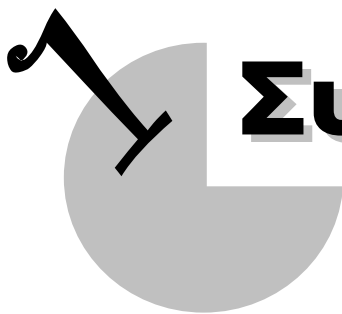




Συστήματα



« Το διάβα σου άπειρο, μονάχο, με κόπο.
Στα δεσμά - δεξ, κι εγώ - της δικής μου ευθείας.
Λυτρωθήκαμε κάποτε στην κορυφή μιας γωνίας,
απ' του απείρου τη μέγγενη,
συντροφιά βρήκαμε τρόπο ».

1. Γραμμικές Εξισώσεις

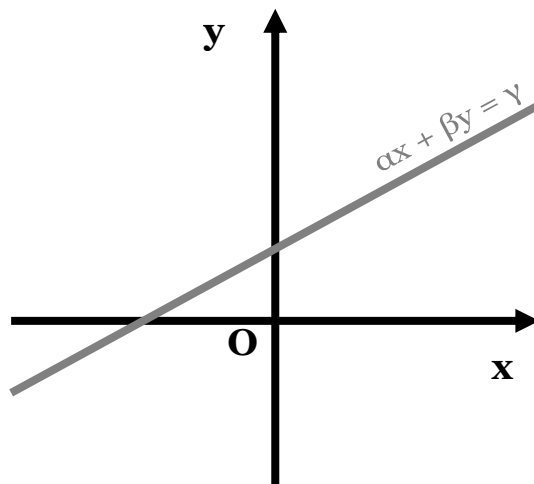
Κάθε εξίσωση **1ου βαθμού με 2 αγνώστους** ονομάζεται **γραμμική**.

Η γενική της μορφή είναι $ax + by + \gamma = 0$, όμως εμείς για πρακτικούς λόγους (και όχι γιατί δεν έχουμε ιδέα από μαθηματικά) θα συνηθίζουμε να τη γράφουμε $ax + by = \gamma$, σα να λέμε δηλαδή πως έχουμε χωρίσει γνωστούς από αγνώστους.

Αν τη λύσουμε **ως προς y** γίνεται προφανής ο λόγος για τον οποίο καλείται γραμμική, αφού παίρνει τη μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας.

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$$

Αλλά αυτό υποτίθεται ότι το έχουμε διδαχτεί απ' το Γυμνάσιο (ορίστε;).



Άρα

Θυμάμαι καλά ότι κάθε αλγεβρική γραμμική εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά μία **ευθεία γραμμή**.

Οι λύσεις

Είναι λογικό να σκεφτούμε πως εφόσον μια ευθεία περιέχει **άπειρα σημεία** έτσι και η αντίστοιχη εξίσωση που την περιγράφει θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από αντίστοιχες άπειρες λύσεις, μία για κάθε σημείο.

- Άρα, κάθε γραμμική εξίσωση, από μόνη της, έχει **άπειρες λύσεις**.
- Για να βρούμε μερικές από αυτές, θέτουμε **τυχαίες** τιμές στη μεταβλητή x κι αφού εκτελέσουμε όλες τις δυνατές πράξεις βρίσκουμε μια αντίστοιχη τιμή για τη μεταβλητή y .
- Συνεπώς, μια γραμμική εξίσωση δεν έχει ως λύση έναν μοναδικό αριθμό, αλλά ένα **ζεύγος** αριθμών που την ικανοποιούν. Το ζεύγος αυτό είναι **διατεταγμένο** (δηλαδή, έχει αυστηρά καθορισμένη σειρά, ποιον αριθμό γράφουμε πρώτο και ποιον δεύτερο) και το συμβολίζουμε ως **(x, y)** .

πχ. Για να βρούμε **μια** λύση της εξίσωσης $y = 3x - 6$ θέτουμε όπου x ό,τι μας κατέβει ☺, ας πούμε $x = 5$, και εκτελούμε τις πράξεις:

$$y = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$$

Άρα, μια λύση της εξίσωσης είναι η **$(x, y) = (5, 9)$** .

- Επειδή δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε όλες από τις άπειρες αυτές λύσεις, αρκεί να σημειώνουμε τη **μορφή** που θα έχουν, ώστε να μπορεί κανείς να υπολογίσει όσες θέλει, ανά πάσα ώρα και στιγμή.

πχ. Για το προηγούμενο παράδειγμα, οι μορφή που θα έχουν οι λύσεις μας θα είναι: $(x, y) = (x, 3x - 6)$ ή καλύτερα **$(x, y) = (κ, 3κ - 6)$** . Παρατηρούμε ότι, για το σκοπό αυτό, θα πρέπει αναπόφευκτα να λύσουμε τη γραμμική εξίσωση ως προς y .

2. Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν μιλάμε για σύστημα μιλάμε για **κοινές λύσεις**!

Αν, δηλαδή, μια γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις και μια άλλη γραμμική εξίσωση έχει άλλες τόσες άπειρες λύσεις, είναι δυνατόν κάποιες από αυτές τις λύσεις να είναι κοινές και για τις δύο; Για να πλησιάσουμε την απάντηση, αρκεί να σκεφτούμε το εξής:

Αν κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει μία ευθεία, τότε 2 γραμμικές εξισώσεις θα παριστάνουν 2 ευθείες! (Απίστευτο έτσι;; κι όμως αληθινό!! ☺) Αν θυμηθούμε (από τη Γεωμετρία) ποιες μπορεί να είναι οι **σχετικές θέσεις** που μπορούν να πάρουν δύο ευθείες μεταξύ τους, τότε αμέσως μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για το τι μπορεί να συμβαίνει με τις λύσεις ενός συστήματος.

Γεωμετρική ερμηνεία

Σχετική Θέση Ευθειών	Πλήθος Κοινών Σημείων	Επίλυση Γραμμικού Συστήματος
	1	Μία μοναδική λύση
	0	Καμία λύση (Αδύνατο)
	∞	Άπειρες λύσεις (Αόριστο)

3. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Προτού λύσουμε ένα οποιοδήποτε σύστημα, προκειμένου να βγάλουμε μια άκρη, επιβάλλεται να το φέρουμε πρώτα σε **κανονική μορφή**, δηλαδή στη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Με απλά λόγια, έχουν εκτελεστεί τα παρακάτω:

1. Απαλοιφή παρονομαστών.
2. Απαλοιφή παρενθέσεων.
3. Χωρισμός γνωστών από αγνώστους.
4. Αναγωγή ομοίων όρων.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος επιλέγοντας κάποια από τις παρακάτω μεθόδους:

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, άρα όποιον μας συμφέρει) και **αντικαθιστούμε** το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!



Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι στη 2η εξίσωση ο άγνωστος x δεν έχει συντελεστή (εντάξει, για τους εξυπνάκηδες, έχει τη μονάδα), άρα μας συμφέρει να επιλέξουμε τη 2η εξίσωση και να τη λύσουμε ως προς x (έτσι αποφεύγουμε να προκύψουν κλάσματα) :

$$(2) \Leftrightarrow x = 2y - 4 \quad (3)$$

Προχωρούμε τώρα στην 1η εξίσωση, όπου αντικαθιστούμε στη θέση του x την παράσταση (3) που μόλις βρήκαμε (και φυσικά στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση):

$$(1) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 2 \cdot (2y - 4) + 5y = 1 \Leftrightarrow 4y - 8 + 5y = 1 \Leftrightarrow 9y = 9 \Leftrightarrow y = 1$$

Προς το παρόν, έχουμε υπολογίσει μονάχα τον έναν από τους δύο αγνώστους. Επιστρέφουμε στην εξίσωση (2) και αντικαθιστούμε την τιμή $y = 1$:

$$(2) \stackrel{y=1}{\Leftrightarrow} x = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \Leftrightarrow x = -2$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι η :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ή, αλλιώς, το ζεύγος } (x, y) = (-2, 1).$$

Παρατήρηση

Πολλά βιβλία ή καθηγητές - για χάρη της καθαρότητας αλλά εις βάρος της συντομίας - λύνοντας ένα σύστημα, αντιγράφουν σε κάθε βήμα και τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y - 4) + 5y = 1 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 8 + 5y = 1 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 9 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \cdot 1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές μπροστά από κάποιον άγνωστο (πάλι επιλέγουμε αυθαίρετα όποιον μας συμφέρει). Στη συνέχεια, **προσθέτουμε** τις 2 εξισώσεις **κατά μέλη**. Έτσι προκύπτει και πάλι μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Ας επιμείνουμε στο ίδιο σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$$



Επιλέγουμε αυθαίρετα τον άγνωστο x , περισσότερο από θέμα οπτικής ευκολίας - καθώς βρίσκεται πρώτος-πρώτος στην εξίσωση - παρά από κανένα θέμα ουσίας. Θα προσπαθήσουμε, πολλαπλασιάζοντας τη μία ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές του x να γίνουν αντίθετοι.

$$\begin{array}{ll} \text{Ο συντελεστής του } x \text{ είναι το } 2 & \longrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \\ \text{Ο συντελεστής του } x \text{ είναι το } 1 & \longrightarrow \end{array}$$

Κανονικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε το ΕΚΠ (2, 1) και να προχωρήσουμε σε μια διαδικασία όμοια μ' εκείνη που ακολουθούμε, κάθε φορά που κάνουμε δυο κλάσματα ομώνυμα. Ωστόσο, όταν εργαζόμαστε με μικρούς αριθμούς, δε είναι λάθος να σκεφτούμε λιγάκι "πονηρά" και να πολλαπλασιάσουμε τις 2 εξισώσεις με έναν τρόπο χιαστί:

$$\begin{array}{ll} \text{πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με } 1 & \swarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \\ \text{πολλαπλασιάζουμε την 2η εξίσωση με } 2 & \nwarrow \end{array}$$

Με αυτό τον τρόπο όμως, στο συγκεκριμένο σύστημα, οι συντελεστές δε θα βγουν αντίθετοι αλλά ομόσημοι. Για το λόγο αυτό, συμπληρώνω ένα "-" αυθαίρετα σε όποιον από τους δύο αριθμούς επιθυμώ. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\begin{array}{l} -1 \cdot \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 5y = -1 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases} \\ 2 \cdot \end{array}$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη:

$$\oplus \quad \begin{cases} -2x - 5y = -1 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

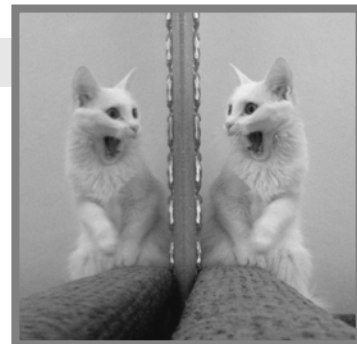
$$-9y = -9 \Leftrightarrow y = 1$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση της λύσης που βρήκαμε είτε στην (1), είτε στη (2), υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$(2) \Leftrightarrow x - 2 \cdot 1 = -4 \Leftrightarrow x = 2 - 4 \Leftrightarrow x = -2$$

Μέθοδος της Σύγκρισης

Λύνουμε και τις 2 εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, το καταλάβαμε πια!). Κατόπιν, εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα, **εξισώνουμε** τα δεύτερα μέλη. Έτσι, για μία ακόμη φορά, προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!



Παράδειγμα

Συνεχίζοντας με το ίδιο πάντα σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

λύνουμε **και τις δύο** εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο (όποιον μπλα-μπλα θέλουμε κ.λπ.). Εδώ θα λύσουμε ως προς x , γιατί έτσι μας αρέσει :

$$\begin{cases} 2x = 1 - 5y & (3) \\ x = 2y - 4 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - 5y}{2} & (3) \\ x = 2y - 4 & (4) \end{cases}$$

Εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα τότε θα είναι και τα δεύτερα ίσα, οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη προκύπτει η παρακάτω εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\frac{1 - 5y}{2} = 2y - 4 \quad \begin{matrix} \text{απαλοιφή} \\ \text{παρονομαστών} \end{matrix} \Leftrightarrow 1 - 5y = 4y - 8 \Leftrightarrow -9y = -9 \Leftrightarrow y = 1$$

Έχοντας βρει τον έναν άγνωστο, δε θέλει πολύ φιλοσοφία, τον αντικαθιστούμε σε κάποια από τις αρχικές εξισώσεις (1), (2) ή ακόμα καλύτερα σε μία από τις (3), (4), οι οποίες είναι έτοιμες, λυμένες ως προς τον άλλον άγνωστο:

$$(3) \stackrel{y=1}{\Leftrightarrow} x = \frac{1 - 5 \cdot 1}{2} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

ΘΥΜΟΜΑΣΤΕ ότι δεν έχουμε έναν, αλλά **2 !!!** αγνώστους να υπολογίσουμε! Αφού, λοιπόν, καταφέρουμε τον ένα από τους δύο - με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους - χρειάζεται να αντικαταστήσουμε την τιμή που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (όποια επιθυμούμε, άρα την πιο απλή) ώστε να υπολογίσουμε, τελικά, και τον άλλο άγνωστο!

4. Μέθοδος των Οριζουσών



Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 σε κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε **Ορίζουσα** του συστήματος και θα τη συμβολίζουμε με το γράμμα **D**, την παρακάτω έκφραση:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ορίζουσες **ως προς x** και **ως προς y**, ως εξής:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διερεύνηση του συστήματος, ως εξής:

Διερεύνηση

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που δίνεται από τους τύπους:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- Αν $D = 0$, όμως συμβαίνει ένα από τα δύο $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα είναι **αόριστο**, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

ΕΞΑΙΡΕΣΗ!!!

Αν $D = D_x = D_y = 0$
με $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$
αλλά κάποιο από τα $\gamma, \gamma' \neq 0$
τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Παράδειγμα

$$\text{Άντε πάλι το ίδιο σύστημα...} \begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 = -4 - 5 = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5 = -2 + 20 = 18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -8 - 1 = -9$$

Εφόσον $D = -9 \neq 0$ το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** την :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{-9} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-9}{-9} = 1$$

5. Το Αόριστο Σύστημα

Γενικά, είναι εύκολο να αντιληφθούμε αν ένα σύστημα καταλήγει να είναι αόριστο, δίχως καν να χρειαστεί να το επιλύσουμε. Εφόσον, δηλαδή, το έχουμε φέρει σε κανονική μορφή, το μόνο που χρειάζεται είναι να παρατηρήσουμε ότι οι δύο εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες! Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε μία (ή, συχνά, και τις δύο) από αυτές με κάποιον αριθμό και ιδού! Αυτό γίνεται προφανές, αν θυμηθούμε ότι το αόριστο σύστημα εκφράζεται γεωμετρικά από δύο ευθείες που **συμπίπτουν**, δηλαδή ουσιαστικά από την ίδια ευθεία.

