

# Άλγεβρα Α' Λυκείου

## Επανάληψη θεωρίας για τις εξετάσεις

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

#### §Ε.2 Σύνολα

1 Τι ονομάζεται σύνολο;

##### Απάντηση

**Σύνολο** ονομάζεται κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανοήσή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

---

2 Με ποιους τρόπους μπορούμε να παραστήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου;

##### Απάντηση

Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του συνόλου και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Αυτός ο τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

Αν από ένα σύνολο  $\Omega$  επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα  $I$ , τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των  $x \in \Omega$ , όπου  $x$  έχει την ιδιότητα  $I$ ». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

---

3 Πότε δυο σύνολα λέγονται ίσα;

##### Απάντηση

Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε  $A = B$ .

---

4 Πότε ένα σύνολο  $A$  λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου  $B$ ;

##### Απάντηση

Ένα σύνολο  $A$  λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου  $B$ , όταν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $B$ .

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε  $A \subseteq B$ . Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

i)  $A \subseteq A$ , για κάθε σύνολο  $A$ .

- ii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq \Gamma$ , τότε  $A \subseteq \Gamma$ .  
iii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq A$ , τότε  $A = B$ .
- 

5 Ποιο σύνολο λέγεται κενό;

#### Απάντηση

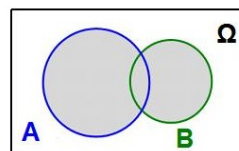
**Κενό σύνολο** είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

---

6 Τι ονομάζεται ένωση δυο συνόλων A, B;

#### Απάντηση

**Ένωση** δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με  $A \cup B$ .  
Δηλαδή είναι:



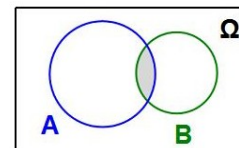
$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

---

7 Τι ονομάζεται τομή δυο συνόλων A, B;

#### Απάντηση

**Τομή** δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με  $A \cap B$ .  
Δηλαδή είναι:



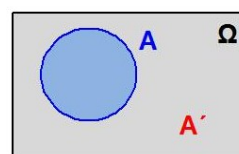
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

---

8 Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός συνόλου A;

#### Απάντηση

**Συμπλήρωμα** του υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με  $A'$ .  
Δηλαδή είναι:



$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

### §1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

9 Τι ονομάζεται πείραμα τύχης;

#### Απάντηση

Υπάρχουν πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

---

10 Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

#### Απάντηση

**Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $\Omega$ .

Αν δηλαδή  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

---

11 Τι ονομάζεται ενδεχόμενο;

#### Απάντηση

**Ενδεχόμενο** ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. Κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

---

12 Ποιο ενδεχόμενο λέγεται απλό και ποιο σύνθετο;

#### Απάντηση

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

---

13 Πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται;

#### Απάντηση

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**.

---

**14** Ποιο ενδεχόμενο λέγεται βέβαιο και ποιο αδύνατο;

**Απάντηση**

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο  $\Omega$ . Γι' αυτό το  $\Omega$  λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Το κενό σύνολο  $\emptyset$  θεωρείται ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το  $\emptyset$  είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

---

**15** Πότε δυο ενδεχόμενα A, B λέγονται ασυμβίβαστα;

**Απάντηση**

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ . Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

---

**16** Πότε δυο ενδεχόμενα A, B λέγονται ασυμβίβαστα;

**Απάντηση**

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ . Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

---

## §1.2 Η έννοια της πιθανότητας

**17** Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου A;

**Απάντηση**

Αν σε  $n$  εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται  $k$  φορές, τότε ο λόγος  $\frac{k}{n}$  ονομάζεται σχετική συχνότητα του A και συμβολίζεται με  $f_A$ .

