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα :

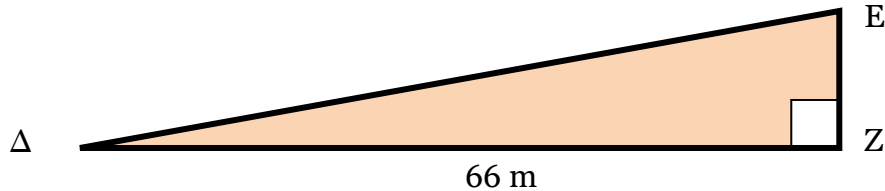


18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ τέτοιες, ώστε η AB να είναι διπλάσια της $A\Gamma$, δηλαδή $AB = 2A\Gamma$. Να βρείτε τις εφαπτομένες των γωνιών B και Γ .

Εύρεση Πλευρών & Γωνιών



19. Αν η κλίση του παρακάτω δρόμου ΔΕ είναι 28% , να υπολογίσετε πόσα μέτρα ψηλότερα βρίσκεται το σημείο Ε απ' το σημείο Ζ .



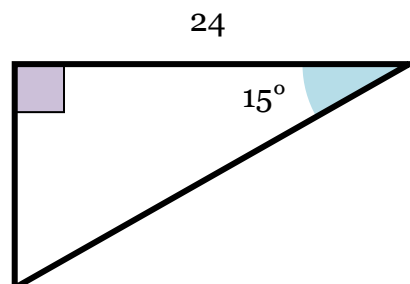
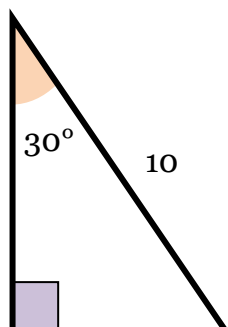
20. Η κλίση ενός ανηφορικού δρόμου, προς την κορυφή ενός λόφου, είναι 20%. Αν το ύψος του λόφου είναι 800 m , μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του δρόμου. Υποθέτουμε ότι ο δρόμος δεν έχει στροφές, άσε που μπορεί και να ζαλιστούμε.

21. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB = 6 \text{ m}$ και $\epsilon\phi\Gamma = 0,64$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ .

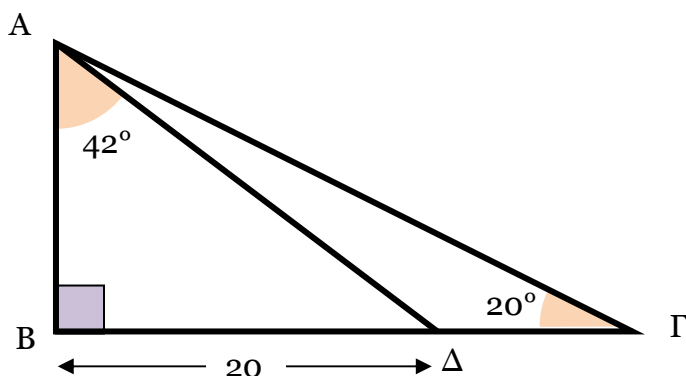
22. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB = 0,25 \text{ ΑΓ}$. Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi\text{B}$ και την $\epsilon\phi\Gamma$.

23. Σε ένα τόπο οι ακτίνες του ήλιου, κάποια στιγμή, έχουν κλίση 90%. Αν τη στιγμή αυτή η σκιά ενός δέντρου είναι 5 m να βρείτε το ύψος του δέντρου.

24. Να υπολογίσετε όλες τις πλευρές, στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



25. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ .



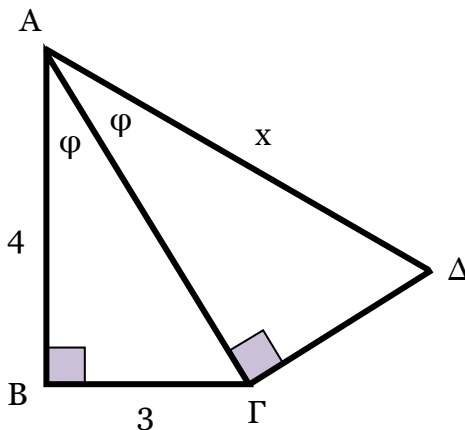
26. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 11 \text{ cm}$ και $\hat{B} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

27. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\hat{B} = 55^\circ$. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του.

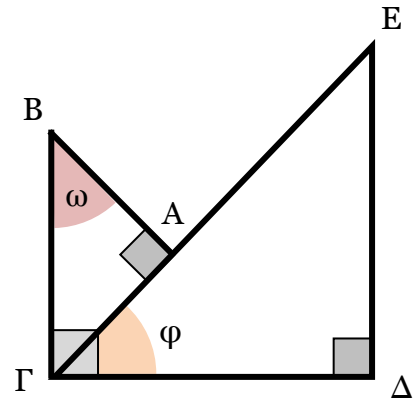
28. Οι κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 7 cm και 10 cm αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του.

29. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Αν το ύψος του $A\Delta$ ισούται με 5 cm , να υπολογίσετε τις γωνίες του $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και τις πλευρές του $A\Gamma$ και $B\Gamma$.

30. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογιστεί η πλευρά x :



- 31.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\Gamma\Delta = 8$, $\Delta E = 6$, $AE = 7$ και $AB = 4$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ω και φ είναι ίσες.



Περίμετροι & Εμβαδά



- 32.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται ότι $\text{syn}\Gamma = \frac{7}{25}$ και $A\Gamma = 14$ m. Να υπολογίσετε :
- α.** το ημίτονο της γωνίας Γ και
 - β.** το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 33.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, δίνεται ότι $\eta\mu B = 0,8$ και $B\Gamma = 20$ m. Να υπολογίσετε :
- α.** το συνημίτονο της γωνίας B και
 - β.** το εμβαδόν του τριγώνου.
- 34.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $\epsilon\varphi B = \frac{3}{4}$ και $a = 15$. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές και το εμβαδό του τριγώνου.
- 35.** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 150^\circ$, $A\Delta = 10$ και $AB = 20$. Να βρείτε το ύψος AE και το εμβαδόν του.

- 36.** Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = A\Gamma = 15 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

- 37.** Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος $AD = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

- 38.** Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $A\Gamma = 10$, $B\Gamma = 15$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να βρείτε :

- α.** την πλευρά AB ,
- β.** το ύψος AD και
- γ.** το εμβαδόν του.

- 39.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $B\Gamma = 15 \text{ cm}$ και $AB = 9 \text{ cm}$. Να βρείτε :

- α.** τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών B και Γ ,
- β.** το εμβαδό του τριγώνου,
- γ.** την περίμετρο του τριγώνου.

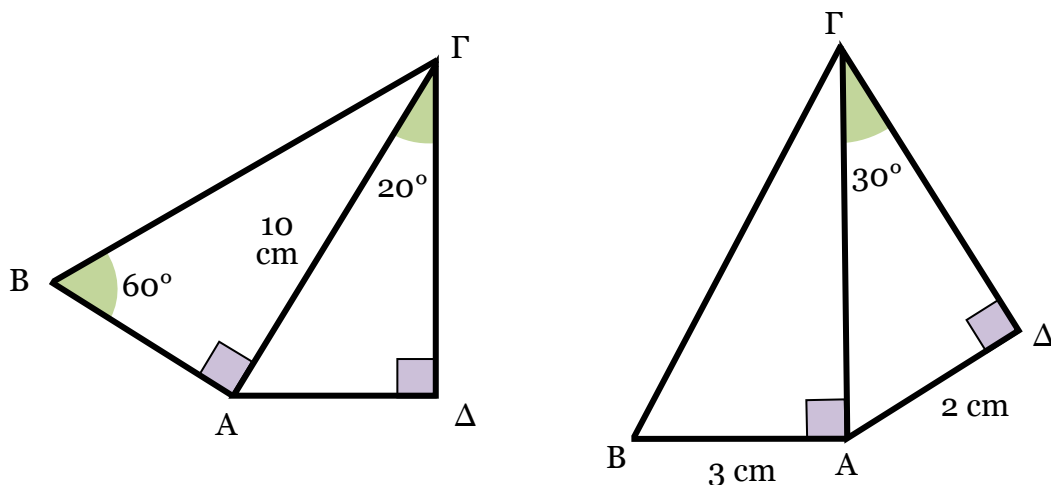
- 40.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $B\Gamma = 10 \text{ cm}$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Να βρείτε :

- α.** τη γωνία Γ ,
- β.** το μήκος των πλευρών AB και $A\Gamma$,
- γ.** το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου.

- 41.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $A\Gamma = 12 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Να βρείτε :

- α.** τη γωνία B ,
- β.** το μήκος των πλευρών AB και $B\Gamma$,
- γ.** το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου.

- 42.** Στα παρακάτω σχήματα, να υπολογίσετε το εμβαδό και την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.



- 43.** Για ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ, γνωρίζουμε ότι $AB = 5 \text{ cm}$, $BD = 3 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να βρείτε :

- α.** τις πλευρές του ΑΓ και ΒΓ ,
- β.** το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ,
- γ.** την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ .

- 44.** Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $AB = 5$, $AG = 9$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

- 45.** Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει $AB = 20$, $ΓΔ = 6$ και $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

- 46.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 43^\circ$, $\hat{B} = 62^\circ$ και $AB = 12$. Να βρεθούν οι πλευρές ΑΓ, ΒΓ και το εμβαδόν του.

- 47.** Σε παράλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 150^\circ$, $AD = 10$ και $AB = 20$. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ και το εμβαδό του παραλληλόγραμμου.

48. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = B\Gamma = 8 \text{ cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$ και εμβαδόν $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε την πλευρά AB και τα ύψη του παραλληλογράμμου.
-

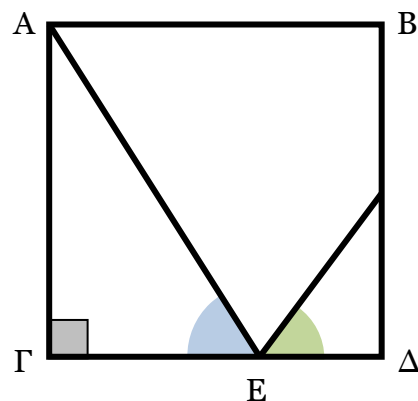
49. Το ύψος ενός τραπεζίου είναι 18 cm , η μικρή βάση του 70 cm και οι μη παράλληλες πλευρές 40 cm και 85 cm . Να υπολογισθούν οι γωνίες και το εμβαδόν του τραπεζίου.
-

50. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνεται κάθετα, ενώ η $A\Gamma$ διχοτομεί τη $B\Delta$. Αν είναι $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$ και $AB = 8 \text{ cm}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν και η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$.
-

51. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) για το οποίο ισχύει $A\Gamma = 30$ και $\eta\mu B = 0,309$. Να βρεθεί το εμβαδόν του.
-

52. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $A\Delta = 10 \text{ cm}$. Να βρεθούν τα άλλα ύψη του τριγώνου και το εμβαδόν του.
-

53. Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με $AB = 15 \text{ cm}$. Αν $\epsilon\phi(\hat{A\epsilon\Delta}) = 1,6$ και $\epsilon\phi(\hat{Z\epsilon\Gamma}) = 1,5$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του $ABZE$.



54. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαγώνιο $A\Gamma$ ίση με $4,5 \text{ m}$ και γωνία $B\hat{A}\Gamma$ ίση με 30° . Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.
-

55. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ΑΒ = 10 m , περίμετρο 28 m και γωνία Δ ίση με 45° . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

56. Τραπεζίο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ έχει μήκη πλευρών ΑΒ = 2 m , ΑΔ = 3 m και γωνίες $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{\Delta} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

30° , 45° και 60°



57. Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει η παράσταση : $\eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ - 5 \eta\mu^2 30^\circ$

58. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$\epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ \cdot (\eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

59. Να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις παρακάτω παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ :

$$Α = \eta\mu 60^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ - \epsilon\phi 60^\circ$$

$$Β = \eta\mu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$$

$$\Gamma = \eta\mu^2 30^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ$$

$$\Delta = \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ - \epsilon\phi 45^\circ$$

$$Ε = \epsilon\phi^2 60^\circ - \epsilon\phi^2 30^\circ$$

$$Ζ = (\epsilon\phi^2 60^\circ + \epsilon\phi^2 30^\circ)^{-1}$$

Σχέσεις Τριγωνομετρικών Αριθμών



60. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και πλευρές $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\text{συν}^2 B + \text{συν}^2 \Gamma = 1$

β. $\text{συν} B = \eta\mu\Gamma$

γ. $\epsilon\varphi B = \frac{\eta\mu B}{\text{συν} B}$

61. Να αποδείξετε ότι σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει ότι :

$$\eta\mu B \cdot \text{συν} B = \frac{\epsilon\varphi B}{1 + \epsilon\varphi^2 B}$$

62. Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει η σχέση :

$$\frac{\eta\mu\Gamma + \text{συν} B}{\text{συν}\Gamma + \eta\mu B} = \epsilon\varphi\Gamma$$

63. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 8$ και $B\Gamma = 10$. Να υπολογίσετε:

α. την $A\Gamma$

β. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B

γ. την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\eta\mu B - 2\text{συν} B}{\epsilon\varphi B}$$

64. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\beta < \gamma < \alpha$, να αποδείξετε ότι :

$$0 < \frac{\epsilon\varphi^2 B}{1 + \epsilon\varphi^2 \Gamma} < 1$$

65. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με τη γωνία A οξεία, και να φέρετε το ύψος του BE . Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι:

α. $BE = AB \cdot \eta\mu A$

β. $E = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A$

66. Αν E είναι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και α το μήκος της υποτεινουσάς του, να αποδείξετε ότι:

$$\epsilon\phi B + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\alpha^2}{2E}$$

Διάφορες



67. Ένας κύκλος κέντρου O έχει διάμετρο 32 cm . Να βρεθεί το μήκος της χορδής AB του κύκλου, αν η γωνία $A\hat{O}B$ ισούται με 80° .

68. Σε έναν κύκλο ($K, 12\text{ cm}$), γράφουμε μια χορδή $AB = 16\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τη γωνία AKB .

69. Δίνεται κύκλος ($O, 2\text{ cm}$) και διάμετρος $B\Gamma$ αυτού. Θεωρούμε σημείο A του κύκλου, τέτοιο ώστε $A\hat{B}\Gamma = 25^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $A\hat{O}\Gamma = 50^\circ$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				