Αλλά...

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα όπως έχουμε πει έχει **άπειρες λύσεις**. Όμως, **ΔΕΝ** ξεμπερδεύουμε γράφοντας απλά ένα ξερό "αόριστο" και βάζοντας τελεία, αλλά είμαστε **υποχρεωμένοι** να σημειώσουμε τη **μορφή** που παίρνουν αυτές οι άπειρες λύσεις. Για το λόγο αυτό, λύνουμε μία από τις δύο εξισώσεις πχ. **ως προς y** και σημειώνουμε τη λύση του συστήματος, όπως ακριβώς φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα

$$\text{Έστω το σύστημα } \begin{cases} x - 4y = 3 & (1) \\ 3x - 12y = 9 & (2) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) δεν είναι παρά η (1) πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 3. Άρα, καταλήγουμε πως πρόκειται για ένα σύστημα αόριστο. Λύνουμε την (1) ως προς y , οπότε :

$$(1) \Leftrightarrow -4y = -x + 3 \Leftrightarrow 4y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}$$

Γράφουμε, τελικά, πως οι λύσεις μας είναι άπειρες, της μορφής:

$$(x, y) = \left(\kappa, \frac{\kappa-3}{4} \right), \kappa \in \mathbb{P}$$

Ουσιαστικά, τι κάναμε; Απλά στο διατεταγμένο ζεύγος των λύσεων θέσαμε, στη θέση του y , την παραστάση που προέκυψε από την (1). Επιπλέον, θέσαμε στη θέση του x μια μεταβλητή κ , που σημαίνει ότι - και καλά - για να βρούμε μια οποιαδήποτε λύση, αρκεί να αντικαθιστούμε κάθε φορά στο x κι έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό κ . Αυτά!

Αλλιώς;

Αν λύναμε το σύστημα "κανονικά", ας πούμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης θα είχαμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 4y = 3 & (1) \\ 3x - 12y = 9 & (2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 3x - 12y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 3(4y + 3) - 12y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 12y + 9 - 12y = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 12y - 12y = 9 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 0y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Εφόσον η εξίσωση βγήκε **ταυτότητα** ως προς y , άρα το σύστημα είναι τελικά αόριστο. Ολοκληρώνουμε γράφοντας τη μορφή των λύσεων όπως δείξαμε προηγουμένως.

Παρατήρηση

- α.** Παρατηρώντας τη μορφή των λύσεων, αντιλαμβανόμαστε ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαθιστούμε διάφορες τιμές - της αρεσκειάς μας - στον x και να κάνουμε πράξεις. Γι' αυτό, στην περίπτωση αυτή, ο άγνωστος x ονομάζεται και **ελεύθερος άγνωστος**.
- β.** Με την ίδια λογική, θα μπορούσαμε να λύσουμε την (1) ως προς x , συνεπώς ο ελεύθερος άγνωστος τότε θα ήταν το y . Κανένα πρόβλημα, είναι το ίδιο πράγμα. Για του λόγου το αληθές: $(1) \Leftrightarrow x = 4y + 3$. Οι λύσεις μας τότε θα είχαν τη μορφή:

$$(x, y) = (4\kappa + 3, \kappa)$$

6. Το Ομογενές Σύστημα

Ένα σύστημα θα λέγεται **ομογενές** αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων είναι **μηδέν**. Είναι προφανές πως ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο, εφόσον έχει πάντα μια λύση: τη **μηδενική**!

7. Γραμμικά Συστήματα 3x3

Σα να μην έφταναν όλα μας τα προβλήματα, χρειάζεται τώρα να μάθουμε πως υπάρχουν επιπλέον και συστήματα **3 εξισώσεων με 3 αγνώστους** ! Ευτυχώς, αν έχουμε κατανοήσει τα προηγούμενα, τα πράγματα δεν είναι καθόλου δύσκολα, αρκεί να εφοδιαστούμε με αρκετή υπομονή στις πράξεις και τις αντικαταστάσεις.



Η Μέθοδος

Λύνουμε μία από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν από τους 3 αγνώστους (μην τα ξαναλέμε: όποιον άγνωστο ή όποιαν εξίσωση μας συμφέρει). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στις άλλες δύο εξισώσεις. Κατ' αυτό τον τρόπο, καταφέρνουμε ν' απαλειφθεί ο ένας άγνωστος από τις δύο εξισώσεις και να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα 2x2, το οποίο φυσικά επιλύουμε, με κάποια απ' τις μεθόδους που μάθαμε νωρίτερα.

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το σύστημα} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 2 & (1) \\ 4x - y - 3z = -2 & (2) \\ 2x + 2y - z = 9 & (3) \end{cases}$$

Λύνουμε πχ. την (1) ως προς y και κατόπιν αντικαθιστούμε στις (2) και (3):

$$\begin{cases} y = -2x + z + 2 \\ 4x - (-2x + z + 2) - 3z = -2 \\ 2x + 2(-2x + z + 2) - z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + z + 2 \\ 4x + 2x - z - 2 - 3z = -2 \\ 2x - 4x + 2z + 4 - z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + z + 2 & (1) \\ 6x - 4z = 0 & (2) \\ -2x + z = 5 & (3) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι από τις (2) και (3) απαλείφθηκε ο άγνωστος y κι έτσι έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα $2x2$, το οποίο λύνεται πολύ εύκολα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ -2x + z = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4(5 + 2x) = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 20 - 8x = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 20 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2(-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = -15 \end{cases} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις $x = -10$ και $z = -15$ στην εξίσωση (1) :

$$y = -2x + z + 2 \Leftrightarrow y = -2(-10) + (-15) + 2 \Leftrightarrow y = 20 - 15 + 2 \Leftrightarrow y = 7$$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι η **διατεταγμένη τριάδα** αριθμών :

$$(x, y, z) = (-10, 7, -15)$$

8. Μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα μη γραμμικό σύστημα είναι αυτό ακριβώς που λέει τ' όνομά του: μία ή και οι δύο από τις εξισώσεις που το συνθέτουν **δεν είναι** γραμμική. Στην περίπτωση αυτή, οπλιζόμαστε με τις ιδιότητες των ισοτήτων, φαντασία και πολλή-πολλή ελπίδα! Ωστόσο, το καλό με την ύλη μας είναι ότι μία από τις δύο εξισώσεις θα είναι συνήθως **1ου βαθμού**, ως προς κάποιον άγνωστο! Προχωράμε, λοιπόν, λύνοντας ως προς αυτόν ακριβώς τον άγνωστο και συνεχίζουμε κάνοντας αντικατάσταση, με το συνηθισμένο τρόπο. Έτσι, καταφέρνουμε να σχηματίσουμε μία εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο, ωστόσο 2^{ου}, 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού.

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το σύστημα } \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ (y + 3)^2 - 2y^2 = 14 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Λύνουμε τη (2) κανονικά, όπως κάθε εξίσωση 2ου βαθμού:

$$y^2 + 6y + 9 - 2y^2 = 14 \Leftrightarrow -y^2 + 6y - 5 = 0 \quad \Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16$$

$$y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_2 = 5$$

Άρα, για $y_1 = 1$:

$(1) \Leftrightarrow x = 1 + 3 \Leftrightarrow x = 4$ δηλαδή μια λύση είναι η $(x, y) = (4, 1)$.

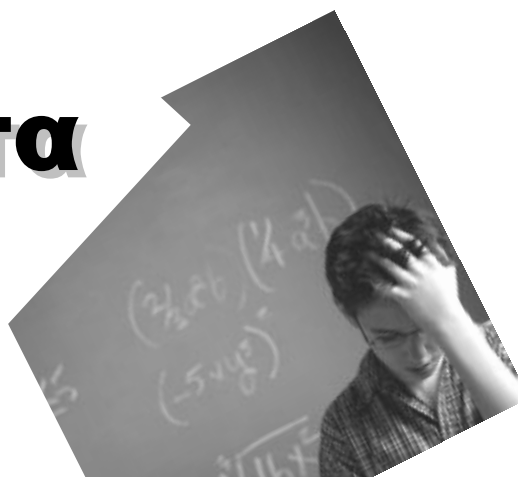
Αντίστοιχα, για $y_2 = 5$:

$(1) \Leftrightarrow x = 5 + 3 \Leftrightarrow x = 8$ δηλαδή μια δεύτερη λύση είναι η $(x, y) = (8, 5)$.

Παρατήρηση

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι τα μη γραμμικά συστήματα δεν έχουν απαραίτητα μία μοναδική λύση, αλλά πιθανότατα 2 ή περισσότερες. Για παράδειγμα, στο σύστημα που μόλις λύσαμε, έχουμε βρει **δύο λύσεις**, που το ικανοποιούν: **$(4, 1)$ και $(8, 5)$!**





1. Συστήματα 2x2

1. Συμπληρώστε τα κενά με μια εξίσωση ή την κατάλληλη έκφραση:

α. Το σύστημα $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ είναι αδύνατο.

β. Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος (2, 3).

γ. Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

δ. Το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$ είναι / έχει $\dots\dots\dots$

ε. Το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ έχει λύση, πάνω στη διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου, ενός συστήματος αξόνων.

2. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} \\ 3x + 5y = 59 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 3x - 5 = 2(y + 1) - 8 \\ 2(x - 1) = 3(1 - 2y) + 9 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3(2 - x) - 5(y + 2) = 3x - 1 \\ 4(x - y) - 5x = 2x + 3(x - y) \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \frac{1 - 2x}{3} + \frac{1 + y}{2} = \frac{5}{12} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = x + 2 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} \frac{2}{3}(2x + y) = \frac{1}{2} \\ \frac{x + y}{3} = 2 - 3y \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} \frac{2x - y}{3} + \frac{x + 1}{2} = 1 \\ \frac{2 - x}{3} - \frac{1 - y}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} \frac{x - 2}{4} + \frac{y + 1}{2} = \frac{3(y - 3)}{2} + 11 - 3x \\ \frac{4x - (2y - x)}{2} = \frac{1 - y}{10} - \left(\frac{x}{5} - \frac{23}{4} \right) \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} \frac{4x + 15}{3} = x + \frac{3y - 5}{5} \\ \frac{3x + 2y}{4} + \frac{y + 15}{5} = y \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} \frac{x - 4}{3} = \frac{3y + 4}{10} + x - y \\ \frac{2x - 5}{5} = \frac{2y - 4}{4} + x - 12 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ |3x - 5y| = 1 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3|x + 1| - |y - 2| = 3 \\ |x + 1| + 2|y - 2| = 8 \end{cases}$$

5. Ομοίως:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{1}{3 + x + 2y} + \frac{3}{6 + 4x - 5y} = 0 \\ 3(6x - 5y + 4) = 3x + 2y + 401 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \frac{1}{x + y} + \frac{3}{x - y} = \frac{5}{3} \\ \frac{2}{x + y} + \frac{1}{x - y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} \frac{-3}{x - 7} + \frac{5}{y + 3} = 7 \\ \frac{5}{x - 7} - \frac{4}{y + 3} = -3 \end{cases}$$

6. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 0 \\ \sqrt{(x-y)^2} = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} |x+1| = |x+y| \\ 3x+5y=9 \end{cases}$$

2. Παραμετρικά Συστήματα

7. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ:

$$\alpha. \begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y=\lambda^2 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} \lambda^2 x+y=2 \\ x+y=2\lambda \end{cases} \quad \epsilon. \begin{cases} 2\lambda x+y=1 \\ 6x+3y=-3 \end{cases} \quad \sigma\tau. \begin{cases} 2x+(5-\lambda)y=1 \\ x+2\lambda y=0 \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} (1-\lambda)x+2y=3 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-4 \end{cases} \quad \eta. \begin{cases} x+y=3 \\ \lambda^2 x+y=3 \end{cases}$$

$$\theta. \begin{cases} (\lambda+1)x-3\lambda^2 y=\lambda \\ x+(\lambda-1)y=-1 \end{cases} \quad \iota. \begin{cases} (\lambda-1)x-y=4 \\ \lambda x-2y=4\lambda \end{cases}$$

$$\iota\alpha. \begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases} \quad \iota\beta. \begin{cases} 2\lambda x+(\lambda-2)y=2 \\ \lambda x+\lambda y=1 \end{cases}$$

$$\iota\gamma. \begin{cases} (\lambda-1)x-2y=3\lambda \\ x+(\lambda-4)y=\lambda+4 \end{cases} \quad \iota\delta. \begin{cases} (\mu+1)x+8y=4\mu \\ \mu x+(\mu+3)y=3\mu-1 \end{cases}$$

$$\iota\epsilon. \begin{cases} (2\lambda-1)x+\lambda y=1 \\ \lambda x+(2\lambda-1)y=\lambda \end{cases} \quad \iota\sigma\tau. \begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases}$$

$$\iota\zeta. \begin{cases} (\lambda+1)x+2\lambda y=2 \\ 2\lambda x+(\lambda+1)y=\lambda+1 \end{cases} \quad \iota\eta. \begin{cases} (\lambda^2-1)x-y=3\lambda \\ 3x-y=8-\lambda \end{cases}$$

8. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{P}$, ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda + 4)x + (2\lambda + 1)y = 3\lambda - 1 \\ (3\lambda + 7)x + (5\lambda + 1)y = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

α. να έχει μία λύση **β.** να είναι αδύνατο **γ.** να είναι αδύνατο

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{P}$, ώστε τα ακόλουθα συστήματα να είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\begin{cases} (\alpha + 3)x + 4y = 4 \\ \alpha x + \alpha y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (\alpha - 2)x + 3y = 2 \\ -x + (\alpha + 2)y = \alpha + 1 \end{cases}$$

10. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ για τις οποίες τα ακόλουθα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\begin{cases} (\mu + 1)x + \lambda y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -(\mu + 1)x + (\lambda + 1)y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

11. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x + \lambda y = 4\lambda + 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του, τότε να λυθεί η εξίσωση: $x - 5x_0 \cdot x + y_0 = 0$.

12. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + \mu y = 2 \\ -4\mu x + \lambda y = 5 \end{cases}$ και η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \mu^2 = 0$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μία μοναδική λύση, αν και μόνον αν, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

13. α. Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{P}$:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y = 1 \\ -x + \lambda y = 2 - y \end{cases}$$

β. Για τη μοναδική λύση (x_0, y_0) , που βρήκατε στο (α), να υπολογίσετε το λ , ώστε: $y_0 - 2x_0 > 1$.

3. Ορίζουσες

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x$$

$$\beta. \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x \\ 1-x+x^2 & 1-x \end{vmatrix} = 16$$

$$\gamma. \begin{vmatrix} x & -2 \\ x & x \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5$$

$$\delta. \begin{vmatrix} 10 & \sqrt{10x} \\ \sqrt{10x} & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\epsilon. \begin{vmatrix} 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{11} - 2x \end{vmatrix} = 0$$

15. Να λυθεί η ανίσωση :

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 3x + 4$$

16. Να λυθεί η ανίσωση :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+x}} \end{vmatrix} \leq 0$$

17. Αν η εξίσωση $\lambda^2 (x - 1) = x - 3\lambda + 2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας: $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda+3 \\ \lambda+1 & 4\lambda \\ 4\lambda & \lambda^2-1 \end{vmatrix}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^{-\nu} \cdot f(x)$ όπου ν φυσικός αριθμός. Αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in P$, τέτοιοι ώστε $g(\kappa) = g(\lambda)$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} \kappa^\nu & f(\kappa) \\ \lambda^\nu & f(\lambda) \end{vmatrix}$$

19. Δίνεται το γραμμικό 2×2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = D(2D_x - 4D_y - 5D)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

- 20.** Δίνεται το γραμμικό 2×2 σύστημα με ορίζουσες D , D_x , D_y . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 4D(D_x - D_y) + 2DD_y$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

- 21.** Δίνεται το γραμμικό 2×2 σύστημα με ορίζουσες D , D_x , D_y . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + 2D^2 = 2(D_x - D + DD_y + 1)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

- 22.** Έστω γραμμικό σύστημα 2×2 , με αγνώστους x , y , το οποίο έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει ότι:

$$\begin{cases} 2D_x + D_y = 5D \\ 3D_x - 2D_y = 4D \end{cases}$$

να βρεθεί η λύση αυτή.

- 23.** Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2ax + \beta = 0$, με $a, \beta \in \mathbb{P}$, αν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} + 4 = 0$$

4. Συστήματα 3×3 και κάτι ψιλά

- 24.** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 2z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 4x - y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - \frac{2}{3}z = 9 \end{cases}$$

- 25.** Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα:

$$\alpha. \begin{cases} 20x + y = 1 \\ y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = 16 \end{cases}$$

26. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x + 4z = 3 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} 3x + y - z = 11 \\ 4y + 3z = 10 \\ 2z = 4 \end{cases} \quad \epsilon. \begin{cases} 2x + \frac{4}{5}y - 3\omega = 8 \\ x - y + 2\omega = -3 \\ 0,6x + 0,3y - 0,5\omega = 1,6 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} x + 2y + 4\omega = 1 \\ -x + 3y + 6\omega = 2 \\ -2x + y + 2\omega = 3 \end{cases} \quad \zeta. \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

27. Να λύσετε τα παρακάτω ομογενή συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ x + 3y + 7z = 0 \\ x + 5y + 5z = 0 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} 3x + 3y + 5\omega = 0 \\ 3x + 5y + 9\omega = 0 \\ 5x - 9y + 17\omega = 0 \end{cases}$$

28. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + 2y + 6z = -1 \\ 5x + 2y + 3z = -6 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x - z + 4\omega + 5\varphi = 4 \\ y - 2\omega - \varphi = 1 \\ -x + 5z - 12\omega - 17\varphi = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
 \gamma. \begin{cases} x+y+\varphi+\omega=12 \\ x+\varphi=1 \\ y+x=2 \\ y+\omega=3 \end{cases} & \delta. \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases} & \epsilon. \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2} \\ \frac{\beta+\gamma}{2}=3 \\ \frac{\gamma+\delta}{2}=4 \\ \frac{\delta+\epsilon}{2}=3 \\ \frac{\epsilon+\alpha}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} \\
 \\
 \sigma\tau. \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=2 \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=3 \end{cases} & \zeta. \begin{cases} 2x-3y+2\omega=9 \\ 4x+y-3\omega=11 \end{cases} &
 \end{array}$$

5. Μη Γραμμικά Συστήματα

29. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 3x+y=6 \\ xy=3 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x-3y=1 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} (3x+2)\cdot(x-y)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x+y+xy=7 \\ xy(x+y)=12 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} x^2+y^2-xy=57 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{5}{2} \\ x+y=1 \end{cases}$$

30. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} x^3 + 8y^4 = 0 \\ \frac{3}{2}x^3 + 10y^4 = -2 \end{cases}$$

31. Να λυθούν τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x\sqrt{5} + 4y = \sqrt{5} - 1 \\ y - x = \sqrt{5} \end{cases}$$

δ.
$$\begin{cases} x + 2\sqrt{3} \cdot y = 1 \\ \sqrt{3} \cdot x + 6y = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

ε.
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \sqrt{2}x + 4y = 8 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$



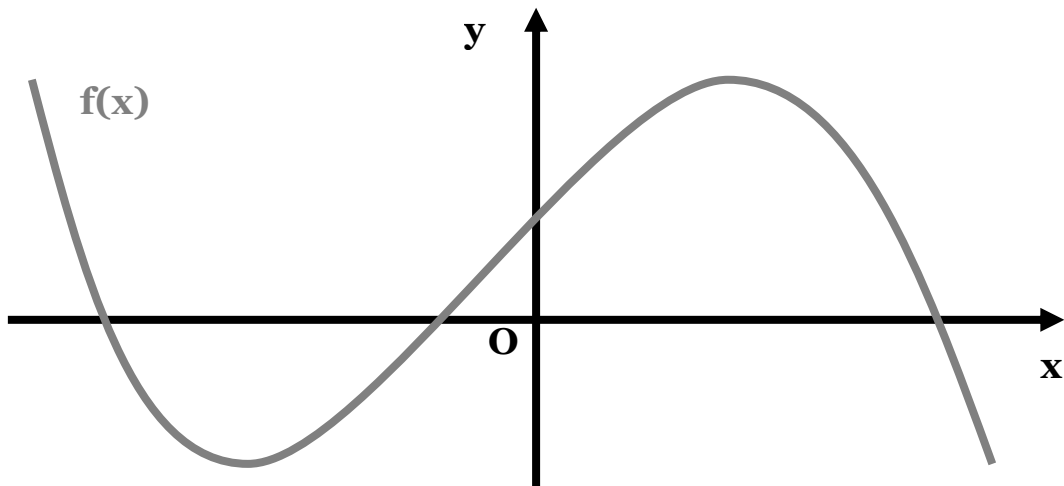
Συναρτήσεις

«Με κοιτάζεις στα μάτια και περιμένεις,
μια κίνηση, στα χείλη μου μια λέξη.
Δίχως εμένα ήσουν άγραφο χαρτί,
δίχως εσέ, ήμουν παιδί δίχως παιδί να παίξει».



1. Μονοτονία Συνάρτησης

Παρατηρώντας τη **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι δυνατόν, κατά τμήματα, άλλοτε να «ανεβαίνει» (αυξάνει) κι άλλοτε να «κατεβαίνει» (φθίνει).



Για να ξεφύγουμε, όμως, από τη σχετικότητα της ανθρώπινης ματιάς (αν κοιτάξουμε αντίστροφα εκείνο που πριν ανηφόριζε, τώρα θα κατηφορίζει!) οφείλουμε να δώσουμε έναν αυστηρότερο ορισμό, του τι ακριβώς σημαίνει πως μια συνάρτηση «αυξάνει» ή «φθίνει».

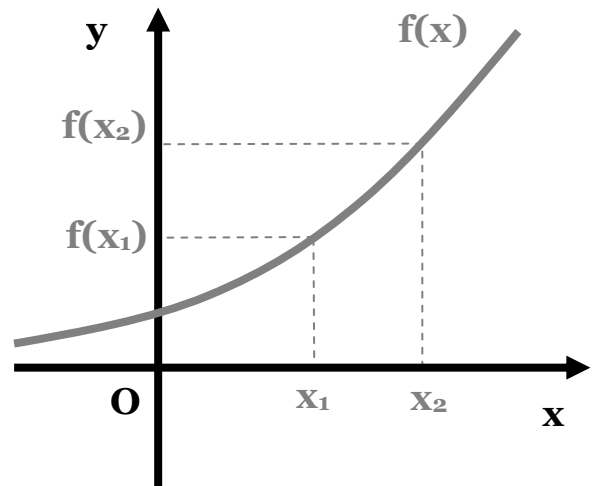
Γνησίως Αύξουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία: ↗

Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του x , καθώς κι εκείνες της $f(x)$, μεταβάλλονται με τον **ίδιο** ακριβώς τρόπο: αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και τ' άλλο, μειώνεται το ένα, μειώνεται και τ' άλλο.



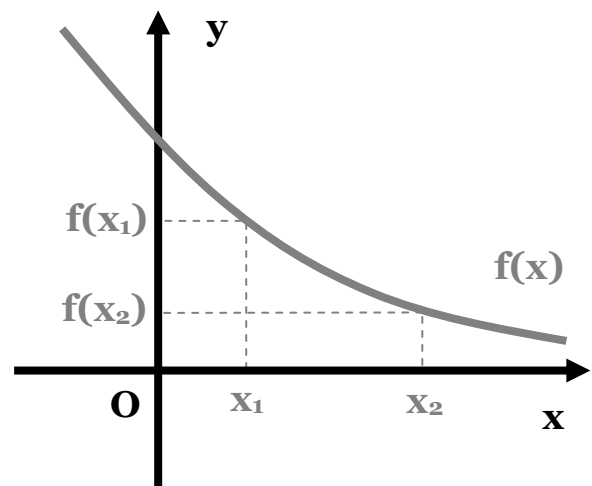
Γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία: $\searrow$

Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του x μεταβάλλονται με ακριβώς τον **αντίστροφο** τρόπο, από τις τιμές της $f(x)$: αυξάνεται το ένα, μειώνεται το άλλο, μειώνεται το ένα, αυξάνεται το άλλο.



Μονοτονία

Η συμπεριφορά αυτή μιας συνάρτησης ονομάζεται **μονοτονία** κι η συνάρτηση - εφόσον είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα - **γνησίως μονότονη**.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από τη σχέση $x_1 < x_2$ και στη συνέχεια να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, και στα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

πχ. Θέλουμε να εξετάσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = -3x + 5$, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ειδικότερα:

■ Αν πρόκειται για την **ευθεία** $f(x) = \alpha x + \beta$, η μονοτονία εξαρτάται αποκλειστικά από το συντελεστή του x (= συντελεστής διεύθυνσης):

- αν $\alpha > 0$ τότε $f(x) \nearrow$ σε όλο το $\mathbb{R}$.
- αν $\alpha < 0$ τότε $f(x) \searrow$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

■ Αν πρόκειται για την **παραβολή** $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ τότε:

- Αν $\alpha > 0$:

$$f(x) \searrow \text{ στο διάστημα } \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \text{ και } \nearrow \text{ στο } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση «**στρέφει τα κοίλα άνω**».

- Αν $\alpha < 0$:

$$f(x) \nearrow \text{ στο διάστημα } \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \text{ και } \searrow \text{ στο } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση «**στρέφει τα κοίλα κάτω**».

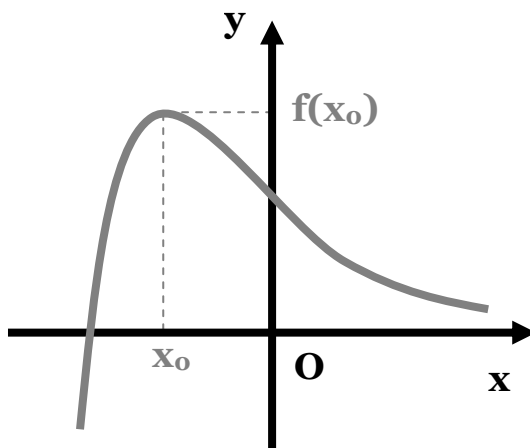
2. Ακρότατα Συνάρτησης

Ομοίως, παρατηρώντας μια γραφική παράσταση, πιθανότατα, να αντιληφθούμε πως κάποια σημεία βρίσκονται **ψηλότερα** ή **χαμηλότερα** από τα υπόλοιπα. Άλλοτε από όλα τα υπόλοιπα σημεία κι άλλοτε, πάλι, μόνο από τα γειτονικά τους. Τα σημεία αυτά - η μάλλον ορθότερα, οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση στα σημεία αυτά - ονομάζονται, αντίστοιχα, **μέγιστο** ή **μέγιστη τιμή** και **ελάχιστο** ή **ελάχιστη τιμή** της συνάρτησης.

(Ολικό) Μέγιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο** όταν, για κάθε $x \in A$:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

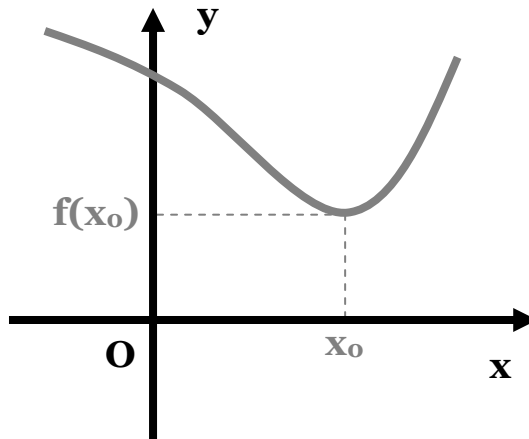


Η έκφραση, που συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε, έχει ως εξής: «**Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση (ή στο σημείο) x_0 την τιμή $f(x_0)$** ».

(Ολικό) Ελάχιστο

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν, για κάθε $x \in A$:

$$f(x) \geq f(x_0)$$



Όμοια με πριν, η έκφραση που χρησιμοποιούμε είναι: «**Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση (ή στο σημείο) x_0 την τιμή $f(x_0)$** ».

Ακρότατα

Το (ολικό) **μέγιστο** και το (ολικό) **ελάχιστο** μιας συνάρτησης ονομάζονται, με μια λέξη, (ολικά) **ακρότατα** της συνάρτησης.