---

**18** Να διατυπώσετε τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων.

**Απάντηση**

Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα, ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων προκύπτει ότι:

- $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$
- Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει:  $0 \leq N(A) \leq N(\Omega) \Leftrightarrow \frac{0}{N(\Omega)} \leq \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

**19** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον απλό προσθετικό νόμο.

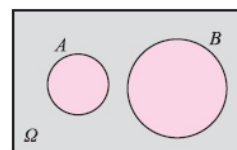
#### Απάντηση

Διατύπωση: Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Απόδειξη: Εφόσον τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) \Leftrightarrow \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$



**20** Ποια σχέση συνδέει τις πιθανότητες δυο συμπληρωματικών ενδεχομένων; Αποδείξτε την

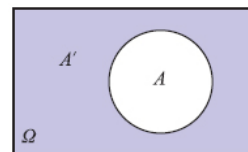
#### Απάντηση

Διατύπωση: Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A, A'$  ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Απόδειξη: Επειδή τα ενδεχόμενα  $A, A'$  είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει:

$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A) \end{aligned}$$



**21** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον προσθετικό νόμο.

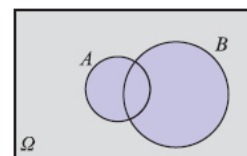
#### Απάντηση

Διατύπωση: Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Απόδειξη: Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

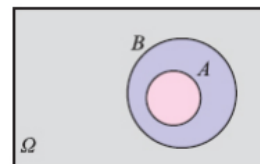


- 22 Αν για δυο ενδεχόμενα  $A, B$  ισχύει ότι  $A \subseteq B$ , ποια σχέση συνδέει τις πιθανότητες τους; Αποδείξτε τη σχέση αυτήν.

**Απάντηση**

Διατύπωση: Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) \leq P(B)$

Απόδειξη:  $A \subseteq B \Rightarrow N(A) \leq N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



- 23 Ποια σχέση δίνει την πιθανότητα  $A-B$ ; Να αποδείξετε τη σχέση αυτή.

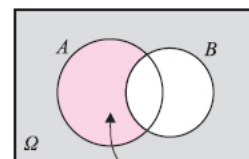
**Απάντηση**

Διατύπωση: Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Απόδειξη: Επειδή τα ενδεχόμενα  $A-B$  και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και επιπλέον ισχύει ότι  $(A-B) \cup (A \cap B) = A$ , από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει:

$$P[(A-B) \cup (A \cap B)] = P(A) \Leftrightarrow P(A-B) + P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### §2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

- 24 Πότε ένας αριθμός  $\alpha$  είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό  $\beta$ ;

**Απάντηση**

Ένας αριθμός  $\alpha$  λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό  $\beta$ , και γράφουμε  $\alpha > \beta$ , όταν η διαφορά  $\alpha - \beta$  είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι ο  $\beta$  είναι μικρότερος από τον  $\alpha$  και γράφουμε  $\beta < \alpha$ .

- 25 Διατυπώστε τις ιδιότητες των ανισοτήτων:

**Απάντηση**

- $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- αν  $\gamma > 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- αν  $\gamma < 0$  τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
  - αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  τότε  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
  - αν  $\alpha, \beta > 0$  τότε:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^v > \beta^v$
- 

### §2.3 Απόλυτη τιμή

**26** Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

#### Απάντηση

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$  συμβολίζεται με  $|\alpha|$  και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$


---

**27** Να συμπληρώσετε το σωστό σύμβολο στους παρακάτω τύπους:  
 i.  $|\alpha| \dots |- \alpha|$ ,    ii.  $|\alpha| \dots \alpha$  και  $|\alpha| \dots -\alpha$ ,    iii.  $|\alpha|^2 \dots \alpha^2$

#### Απάντηση

i.  $|\alpha| = |- \alpha|$ ,    ii.  $|\alpha| \geq \alpha$  και  $|\alpha| \geq -\alpha$ ,    iii.  $|\alpha|^2 = \alpha^2$

---

**28** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ιδιότητες:  
 i. Αν  $\theta > 0$  τότε  $|x| = \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ ,    ii.  $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