Μεθοδολογία

Για την εύρεση (εφόσον υπάρχει) της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης, ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από μια ανισοτική σχέση, η οποία είναι προφανής (πχ. $x^2 \geq 0$) και στη συνέχεια να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, σ' ένα απ' τα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 5 - x^2$, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο (και να βρεθεί).

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι: } x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, την τιμή 5.

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (και να βρεθεί).

$$\text{Είναι: } f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$$

Όμως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, την τιμή 2.

Ειδικότερα:

■ Αν πρόκειται για την **παραβολή** $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ τότε:

- Αν $\alpha > 0$:

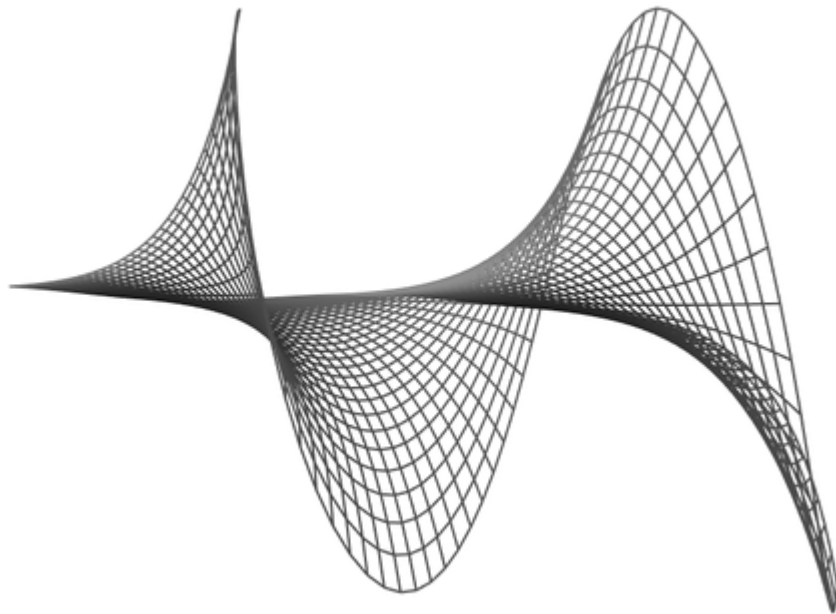
Η $f(x)$ παρουσιάζει (ολικό) **ελάχιστο** στο σημείο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

το $f(x_0) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

- Αν $\alpha < 0$:

Η $f(x)$ παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο** στο σημείο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το

$f(x_0) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.



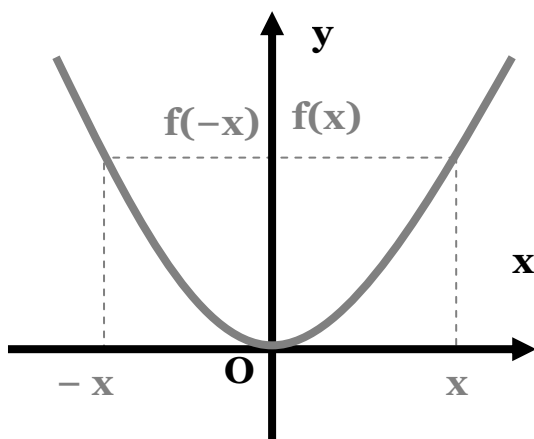
3. Συμμετρία Συνάρτησης

Μία συνάρτηση μπορεί να έχει διάφορες συμμετρίες. Εδώ θα εξετάσουμε δύο βασικές: τη συμμετρία ως προς τον **άξονα $y'y$** (αξονική συμμετρία) και τη συμμετρία ως προς την **αρχή των αξόνων** (κεντρική συμμετρία).

Άρτια

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

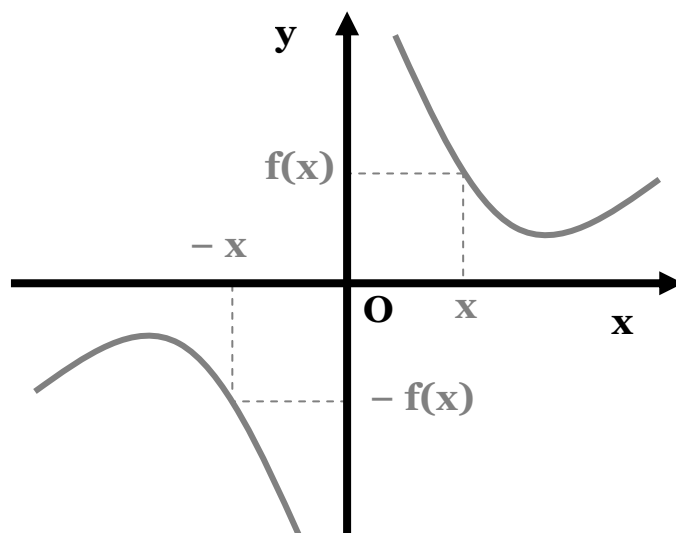


- Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν πάντα **άξονα συμμετρίας** τον $y'y$. Ένας πρακτικός / οπτικός τρόπος, για να γίνει αυτό αντιληπτό, είναι να διπλώσουμε (νοητικά) το χαρτί, κατά μήκος του άξονα $y'y$. Τότε, θα πρέπει το τμήμα της γραφικής παράστασης, που βρίσκεται δεξιά να έρθει και να συμπίπτει, ακριβώς, με το τμήμα που βρίσκεται στ' αριστερά.

Περιττή

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$



- Οι περιττές συναρτήσεις έχουν πάντα **κέντρο συμμετρίας** την **αρχή των αξόνων**, δηλαδή το σημείο $(0, 0)$. Ένας πρακτικός / οπτικός τρόπος, για να γίνει αυτό αντιληπτό, είναι πως αν περιστρέψουμε (νοητικά) το σχήμα, κατά 180° , θα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητο.

Μεθοδολογία

Για την εύρεση (εφόσον υπάρχει) της συμμετρίας μιας συνάρτησης, είναι απαραίτητες, πάντα, οι εξής ενέργειες:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης κι εξετάζουμε αν για κάθε στοιχείο περιλαμβάνει και το αντίθετό του, δηλαδή αν για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$.

Πρακτικά, ένα τέτοιο πεδίο ορισμού θα πρέπει να είναι συμμετρικό από μόνο του, δηλαδή να έχει μια από τις παρακάτω μορφές ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\mathbb{R}, (-\alpha, \alpha), [-\alpha, \alpha], (-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, \infty), (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$$

- Θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης, όπου x το $-x$. Στο τέλος, αφού ολοκληρώσουμε όλες τις δυνατές πράξεις και ιδιότητες, βλέπουμε αν έχουμε καταλήξει στον αρχικό τύπο $f(x)$, οπότε η συνάρτηση είναι άρτια, ή στο $-f(x)$, οπότε είναι περιττή. Μια συνάρτηση, πιθανότατα, να μην έχει καμία από τις δύο συμμετρίες.

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 9|x|$ είναι άρτια.
Το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^4 - 9|-x| = x^4 - 9|x| = f(x)$$

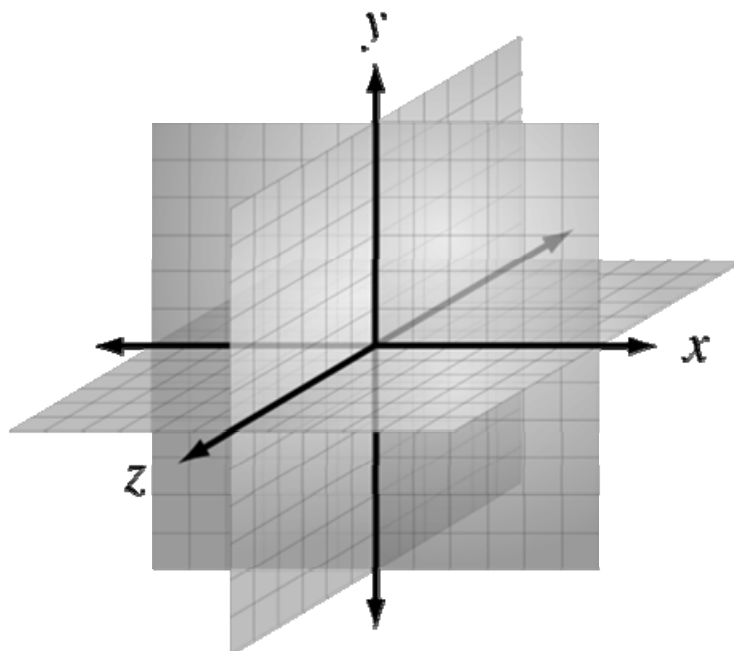
Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι άρτια .

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ είναι περιττή.

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}^*$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -x^3 + \frac{1}{x} = -\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι περιττή .



4. Μετατόπιση Συνάρτησης

Πολύ συχνά, κατασκευάζοντας της γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για μια απλούστερη συνάρτηση, η οποία έχει απλά μετακινηθεί κατά μήκος των αξόνων, άλλοτε κατακόρυφα και άλλοτε οριζόντια.

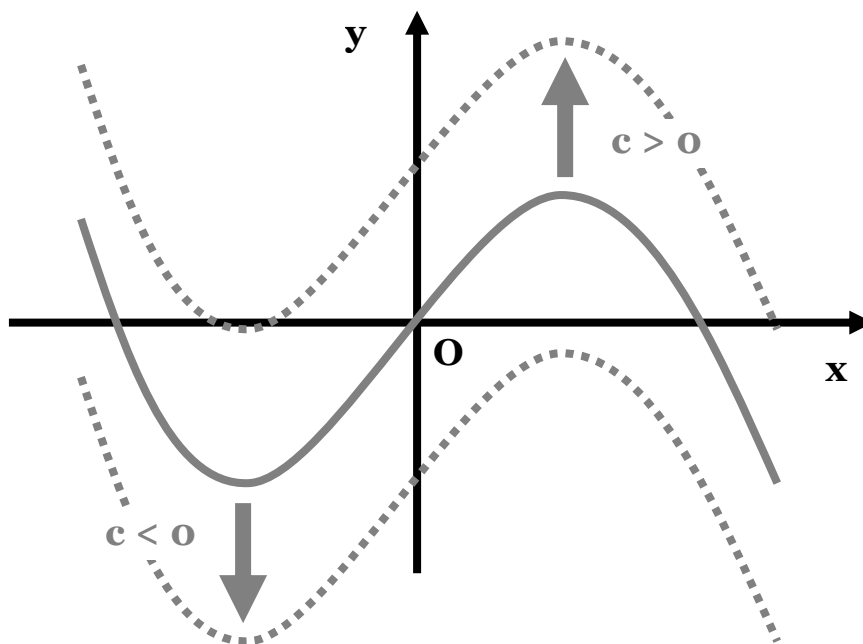
Θα πρέπει, με τον καιρό, να εξασκηθούμε στην παρατήρηση των συναρτήσεων, έτσι ώστε να αντιλαμβανόμαστε πώς μικρές μετατροπές στον τύπο της επηρεάζουν τη συμπεριφορά και τη γραφική της παράσταση.

Κατακόρυφη Μετατόπιση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x) = \varphi(x) + c$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x)$ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** αν $c > 0$ ή **προς τα κάτω** αν $c < 0$.

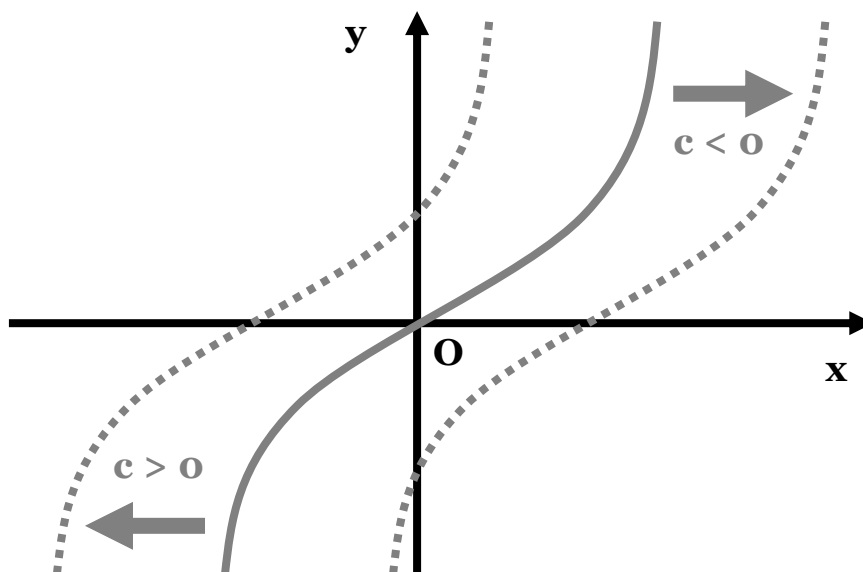


Οριζόντια Μετατόπιση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x) = \varphi(x + c)$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x)$ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** αν $c > 0$ ή **προς τα δεξιά** αν $c < 0$.



Προσοχή!!!

Παρατηρούμε ότι στην **οριζόντια** μετατόπιση η μεταβολή είναι **αντίθετη** από εκείνο, που θα μας φαινόταν «εύλογο»: αριστερά για θετικό προσθετέο ή δεξιά για αρνητικό!





1. Μονοτονία

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2x + 3$

β. $f(x) = 2 - \sqrt{3x-1}$

γ. $f(x) = \sqrt{x+1} + 3$

δ. $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

ε. $f(x) = \frac{2}{x} + 1$

στ. $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

ζ. $f(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$

η. $f(x) = 2|x-1| + 3\sqrt{(x-2)^2}$

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα κάθε φορά διαστήματα:

α. $f(x) = x(4-x)$ στο $(-\infty, 2]$

β. $f(x) = x^2 - 5x$ στο $(\frac{9}{2}, +\infty)$

γ. $f(x) = 2x^4 + 3$ στο $(0, +\infty)$

δ. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ στο $[-2, 0)$

ε. $f(x) = 2x^3 + 1$ στο $(-\infty, 0]$

στ. $f(x) = x^4 + 2$ στο $(0, +\infty)$

ζ. $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$ στο $(0, +\infty)$

η. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ στο $(-\infty, 1)$

θ. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ στο $[0, +\infty)$

ι. $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ στα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0]$ και $(0, +\infty)$

3. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ και, στη συνέχεια, να κατατάξετε από τη μικρότερη προς το μεγαλύτερη τις τιμές:

$$f(0,5), f(1/3), f(-10), f(-2), f(1), f(0), f(-0,8), f(\sqrt{2}), f(1,5), f(\sqrt{3})$$

4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο, τον άξονα $x'x$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (|\lambda| - 3)x + 10$. Να προσδιοριστεί ο λ , ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

6. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση:

$$f(x) = |\alpha + 1|x + 3(2 - x)$$

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{2014}{2015}$ και $\frac{2013}{2014}$.

2. Ακρότατα

8. Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$

β. $f(x) = -2x^2 + 2$

γ. $f(x) = 1 - \sqrt{2x + 3}$

δ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

ε. $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

στ. $f(x) = |x - 5|$

9. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x$

β. $f(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

10. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = |x - 4| + 3$

β. $f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$

γ. $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$

11. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$.

12. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα διαστήματα:

α. $f(x) = x^2 + 3$ στο $[-2, -1]$

β. $f(x) = 2\sqrt{3-x^2} + 3$ στο $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

γ. $f(x) = \sqrt{7+\sqrt{6-x}}$ στο $[2, 5]$

δ. $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2-4}+2}$ στο $(-\infty, -2]$

13. Να προσδιοριστεί ο κ , έτσι ώστε όταν η συνάρτηση $f(x) = (3\kappa + 1) \cdot x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο, τότε για την ίδια τιμή του x , η συνάρτηση $g(x) = (3 - |\kappa + 2|) \cdot x^2$ να παρουσιάζει μέγιστο.

14. Να προσδιοριστεί ο μ , έτσι ώστε για τις τιμές που η εξίσωση $2\mu x - 3 = x$ έχει αρνητική λύση, η συνάρτηση $f(x) = (1 - |3\mu + 1|)x^2$ να παρουσιάζει μέγιστο.

3. Συμμετρία

15. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτε από τα δύο:

α. $f(x) = x^2|x|$

β. $f(x) = x|x|$

γ. $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$

δ. $f(x) = x|x| + 3$

ε. $f(x) = x^3 - x|x|$

στ. $f(x) = x(1 - |x|) + 1$

ζ. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

η. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+8}$

θ. $\frac{x^3+x}{x^2+1}$

ι. $f(x) = \frac{x^5+x^3}{x^2+1}$

ια. $f(x) = 2x^3 - x + 1$

ιβ. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$

$$\text{ιγ. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2}$$

$$\text{ιδ. } f(x) = x^2 \sqrt{9 - x^2}$$

$$\text{ιε. } x^3 + x, \text{ με } f: (-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

16. Ομοίως:

$$\text{α. } f(x) = |x+1| + |x-1| + 2$$

$$\text{β. } f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$$

$$\text{γ. } f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$\text{δ. } f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{ε. } f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2} + x \cdot \sqrt[3]{(2+x)^2}$$

17. Ομοίως:

$$\text{α. } f(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 0 \\ x+1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{β. } f(x) = \begin{cases} -3x+4 & , x < 0 \\ 3x+4 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\text{γ. } f(x) = \begin{cases} -2x+7 & , x < -1 \\ -2x-7 & , x > -1 \end{cases}$$

$$\text{δ. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + x + 1} & , x < 0 \\ \frac{x^2 + x + 5}{x^2 - x + 1} & , x > 0 \end{cases}$$

18. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συγχρόνως άρτια και περιττή. Να δείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Να δείξετε ότι:

$$\text{α. } f(0) = 0$$

$$\text{β. } \text{Η } f \text{ είναι περιττή}$$

20. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Είναι δυνατόν η f να είναι περιττή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

21. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ είναι άρτια.

22. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια τότε να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι άρτια, περιττή ή τίποτα απ' τα δύο.

4. Μετατόπιση

23. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα αξόνων:

α. $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 3)^2$, $f(x) = x^2 + 3$

β. $f(x) = |x|$, $f(x) = |x + 2|$, $f(x) = |x| - 1$

γ. $f(x) = x^3$, $f(x) = 4x^3$, $f(x) = (x + 2)^3$

24. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = (x + 1)^2 - 3$

β. $f(x) = |1 - x| + 1$

γ. $f(x) = (x - 1)^3 - 2$

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 5 - x^2$. Να βρείτε τη συνάρτηση προκύπτει $g(x)$, η οποία προκύπτει σε καθεμία από τις παρακάτω μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f .

α. κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

β. κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

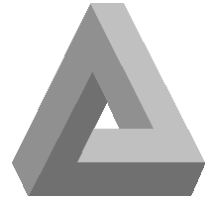
γ. κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω.

δ. κατά -3 μονάδες οριζοντίως και 3 μονάδες κατακορύφως.

ε. κατά 1 μονάδα οριζοντίως και -1 μονάδα κατακορύφως.

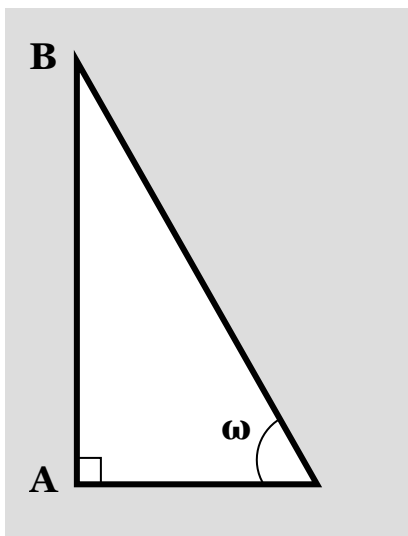


Τριγωνομετρία



«Αυτό το πρόβλημα, τούτ' η μεγάλη συμφορά
για να λυθεί χρειάζεται, δίχως αμφιβολία,
όπως κοιτάζω απ' τη δική σου την πλευρά,
να δεις κι εσύ απ' τη δική μου τη γωνία».

1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



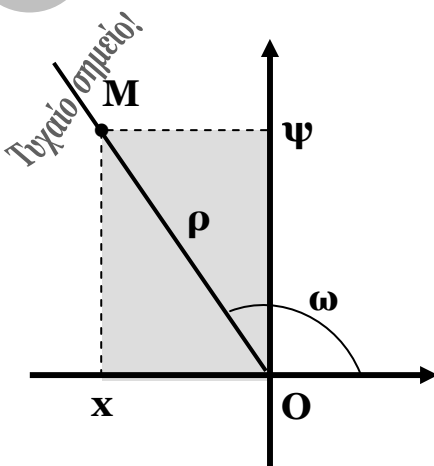
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$

2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας



$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

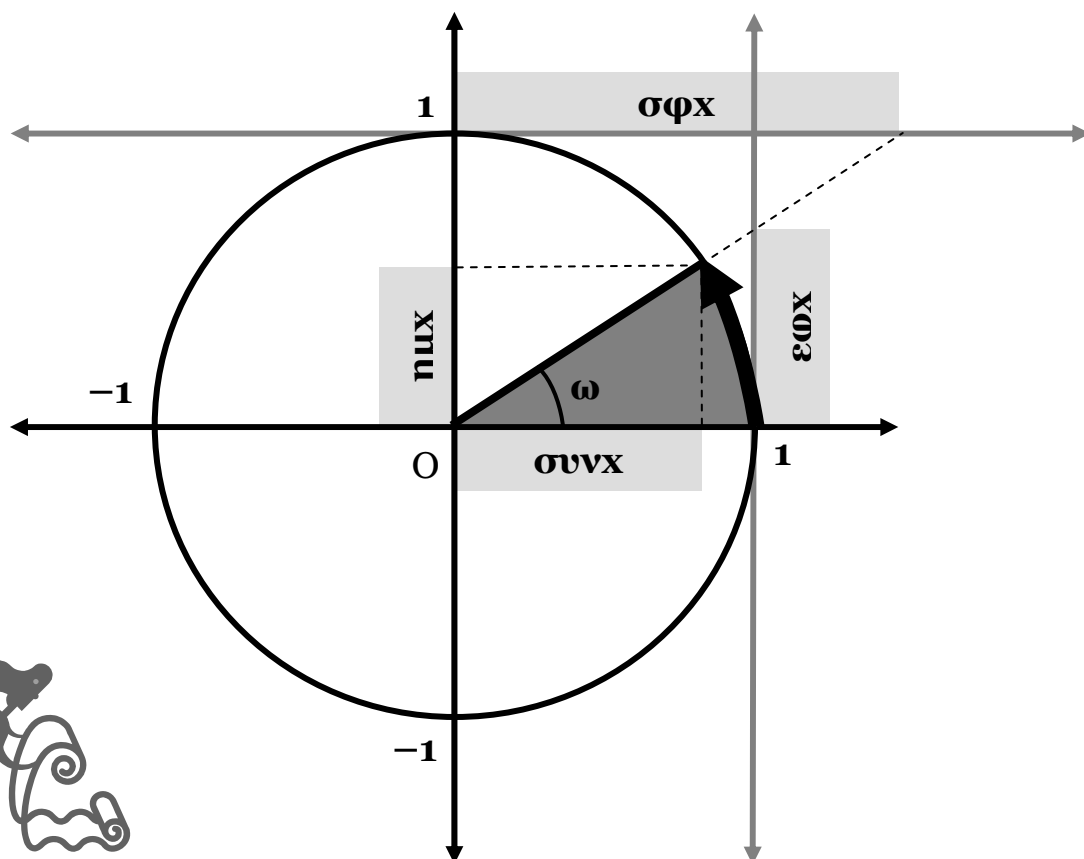
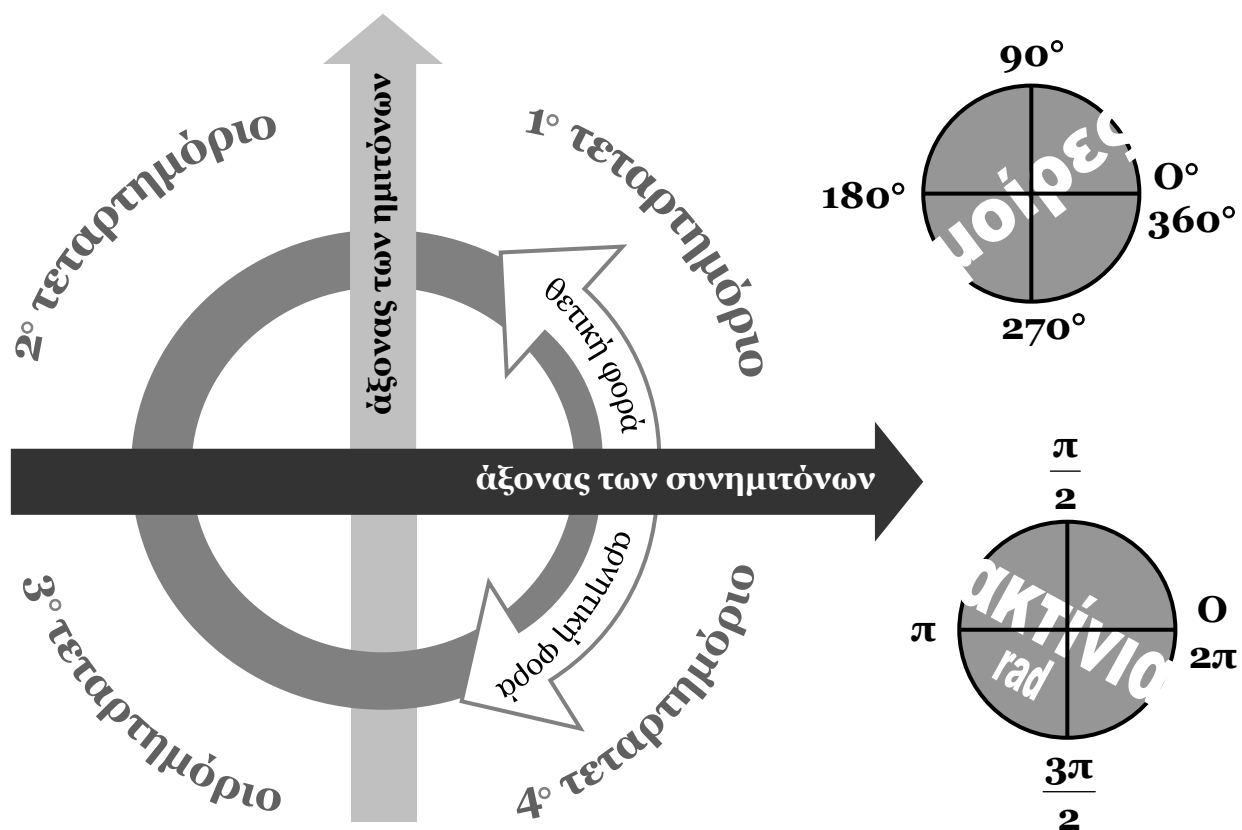
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{\psi} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{τεταγμένη του M}}$$

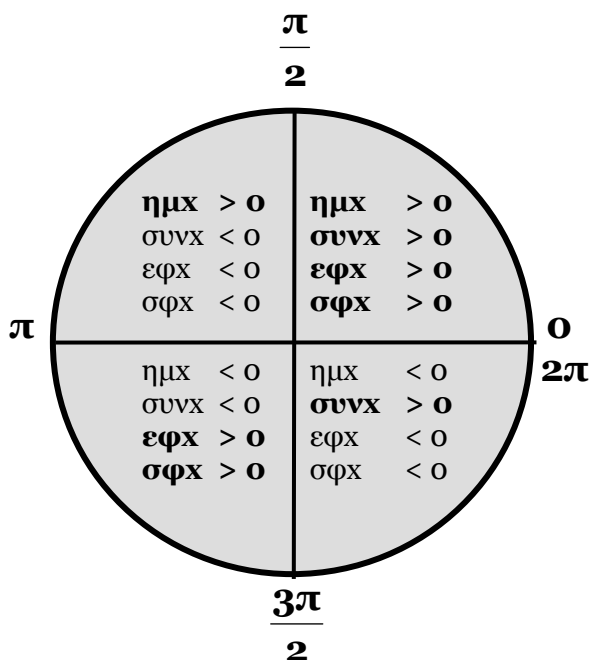


3. Ο τριγωνομετρικός κύκλος

$$\rho = 1$$



4. Πρόσημο τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Μνημονικός κανόνας
Ο Η Ε Σ

Ο = Όλα θετικά
Η = Ημίτονο θετικό
Ε = Εφαπτομένη θετική
(και συνεφαπτομένη)
Σ = Συνημίτονο θετικό

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	30°	45°	60°	0°	90°	180°	270°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	-	0	-
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-	0	-	0

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad 180^\circ = \pi \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

6. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\epsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\epsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

Επίσης, πολύ χρήσιμες είναι οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\varphi^2 x}{1 + \epsilon\varphi^2 x} \quad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x}$$

7. Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

ίδιο συνημίτονο

ΓΩΝΙΕΣ ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ

$$x, -x$$

$$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$$

$$\epsilon\varphi(-x) = -\epsilon\varphi x$$

$$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$$

εναλλάξ

ΓΩΝΙΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ

$$x, \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\varphi x$$

ίδιο ημίτονο

ΓΩΝΙΕΣ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ

$$x, \pi - x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$$

$$\epsilon\varphi(\pi - x) = -\epsilon\varphi x$$

$$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$$

ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ π

$$x, \pi + x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\epsilon\varphi(\pi + x) = \epsilon\varphi x$$

$$\sigma\varphi(\pi + x) = \sigma\varphi x$$

ίδια εφαπτομένη & συνεφαπτομένη

Ένας μνημονικός κανόνας



Πολλαπλάσια του π

Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και γενικά πολλαπλάσια του π τότε έχουν ομώνυμους (ίδιους) τριγωνομετρικούς αριθμούς. Για τον υπολογισμό του προσήμου χρειάζεται να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο. Σκεφτόμαστε ειδικότερα:

- α. Τα **περιττά** πολλαπλάσια του π καταλήγουν πάντα στο π του τριγωνομετρικού κύκλου, συνεπώς χρησιμοποιούμε τη θέση αυτή για σημείο αναφοράς.
- β. Τα **άρτια** πολλαπλάσια του π είναι απλά πολλαπλάσια ολόκληρων κύκλων, συνεπώς απλά τα αγνοούμε.