#### Απάντηση

i. Αν  $\theta > 0$  τότε  $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$  ή  $x = -\theta$ ,    ii.  $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$  ή  $x = -\alpha$

---

**29** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες των απολύτων τιμών.

#### Απάντηση

Διατύπωση:    α)  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

$$\beta) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$$\gamma) |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Αποδείξεις:    α)  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \beta^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$   
 (ισχύει)

$$\beta) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \left( \frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ (ισχύει)}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad & |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\alpha \cdot \beta \leq 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq |\alpha \cdot \beta| \text{ (ισχύει)} \end{aligned}$$


---

**30** Τι ονομάζεται απόσταση δύο αριθμών  $\alpha, \beta$ ;

#### Απάντηση

Αν θεωρήσουμε δυο αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως, τότε το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$ , συμβολίζεται με  $d(\alpha, \beta)$  και είναι ίση με  $|\alpha - \beta|$ . Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$


---

### §2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

**31** Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού  $\alpha$ .

#### Απάντηση

**Τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού  $\alpha$  ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει σαν αποτέλεσμα τον  $\alpha$ .

Συμβολισμός:  $\sqrt{\alpha}$

---

**32** Να διατυπώσετε τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας.

#### Απάντηση

- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ , αν  $\alpha \geq 0$
  - $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
  - $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ , αν  $\alpha, \beta \geq 0$
  - $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ , αν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta > 0$
- 

**33** Να δώσετε τον ορισμό της ν-στης ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού  $\alpha$ .

#### Απάντηση

**N-στη ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού  $\alpha$  ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στην  $n$ , μας δίνει σαν αποτέλεσμα τον  $\alpha$ .

Συμβολισμός:  $\sqrt[n]{\alpha}$

---

**34**

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες της ν-στης ρίζας μη αρνητικού αριθμού.

### Απάντηση

Διατύπωση:

- α)  $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ , αν  $\alpha \geq 0$
- β)  $(\sqrt[n]{\alpha^n}) = |\alpha|$ , για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- γ)  $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$ , αν  $\alpha, \beta \geq 0$
- δ)  $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$ , αν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta > 0$
- ε)  $\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha^{\frac{\mu}{n}}}$ , αν  $\alpha \geq 0$
- στ)  $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$ , αν  $\alpha \geq 0$

Αποδείξεις:

- γ)  $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$   
(ισχύει)
- δ)  $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\sqrt[n]{\alpha})^n}{(\sqrt[n]{\beta})^n} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$  (ισχύει)

**35**

Πώς ορίζεται μια δύναμη με ρητό εκθέτη;

### Απάντηση

Αν  $\alpha > 0$ ,  $\mu$  ακέραιος και  $n$  θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\sqrt[n]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{n}}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### §3.1 Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού

36 Πώς επιλύεται μια εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού;

#### Απάντηση

$$ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow ax = -\beta \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν  $a \neq 0$  τότε:

$$(1) \Leftrightarrow ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

Επομένως, αν  $a \neq 0$  η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την  $x = -\frac{\beta}{a}$ .

- Αν  $a = 0$ , τότε :

- αν είναι  $\beta \neq 0$  η εξίσωση (1) δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
- αν είναι  $\beta = 0$  η εξίσωση (1) έχει τη μορφή  $0x = 0$  και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , δηλαδή είναι **αόριστη**.

### §3.2 Η εξίσωση $x^v = a$

37 Πώς επιλύεται μια εξίσωση  $x^v = a$  ;

#### Απάντηση

Για τη λύση της εξίσωσης  $x^v = a$ , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

|         |              |                       |
|---------|--------------|-----------------------|
| $a > 0$ | $v$ άρτιος   | $x = \pm \sqrt[v]{a}$ |
|         | $v$ περιττός | $x = \sqrt[v]{a}$     |
| $a < 0$ | $v$ άρτιος   | αδύνατη               |
|         | $v$ περιττός | $x = -\sqrt[v]{ a }$  |

### §3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

**38** Πόσες και ποιες λύσεις έχει μια δευτεροβάθμια εξίσωση, αναλόγως τις τιμές τις διακρίνουσας; Να κάνετε την απόδειξη.