Πολλαπλάσια του $\pi/2$

Όταν δύο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά $\pi/2, 3\pi/2$ και γενικά (περιττά) πολλαπλάσια του $\pi/2$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται (ημ με συν και εφ με σφ). Για να βρούμε το πρόσημο, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος, που μας δίνεται, με το 4 (έτσι βρίσκουμε και απορρίπτουμε τους παραπανίστους κύκλους) και κρατάμε το υπόλοιπο. Αν το τελευταίο είναι 1 τότε πηγαίνουμε στο $\pi/2$, αν είναι 3 στο $3\pi/2$.

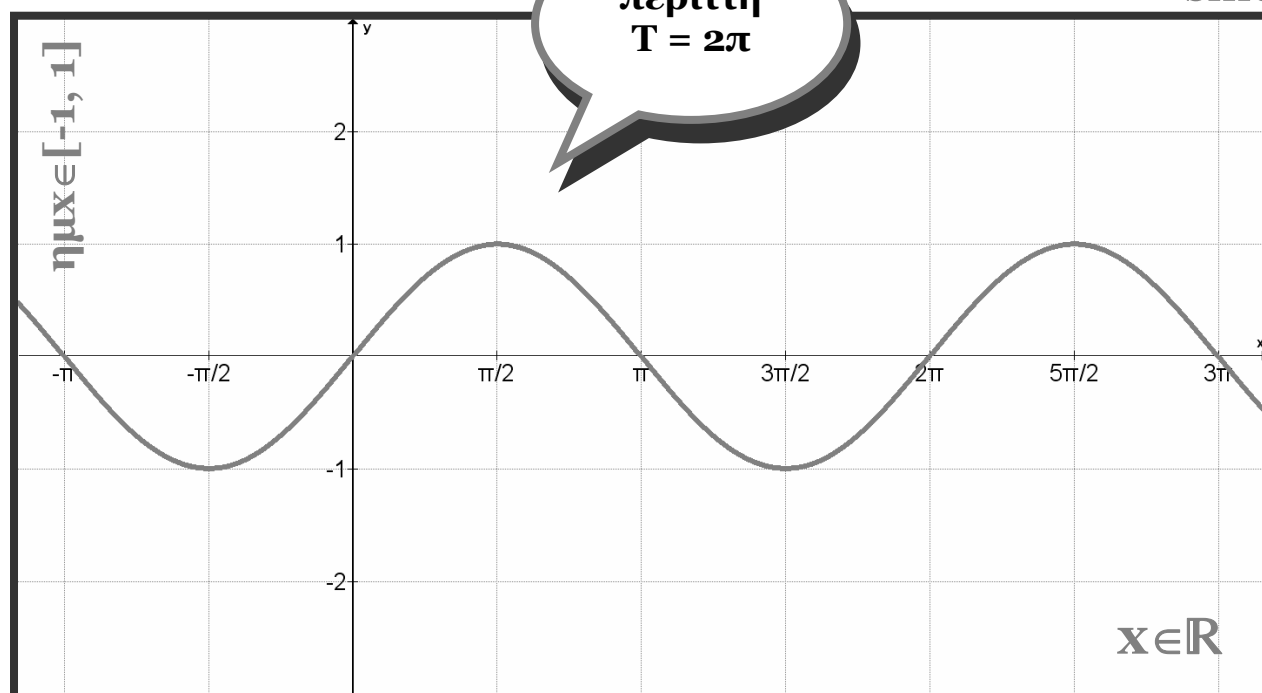
Παρατήρηση: Για **άρτια** πολλαπλάσια του $\pi/2$ εκτελούμε απλά τη διαίρεση με το 2 και αναγόμεστε σε πολλαπλάσιο του π .

8. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$f(x) = \eta\mu x$$

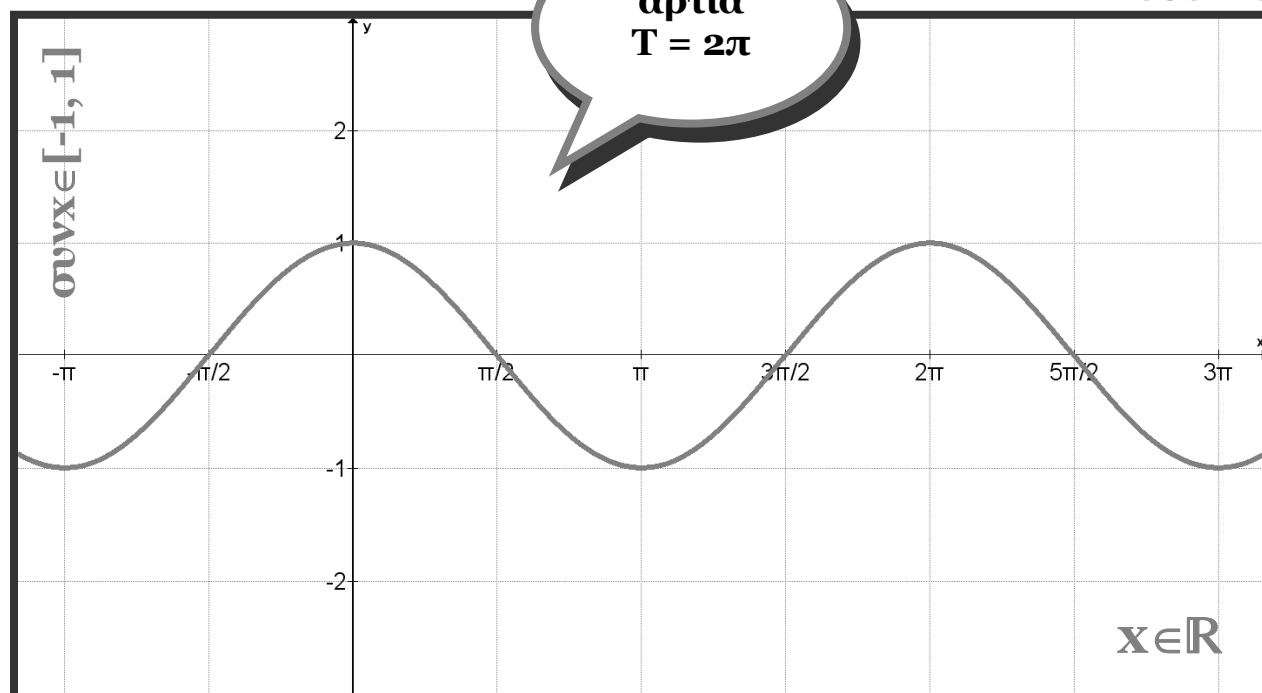
$$\sin(x)$$

sine



$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

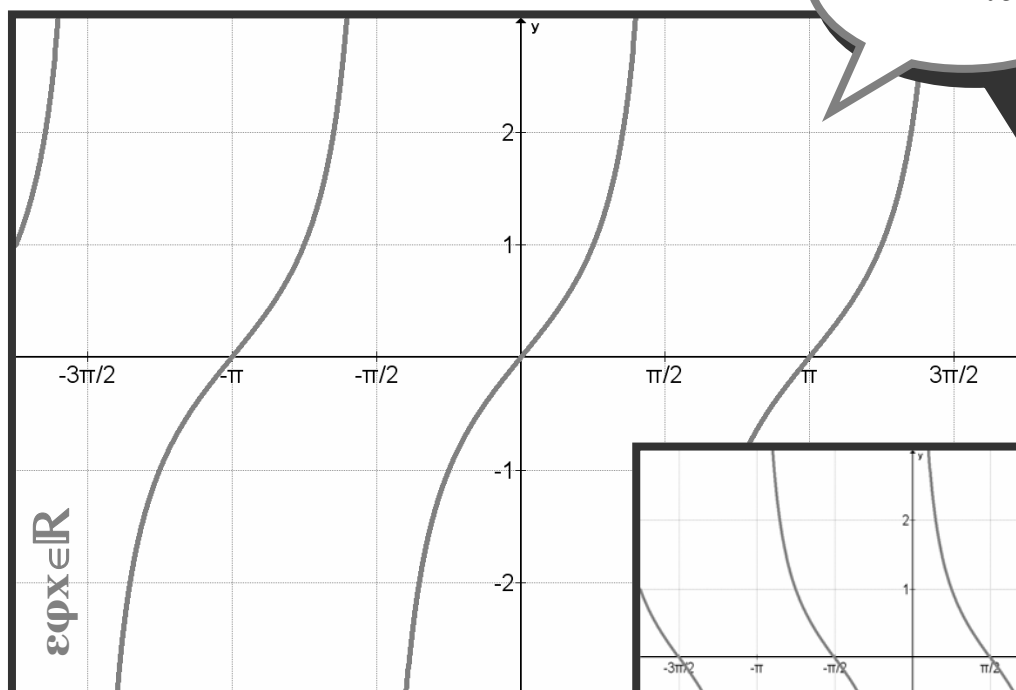
$\cos(x)$
cosine



$$f(x) = \epsilon\phi x$$

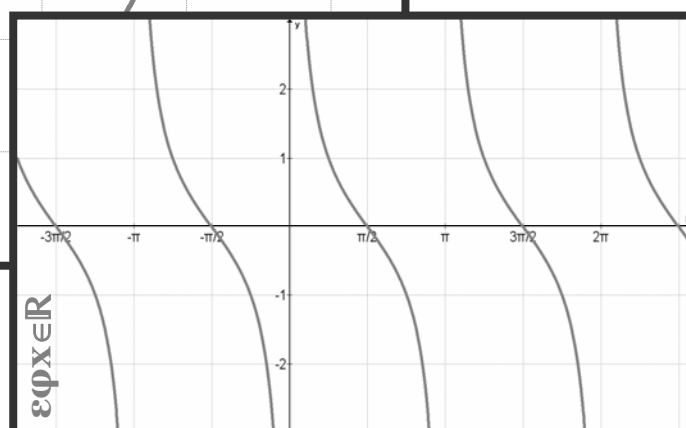
$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

περιττή
 $T = \pi$



$$f(x) = \sigma\phi x$$

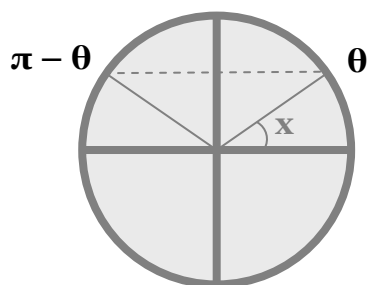
$$x \in \mathbb{R} - \{ \kappa\pi \}$$



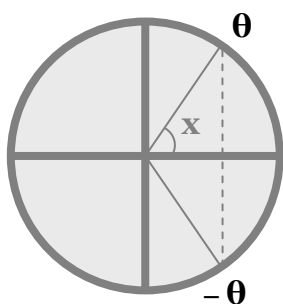
$\tan(x)$
tangent

$\cot(x)$
cotangent

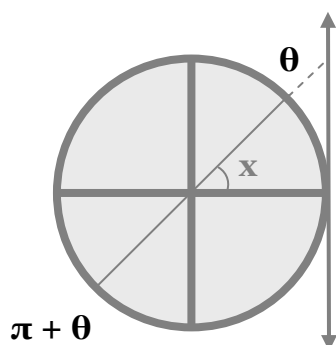
9. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις



$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$



$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

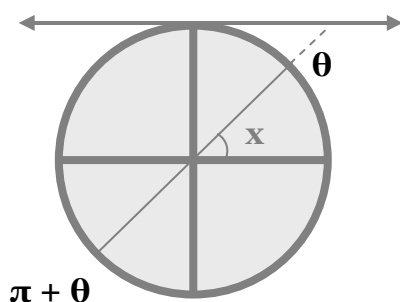


$$\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

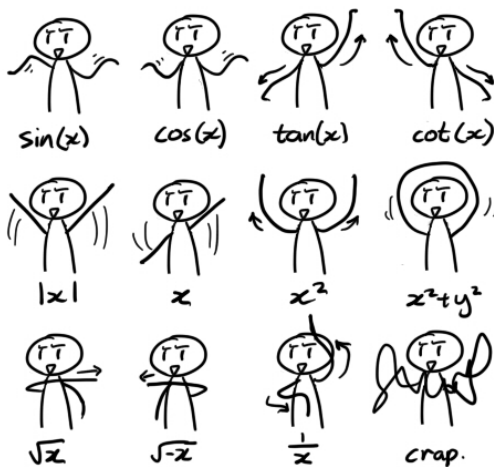
$$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \kappa\pi$$



Beautiful Dance Moves



Τριγωνομετρικές Εξισώσεις



1. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Αν η τριγωνομετρική εξίσωση έχει μια από τις παρακάτω βασικές μορφές τότε χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους τύπους επίλυσης, τους οποίους έχουμε αποστηθίσει ώστε να μην σπάμε τα νεύρα των καθηγητών μας, κάθε φορά που μας ρωτάνε:

$$\eta\mu x = \pm \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \pm \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta$$

$$\epsilon\phi x = \pm \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\phi x = \pm \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta \quad x \neq \kappa\pi$$

Παρατήρηση: Οι περιορισμοί που συνοδεύουν τους δύο τελευταίους τύπους απαιτούνται γιατί δεν ορίζεται για όλες τις γωνίες εφαπτομένη και συνεφαπτομένη. Αντιθέτως όλες οι γωνίες έχουν ημίτονο και συνημίτονο.