#### Απάντηση

Οι λύσεις μιας εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

| $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ | Η εξίσωση<br>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$                |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta > 0$                       | Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ |
| $\Delta = 0$                       | Έχει μια διπλή ρίζα τη $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$                          |
| $\Delta < 0$                       | Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ .                                               |

#### Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 0 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\end{aligned}$$

Αν θέσουμε  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:  $\left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} &\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\end{aligned}$$

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε η εξίσωση (2) γράφεται:  $\left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

**39** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τους τύπους του Vieta.

#### Απάντηση

Αν η δευτεροβάθμια εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  ( $a \neq 0$ ) έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  τότε για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της, ισχύουν οι σχέσεις:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\text{τύποι του Vieta})$$

#### Απόδειξη

$$\begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \\ P = x_1 \cdot x_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta - \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \\ &= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha} \end{aligned}$$

**40** Να αποδείξετε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  ( $a \neq 0$ ) με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται στη μορφή:  $x^2 - Sx + P = 0$ .

#### Απάντηση

$$\text{Γνωρίζουμε ότι: } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### §4.1 Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού

**41** Πώς επιλύεται μια ανίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού;

#### Απάντηση

$$ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax + \beta - \beta > -\beta \Leftrightarrow ax > -\beta \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν  $\alpha > 0$  τότε:

$$(1) \Leftrightarrow ax > -\beta \Leftrightarrow \frac{ax}{\alpha} > -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν  $\alpha < 0$  τότε:

$$(1) \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν  $\alpha = 0$ , τότε η ανίσωση (1) παίρνει τη μορφή  $0 \cdot x > -\beta$  οπότε:
  - αν είναι  $\beta > 0$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ
  - αν είναι  $\beta \leq 0$  είναι **αδύνατη**.

## §4.2 Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

**42** Πώς παραγοντοποιείται το τριώνυμο;

### Απάντηση

Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  ( $\alpha \neq 0$ ) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \cdot \left( x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{-\beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right) = \\ &= \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right) = \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν  $\Delta > 0$  τότε:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \cdot \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \cdot \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \\ &= \alpha \cdot \left( x + \frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \cdot \left( x + \frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \alpha \cdot \left( x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \cdot \left( x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \end{aligned}$$

(όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες του τριωνύμου)

- Αν  $\Delta = 0$  τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \cdot \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha \cdot (x - x_0)^2$$

(όπου  $x_0$  η διπλή ρίζα του τριωνύμου)

- Αν  $\Delta < 0$  τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right), \text{ όπου η παρένθεση είναι θετικός αριθμός και δεν}$$

αναλύεται σε γινόμενο, άρα το τριώνυμο δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί.

Επομένως:

**Αν  $\Delta > 0$  τότε:**  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

**Αν  $\Delta = 0$  τότε:**  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_0)^2$

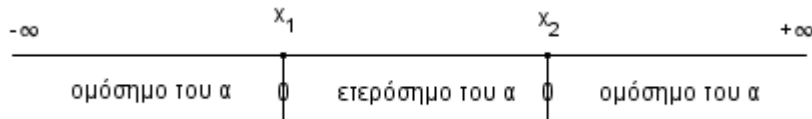
**Αν  $\Delta < 0$  τότε:** το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

**43** Τι πρόσημο έχει το τριώνυμο, ανάλογα με τις τιμές της διακρίνουσάς του;

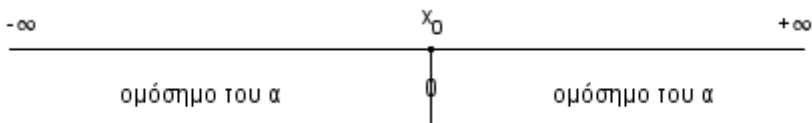
#### Απάντηση

Για το πρόσημο του τριωνύμου  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  ισχύει:

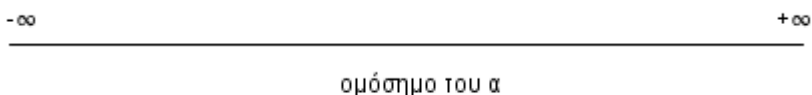
- Αν  $\Delta > 0$  και  $x_1, x_2$  οι ρίζες του τότε



- Αν  $\Delta = 0$  και  $x_0$  η διπλή του ρίζα τότε



- Αν  $\Delta < 0$  τότε



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΠΡΟΟΔΟΙ

### §5.1 Ακολουθίες

**44** Τι ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών;

#### Απάντηση

**Ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  στους πραγματικούς αριθμούς.

Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με  $a_1$ , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με  $a_2$  κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός  $n$  καλείται  **$n$ -οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με  $a_n$ .

## §5.2 Αριθμητική πρόοδος

45 Τι ονομάζεται αριθμητική πρόοδος;

### Απάντηση

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

---

46 Τι ονομάζεται διαφορά της αριθμητικής προόδου;

### Απάντηση

Ο σταθερός αριθμός που προσθέτουμε κάθε φορά σε έναν όρο της αριθμητικής προόδου, για να προκύψει ο επόμενος όρος, λέγεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και συμβολίζεται με  $\omega$ .

---

47 Ποιος είναι ο τύπος του  $n$ -στου όρου μιας αριθμητικής προόδου; Να κάνετε την απόδειξη.

### Απάντηση

Ο  $n$ -ος όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο  $\alpha_1$  και διαφορά  $\omega$  είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$$

### Απόδειξη

Μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν το  $n$ -στο όρο  $\alpha_n$  μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των  $\alpha_1$ ,  $\omega$  και  $n$  ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 &= \alpha_3 + \omega \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} &= \alpha_{n-2} + \omega \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} + \omega\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις  $n$  αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε :

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$$

---

48 Πότε τρεις όροι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου; Ποιος είναι ο αριθμητικός μέσος;

### Απάντηση

Τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Ο αριθμός  $\beta$  λέγεται αριθμητικός μέσος των  $\alpha, \gamma$ .

---

49

Να αποδείξετε ότι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

#### Απάντηση

Επειδή  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, θα ισχύει:

$\beta = \alpha + \omega \Leftrightarrow \beta - \alpha = \omega$  (1), όπου  $\omega$  η διαφορά της αριθμητικής προόδου

$\gamma = \beta + \omega \Leftrightarrow \gamma - \beta = \omega$  (2)

Από (1) και (2) έχουμε:  $\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ .

Αντιστρόφως αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ , τότε:

$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta$ , άρα οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

50

Με τι ισούται το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου;

#### Απάντηση

Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τους τύπους:

$$S_n = \frac{n \cdot (\alpha_1 + \alpha_n)}{2} = \frac{n \cdot [2\alpha_1 + (n-1) \cdot \omega]}{2}$$

### §5.3 Γεωμετρική πρόοδος

51

Τι ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος;

#### Απάντηση

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, θεωρούμε ότι πρώτος όρος είναι διαφορετικός του μηδενός.

52

Τι ονομάζεται λόγος της γεωμετρικής προόδου;

#### Απάντηση

Ο σταθερός μη μηδενικός αριθμός που πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά σε έναν όρο της γεωμετρικής προόδου, για να προκύψει ο επόμενος όρος, λέγεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου και συμβολίζεται με  $\lambda$ .

**53** Ποιος είναι ο τύπος του ν-στου όρου μιας γεωμετρικής προόδου; Να κάνετε την απόδειξη.

#### Απάντηση

Ο ν-στος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1$  και λόγο  $\lambda$  είναι:

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

#### Απόδειξη

Μπορούμε να υπολογίσουμε κατευθείαν το ν-στο όρο  $a_n$  μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των  $a_1$ ,  $\lambda$  και  $n$  ως εξής: Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot \lambda$$

$$a_3 = a_2 \cdot \lambda$$

$$a_4 = a_3 \cdot \lambda$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot \lambda$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις  $n$  αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε :

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

---

**54** Πότε τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου; Ποιος είναι ο γεωμετρικός μέσος;

#### Απάντηση

Τρεις αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Ο θετικός αριθμός  $\sqrt{\alpha \cdot \gamma}$  λέγεται γεωμετρικός μέσος των  $\alpha, \gamma$ .

---

**55** Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

#### Απάντηση

Επειδή  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, θα ισχύει:

$$\beta = \alpha \cdot \lambda \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \lambda \quad (1), \text{ όπου } \lambda \text{ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου}$$

$$\gamma = \beta \cdot \lambda \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \lambda \quad (2). \quad \text{Από (1) και (2) έχουμε: } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Αντιστρόφως αν για τρεις μη μηδενικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει  $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$  τότε:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ που σημαίνει ότι } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.}$$

**56** Με τι ισούται το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου;

**Απάντηση**

Το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με  $\lambda \neq 1$ , δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι  $\lambda=1$ , τότε το άθροισμα των όρων της είναι  $S_n = n \cdot a_1$  αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με  $a_1$ .

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

### §6.1 Η έννοια της συνάρτησης

**57** Τι ονομάζεται συνάρτηση;

**Απάντηση**

**Συνάρτηση** από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου  $B$ . Το σύνολο  $A$  λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της συνάρτησης.

---

**58** Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Απάντηση**

Το γράμμα  $x$ , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της  $f$ , λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το  $y$ , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο  $x$ , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

---

**59** Ποιο είναι το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Απάντηση**

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές  $f(x)$  για όλα τα  $x \in A$ , λέγεται **σύνολο τιμών** της  $f$  και συμβολίζεται με  **$f(A)$** .

---

## §6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

60 Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

### Απάντηση

Το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $y=f(x)$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ ,  $x \in A$ , λέγεται **γραφική παράσταση** της  $f$  και συμβολίζεται συνήθως με  $C_f$ .

---

61 Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;

### Απάντηση

Οι συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, και μόνον αυτών των σημείων, επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης.

---

62 Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$ ;

### Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $xx'$ .

---

## §6.3 Η συνάρτηση $f(x)=ax+b$

63 Τι είναι ο συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας;

### Απάντηση

Ο **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας  $\varepsilon$  ορίζεται ως η εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$ . Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας  $\varepsilon$  συμβολίζεται συνήθως με  $\lambda_\varepsilon$  ή απλά με  $\lambda$ .

---

64 Πότε ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός αριθμός και πότε αρνητικός;

### Απάντηση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $\varepsilon$  είναι θετικός, αν η γωνία  $\omega$  που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $xx'$  είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία  $\omega$  είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία  $\omega$  είναι ίση με  $90^\circ$ , δηλαδή όταν η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ , δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την  $\varepsilon$ .

---

**65** Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=ax+\beta$ ;

**Απάντηση**

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=ax+\beta$ , είναι μια ευθεία γραμμή.

---

**67** Ποια είναι η συνθήκη παραλληλίας δυο ευθειών;

**Απάντηση**

Θεωρούμε τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ :  $y=a_1x+\beta_1$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y=a_2x+\beta_2$ . Ισχύει:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

---

**68** Ποια είναι η συνθήκη καθετότητας δυο ευθειών;

**Απάντηση**

Θεωρούμε τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ :  $y=a_1x+\beta_1$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y=a_2x+\beta_2$ . Ισχύει:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

---