Ασκ.Φυλ. 1, 7 (σελ.18)

Αν στο ένα μέλος δεν έχουμε άμεσα τριγωνομετρικό αριθμό αλλά κάποιον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\eta\mu x = \pm \alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \pm \alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

$$\epsilon\phi x = \pm \alpha$$

$$\sigma\phi x = \pm \alpha$$

τότε, αφού καταλαγιάσει ο πανικός μας, αναζητούμε ψύχραιμα μία γωνία θ τέτοια ώστε ο αντίστοιχος τριγωνομετρικός της αριθμός να ισούται με α . Δύσκολο; Όχι βέβαια, αφού για καλή μας τύχη οι ασκήσεις είναι φτιαγμένες έτσι ώστε να προκύπτει κάποιο απ' τα νούμερα με τα οποία είμαστε εξοικειωμένοι απ' τα σκονάκια μας πχ. 1,

0, -1, $\sqrt{3}/2$, $1/2$ κτλ. Τελικά, αναγόμενστε πάλι σε μια από τις προηγούμενες βασικές εξισώσεις.

Ασκ.Φυλ. 3 (σελ 18)

Γενικότερα, αν έχουμε μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού με άγνωστο ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό, τότε τη λύνουμε ως προς τον άγνωστο με τη πασίγνωστη σε όλους (;) διαδικασία (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, κτλ.), καταλήγοντας σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Ασκ.Φυλ. 5 (σελ.19)

Ειδικές περιπτώσεις

Ειδικότερα για τις παρακάτω περιπτώσεις, είναι επιθυμητό να υπάρχει μια άνεση στην εξαγωγή των συμπερασμάτων, αλλά και να μην υπάρχει δεν τρέχει και τίποτα:

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\epsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$$

$$\sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$$

Ασκ.Φυλ. 2 (σελ 18)

Περιπτώσεις αρνητικών πρόσημων

Σε περίπτωση που μπροστά από κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό υπάρχει αρνητικό πρόσημο, τότε χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα (σε περίπτωση που δεν υπάρχει αρνητικό πρόσημο, τότε δεν τον χρησιμοποιούμε):

$$- \eta\mu x = \eta\mu(-x)$$

$$- \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

$$- \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi(-x)$$

$$- \sigma\varphi x = \sigma\varphi(-x)$$

Ασκ.Φυλ. 4 (σελ.19)

2. Κανόνας συμπληρωματικών γωνιών

Αν η τριγωνομετρική εξίσωση έχει μία από τις παρακάτω μορφές, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα των συμπληρωματικών γωνιών καταλήγουμε σε μια ισοδύναμη εξίσωση με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό και στα δύο μέλη. Έτσι, αναγόμεστε σε μια εξίσωση της προηγούμενης κατηγορίας, που υποτίθεται ότι γνωρίζουμε:

$$\eta\mu x = \pm \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \pm \eta\mu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\epsilon\varphi x = \pm \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \pm \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sigma\varphi x = \pm \epsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \pm \sigma\varphi\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Ασκ.Φυλ. 8 (σελ.19)

3. Αλγεβρική εξίσωση ως προς ένα τριγωνομετρικό αριθμό

1ου βαθμού

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση αυτή λύνουμε την εξίσωση σύμφωνα με τα γνωστά σε όλους μας λάθη στα βήματα, τις πράξεις και τα πρόσημα (όπως δηλαδή σε κάθε πρωτοβάθμια εξίσωση με έναν άγνωστο), καταλήγοντας σε μια περίπτωση της 1ης κατηγορίας εξισώσεων.

Ασκ.Φυλ. 5 (σελ.19)

2ου βαθμού

Ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης, τα χάνουμε και με διαφορετικό τρόπο:

1) $\alpha \cdot \eta\mu^2 x + \beta = 0$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και στη συνέχεια $\pm$ τετραγωνική ρίζα.

Ασκ.Φυλ. 10 (σελ.20)

$$2) \alpha \cdot \eta \mu^2 x + \beta \cdot \eta \mu x = 0$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\eta \mu x$ και θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το 0.

Ασκ.Φυλ. 9 (σελ.20)

$$3) \alpha \cdot \eta \mu^2 x + \beta \cdot \eta \mu x + \gamma = 0$$

Δηλαδή, πλήρες τριώνυμο. Λύνεται κατά τα γνωστά με διακρίνουσα κτλ. Βοηθάει αν θέσουμε $\eta \mu x = y$ οπότε η εξίσωση παίρνει την πιο κατανοητή μορφή:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

Ασκ.Φυλ. 12 (σελ.21)

Εννοείται πως, χάρη συντομίας, οι παραπάνω μορφές ισχύουν και για τις αντίστοιχες εξισώσεις με συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, αλλά πού να πάει ο νους σας.

Παρατήρηση: Προσέχουμε όταν αντικαθιστούμε $\eta \mu x = y$ ή $\sigma \nu x = y$ να μην παραλείπουμε τον περιορισμό $-1 \leq y \leq 1$. Για την $\epsilon \phi x$ και $\sigma \phi x$ δεν υπάρχει αντίστοιχος περιορισμός.

3ου ή μεγαλύτερου βαθμού

Αν υπάρχει μόνο ένας τριγωνομετρικός αριθμός τότε λύνουμε ως προς αυτόν και στη συνέχεια βγάζουμε αντίστοιχης τάξης ρίζα, μια γελοία διαδικασία την οποία φυσικά αγνοούμε θανάσιμα (βλ. παρατήρηση πιο κάτω).

Ασκ.Φυλ. 10 (σελ.20)

Γενικότερα

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι όροι της εξίσωσης που περιέχουν άγνωστο, τους μεταφέρουμε όλους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε. Κατόπιν θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και λύνουμε ξεχωριστά, κάθε εξίσωση που προκύπτει. Πείθουμε τον εαυτό μας ότι μπορούμε να εκτελέσουμε όλα τα προηγούμενα χωρίς καμία βοήθεια!

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε τους κανόνες επίλυσης της $x^n = \alpha$.

$$n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Αν $n = \text{άρτιος}$ και $\alpha > 0$ τότε: $x = \pm \sqrt[n]{\alpha}$

2. Αν $n = \text{άρτιος}$ και $\alpha < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. Αν $v = \text{περιττός}$ και $a > 0$ τότε: $x = \sqrt[n]{a}$
4. Αν $v = \text{περιττός}$ και $a < 0$ τότε: $x = -\sqrt[n]{|a|}$

Κλασματικές εξισώσεις

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν δεν ξέρουμε πολύ κρίμα!) με το ΕΚΠ και έτσι οδηγούμαστε σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

4. Αλγεβρική εξίσωση με δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς

1ου βαθμού

Προσπαθούμε χωρίζοντας τους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς να αναχθούμε σε μια περίπτωση της δεύτερης κατηγορίας ασκήσεων. Αν δεν τα καταφέρουμε φυσικά ξαναπροσπαθούμε.

Αν το προηγούμενο δεν είναι εφικτό, δεν ανοίγουμε κατευθείαν την τηλεόραση ή τον υπολογιστή μας, αλλά μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε. Κατόπιν θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Ασκ.Φυλ. 6 (σελ. 19), 11 (σελ.20)

2ου βαθμού με $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$

Αντικαθιστούμε έναν από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που βρίσκονται υψωμένοι στο τετράγωνο, με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας: $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$. Με αυτόν τον τρόπο αναγόμεστε σε μια 2βάθμια εξίσωση με ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό, η οποία λύνεται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη κατηγορία ασκήσεων (απίστευτο; αυτή είναι η ομορφιά των μαθηματικών!).

Ασκ.Φυλ. 13 (σελ.21)

5. Άλλες μορφές

$$\sigma\upsilon\nu x = \pm a \cdot \eta\mu x, \eta\mu x = \pm a \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad (a \in \mathbb{R})$$

Σε κάθε περίπτωση, διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\eta\mu x$ ή $\sigma\upsilon\nu x$, αντίστοιχα. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$\sin x = \pm a \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\eta\mu x} = \pm a \cdot \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \pm a$$

$$\eta\mu x = \pm a \cdot \sin x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sin x} = \pm a \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \pm a$$

η οποίες λύνονται εύκολα, όπως οι εξισώσεις της πρώτης εθνικής κατηγορίας.

Παρατηρήσεις

1. Για να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο απαραίτητη προϋπόθεση είναι και στα δύο μέλη είτε οι γωνίες, είτε οι παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς να είναι ίσες.
2. Επειδή διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\eta\mu x$ ή $\sin x$ θα πρέπει $\eta\mu x$ ή $\sin x \neq 0$. Ωστόσο, αν ήταν πχ. στην 1^η περίπτωση $\eta\mu x = 0$, τότε θα ήταν επίσης: $\sin x = \pm a \cdot 0$ ή $\sin x = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού πρέπει απαραίτητα: $\eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1$. Συνεπώς, $\eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Ομοίως εξετάζουμε και τη δεύτερη περίπτωση).

Ασκ.Φυλ. 14 (σελ.21)

Σύνθετες μορφές με $\eta\mu x$, $\sin x$, $\epsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$

Στην περίπτωση αυτή, αναλύουμε την εφαπτομένη ή τη συνεφαπτομένη, σύμφωνα με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$, $\sigma\phi x = \frac{\sin x}{\eta\mu x}$. Κατόπιν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών με το ΕΚΠ και... ευχόμαστε να καταλήξουμε σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Ασκ.Φυλ. 15 (σελ.21), 17 (σελ.22)





1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

1. Ποιες από τις παρακάτω τιμές δε μπορεί να είναι ημίτονο γωνίας;

α. $\frac{1}{2}$ β. $-\frac{3}{2}$ γ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ. $-\frac{1}{2}$ ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ στ. $-\frac{\sqrt{8}}{4}$ ζ. $\frac{3}{\sqrt{3}}$

2. Αν $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 2$ τότε η γωνία x ισούται με:

α. 0° β. 90° γ. 180° δ. 270° ε. 45° στ. Τίποτα από αυτά

3. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:

α. $\eta\mu 80^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 260^\circ$ β. $\sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \epsilon\phi 310^\circ$
 γ. $\eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 100^\circ \cdot \epsilon\phi 100^\circ$ δ. $\epsilon\phi 240^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 320^\circ \cdot \sigma\phi 510^\circ$

4. Η τιμή του γινομένου $\sigma\upsilon\nu 0^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 270^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 360^\circ$ είναι:

α. -1 β. 1 γ. 0 δ. 2 ε. $\frac{1}{2}$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sigma\upsilon\nu^2 0 + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{3} - \epsilon\phi^2 \frac{\pi}{4}$$

6. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. $\epsilon\phi 1845^\circ$ β. $\eta\mu 2580^\circ$ γ. $\sigma\phi \frac{97\pi}{6}$ δ. $\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{2}$

7. Εάν $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

8. Εάν $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{3}{4}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

2. Αποδεικτικές ασκήσεις

Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες x, y ισχύουν οι σχέσεις:

1. $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

2. $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 \cdot \eta\mu^2 x - 1$

3. $\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 y - \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 y + 1 = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 y$

4. $(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2 \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (1 + \eta\mu x)$

5. $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2 \cdot \eta\mu^2 x$

6. $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$

7. $\varepsilon\varphi^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x = 1$

8. $\eta\mu^3 x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu x$

9. $\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x}$

10. $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

11. $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x = \frac{3 + 2\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$

12. $\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y \cdot (\sigma\varphi x + \sigma\varphi y) = \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y$

13. $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + 2\sigma\varphi x = 0$

14. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \sigma\varphi x$

15. $\frac{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi y}{\varepsilon\varphi y + \sigma\varphi x} = \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}$

16. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \varepsilon\varphi x$

17. $\frac{\sigma\varphi x}{1 - \sigma\varphi x} - \frac{\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

18. $\frac{\varepsilon\varphi x + \eta\mu x}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} = \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \sigma\varphi x \right)^2$

$$19. \frac{\varepsilon\phi x - \eta\mu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$20. \varepsilon\phi x - \sigma\phi x = \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

$$21. \frac{\sigma\phi x}{1 + \sigma\phi x} + \frac{\varepsilon\phi x}{1 + \varepsilon\phi x} = 1$$

$$22. \sigma\phi x + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x}$$

$$23. \eta\mu^2 x \cdot (1 + \sigma\phi^2 x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot (1 + \varepsilon\phi^2 x) = 2$$

$$24. \sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1$$

3. Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$	$\eta\mu(\pi - x) =$	$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$
$\sigma\upsilon\nu(-x) =$	$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) =$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$
$\varepsilon\phi(-x) =$	$\varepsilon\phi(\pi - x) =$	$\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$
$\sigma\phi(-x) =$	$\sigma\phi(\pi - x) =$	$\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\eta\mu(\pi + x) =$	$\eta\mu(2\pi - x) =$
$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) =$	$\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) =$
$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\varepsilon\phi(\pi + x) =$	$\varepsilon\phi(2\pi - x) =$
$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\sigma\phi(\pi + x) =$	$\sigma\phi(2\pi - x) =$
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$	$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$	$\eta\mu(2\pi + x) =$
$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$	$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) =$
$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$	$\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$	$\varepsilon\phi(2\pi + x) =$
$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$	$\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$	$\sigma\phi(2\pi + x) =$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α.
$$\frac{\eta\mu(3\pi + \alpha) \cdot \sigma\phi(7\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon(3\pi + \alpha) \cdot \sigma\phi(4\pi + \alpha) \cdot \eta\mu\alpha}$$

β.
$$\frac{2 \cdot \eta\mu(\pi - \theta) + \sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 2 \cdot \eta\mu(2\pi - \theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3 \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\pi - \theta) + \sigma\upsilon\upsilon(2\pi - \theta)}$$

3. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\sigma\upsilon\upsilon x$ και $\eta\mu x$ την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\upsilon(-x) + \eta\mu(-x) + \eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\upsilon(\pi - x)$$

4. Εάν A, B και Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α. $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$

β. $\sigma\upsilon\upsilon(B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\upsilon A$

γ. $\epsilon\phi(B + \Gamma) = -\epsilon\phi A$

5. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{6\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\pi - \alpha) \cdot \eta\mu\alpha} = -1$$

6. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\eta\mu^2 212^\circ \cdot \sigma\upsilon\upsilon 302^\circ - \sigma\upsilon\upsilon^3 148^\circ}{\eta\mu 58^\circ \cdot \sigma\upsilon\upsilon 32^\circ + \eta\mu 392^\circ \cdot \eta\mu 148^\circ - \eta\mu 58^\circ \cdot \eta\mu 148^\circ} = \sigma\upsilon\upsilon 32^\circ + \eta\mu 32^\circ$$

7. Έστω $A = \frac{\epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\sigma\upsilon\upsilon(2\pi - x)}$

$$B = \sigma\upsilon\upsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu(\pi + x)$$

$$\Gamma = \sigma\upsilon\upsilon(\pi + x) \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Να αποδειχθεί ότι:

α. $\Gamma = B + 1$

β. $B + A = \text{συν}^2\alpha$

γ. $A + B = \Gamma$

4. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{7}$

ii. $\eta\mu x = \eta\mu 70^\circ$

iii. $\text{συν} x = \text{συν} \frac{3\pi}{15}$

iv. $\text{συν} x = \text{συν} 25^\circ$

v. $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{10}$

vi. $\epsilon\phi x = \epsilon\phi 42^\circ$

vii. $\sigma\phi x = \sigma\phi \frac{2\pi}{11}$

viii. $\sigma\phi x = \sigma\phi 88^\circ$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = 0$

ii. $\eta\mu x = 1$

iii. $\eta\mu x = -1$

iv. $\text{συν} x = 0$

v. $\text{συν} x = 1$

vi. $\text{συν} x = -1$

vii. $\epsilon\phi x = 0$

viii. $\epsilon\phi x = 1$

ix. $\epsilon\phi x = -1$

x. $\sigma\phi x = 0$

xi. $\sigma\phi x = 1$

xii. $\sigma\phi x = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iv. $\text{συν} x = \frac{1}{2}$

v. $\text{συν} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

vi. $\text{συν} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vii. $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

viii. $\epsilon\phi x = 1$

ix. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

x. $\sigma\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

xi. $\sigma\phi x = 1$

xii. $\sigma\phi x = \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\varphi x = -1$

v. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

vii. $\epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ix. $\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{10}$

xi. $\epsilon\varphi x = -\epsilon\varphi 55^\circ$

ii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

iv. $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$

vi. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

viii. $\sigma\varphi x = -1$

x. $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}$

xii. $\sigma\varphi x = -\sigma\varphi 17^\circ$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sqrt{2}\eta\mu x - 1 = 0$

iii. $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$

v. $\sqrt{3}\epsilon\varphi x - 1 = 0$

vii. $\eta\mu x - \eta\mu\frac{2\pi}{9} = 0$

ix. $\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi\frac{\pi}{8} = 0$

ii. $2\sqrt{3}\eta\mu x + 3 = 0$

iv. $6\sigma\upsilon\nu x - 3\sqrt{2} = 0$

vi. $\sqrt{6}\sigma\varphi x + \sqrt{18} = 0$

viii. $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} = 0$

x. $\sigma\varphi x + \sigma\varphi\frac{\pi}{9} = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x \cdot (\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$

iii. $\epsilon\varphi x \cdot (\sqrt{3}\sigma\varphi x + 1) = 0$

v. $(1 - \eta\mu x) \cdot (\sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu x) = 0$

ii. $\sigma\upsilon\nu x \cdot (2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

iv. $\sigma\varphi x \cdot (\epsilon\varphi x - 1) = 0$

vi. $(\epsilon\varphi x + \sqrt{3}) \cdot (\sigma\varphi x + 1) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{10}\right)$

iii. $\sigma\upsilon\nu\pi x = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$

iii. $\epsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$

ii. $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

iv. $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

iv. $\sigma\varphi(x + 10^\circ) - \sigma\varphi 2x = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

ii. $\epsilon\varphi x = \sigma\varphi x$

iii. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

iv. $\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

v. $\epsilon\varphi(\pi + 2x) = \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

vi. $\sigma\varphi\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) - \epsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = 0$

vii. $\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

viii. $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

ix. $\epsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

x. $\sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \epsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2\eta\mu^2 x = \sqrt{3}\eta\mu x$

ii. $\eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu^3 x = 0$

iii. $\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

iv. $2\sigma\upsilon\nu^2 x = -\sigma\upsilon\nu x$

v. $\epsilon\varphi^3 x - \epsilon\varphi x = 0$

vi. $\sqrt{3}\sigma\varphi x - \sigma\varphi^2 x = 0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu^2 x = \frac{1}{2}$

ii. $\eta\mu^2(2x) - \frac{3}{4} = 0$

iii. $\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$

iv. $4\sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

v. $3\epsilon\varphi^2 x - 1 = 0$

vi. $\sigma\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

vii. $8\eta\mu^3 x + 1 = 0$

viii. $9\sigma\varphi^4 x - 1 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

ii. $2\eta\mu x + 2\sqrt{2}\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1 + 2\eta\mu x$

iii. $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

iv. $\sqrt{3}\epsilon\varphi x - \epsilon\varphi^2 x - \sqrt{3}\sigma\varphi x + 1 = 0$

v. $(1 - 2\eta\mu x)^2 + 2\eta\mu x - 1 = 0$

iv. $\sigma\varphi^4 x + \sigma\varphi x = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu^2x - 2\eta\mu x + 1 = 0$

ii. $2\eta\mu^2x + \eta\mu x - 1 = 0$

iii. $4\sigma\upsilon\nu^2x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

iv. $\sigma\upsilon\nu^2x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

v. $\eta\mu^2x - \frac{4+\sqrt{3}}{2}\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$

vi. $\sigma\upsilon\nu^2x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

vii. $4\sigma\upsilon\nu^2x - 2(\sqrt{3} + 1)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$

viii. $\epsilon\varphi^2x - (1 - \sqrt{3})\epsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

ix. $3\sigma\varphi^2x - 4\sqrt{3}\sigma\varphi x + 3 = 0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2\sigma\upsilon\nu^2x - 10\eta\mu^2x + 1 = 0$

ii. $5\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x - 5 = 0$

iii. $2\eta\mu^2x + 1 = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

iv. $2\eta\mu^2x + 6 - 6\sigma\upsilon\nu x = 0$

v. $4\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2x = 2\eta\mu^2x - 3$

vi. $3 - 3\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu^2x$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

ii. $2\eta\mu x + \sqrt{12}\sigma\upsilon\nu x = 0$

iii. $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

iv. $\sqrt{3}\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu 3x$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sigma\varphi x = \sigma\upsilon\nu x$

ii. $\epsilon\varphi x = \eta\mu x$

iii. $\epsilon\varphi x - \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 0$

iv. $\eta\mu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 - \epsilon\varphi x$

v. $2\epsilon\varphi^2x + \frac{\epsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1$

vi. $\sigma\varphi^2x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\epsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x \in [0, 2\pi]$

ii. $3\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0, x \in (-\pi, \pi)$

iii. $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

iv. $\sqrt{2}\eta\mu(\pi x) - 1 = 0, x \in [-1, 2]$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

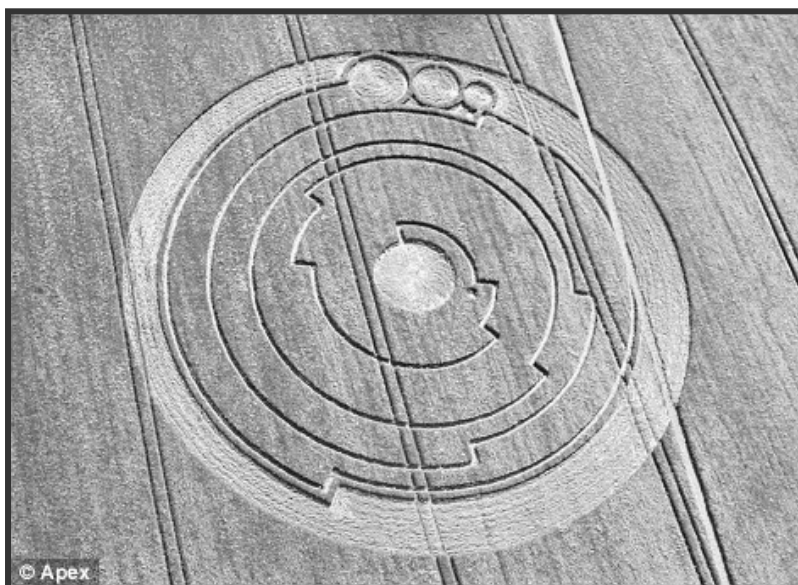
i. $\sin x (1 + \varepsilon\varphi^2 x) - \varepsilon\varphi x = \sin x$ **ii.** $\varepsilon\varphi^2 x = 4 \sin^2 x - 1$
iii. $\frac{1}{\sin^2 x} = 2\varepsilon\varphi x$ **iv.** $\frac{1}{2\sin^2 x} = \sqrt{3} \varepsilon\varphi x - 1$

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του x , καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.

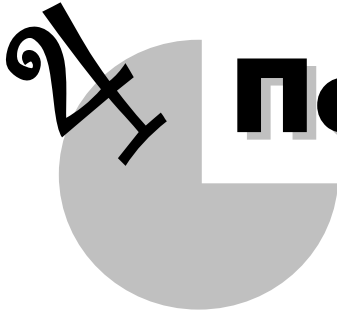
i. $f(x) = 2 - \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

ii. $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

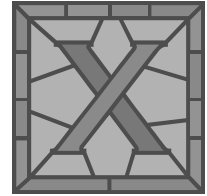
iii. $f(x) = 3 + 3\sin(\pi x - \pi), \quad -1 \leq x \leq 1$



Ποιος είναι ο μυστικός κώδικας της εικόνας;



Πολυώνυμα



«Στου νου το δαιδαλώδες, αλγεβρικό οικοδόμημα
αποφάσισα κάποτε να βάλω τάξη φθίνουσα,
και βλοσυρά κραδαίνοντας μια θετική διακρίνουσα
πήρα να τινάζω τις ρίζες από τα πολυώνυμα».

1. Σύντομη θεωρία

Μονώνυμο

Κάθε παράσταση της μορφής:

$$ax^v \text{ με } a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}$$

Πολυώνυμο

Κάθε παράσταση της μορφής:

$$a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

με $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}$

Όροι

του πολυωνύμου ονομάζονται τα μονώνυμα

$$a_v x^v, a_{v-1} x^{v-1}, \dots, a_1 x, a_0$$

Σταθερός όρος

του πολυωνύμου ονομάζεται ο όρος: a_0 .

Συντελεστές

του πολυωνύμου ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί

$$a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0$$

Βαθμός

πολυωνύμου καλείται ο μέγιστος εκθέτης των μη μηδενικών όρων του.

Σταθερό πολυώνυμο

ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός a .
Επειδή $a = a \cdot x^0$ τότε, προφανώς, κάθε σταθερό πολυώνυμο θα είναι **μηδενικού βαθμού**.

Μηδενικό πολυώνυμο

ονομάζεται το σταθερό πολυώνυμο **0**. Δεν ορίζεται βαθμός για το μηδενικό πολυώνυμο.

Συμβολισμός Τα πολυώνυμα συμβολίζονται συνήθως με $P(x), Q(x)$, κλπ.

2. Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με:

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

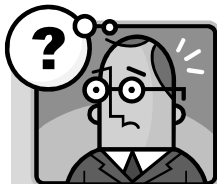
$$Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{με } n \geq \mu$$

θα λέγονται ίσα αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι, δηλαδή αν ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu &= \beta_\mu \\ \alpha_{\mu-1} &= \beta_{\mu-1} \\ &\dots \\ \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_0 &= \beta_0 \end{aligned}$$

και

$$\alpha_{\mu+1} = \alpha_{\mu+2} = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$$



Με πιο απλά λόγια ;!

Τελικά, λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν:

(α) είναι του ίδιου βαθμού και

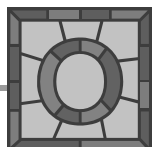
(β) έχουν ίσους τους αντίστοιχους συντελεστές.

Λέμε επίσης: αντί για τη φράση «αντίστοιχοι συντελεστές» τη φράση «συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων».

3. Μηδενικό πολυώνυμο

Από τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε εύκολα ότι ένα πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$



θα είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή αν ισχύει:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$$

4. Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Αριθμητική τιμή ή απλά **τιμή** ενός πολυωνύμου για $x = \rho$, όπου ρ ένας πραγματικός αριθμός, καλείται ο αριθμός που προκύπτει αν θέσουμε όπου x τον αριθμό ρ και εκτελέσουμε τις πράξεις. Η τιμή αυτή συμβολίζεται ως **$P(\rho)$** . Δηλαδή:

$$P(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$$

Ρίζα

ενός πολυωνύμου θα λέγεται ένας πραγματικός αριθμός ρ , εάν ισχύει:

$$P(\rho) = 0$$

Παρατήρηση ...

Είναι φανερό ότι ένα σταθερό πολυώνυμο θα έχει πάντα την ίδια τιμή, ανεξαρτήτως των τιμών που παίρνει το x .

5. Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων

Πρόσθεση
Αφαίρεση

Γίνονται κατά τα γνωστά με απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων.

Βαθμός αθροίσματος

Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων.

Εκτός κι αν το άθροισμά τους είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε δεν ορίζεται βαθμός.

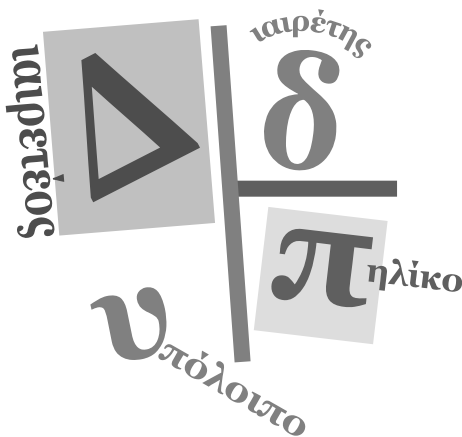
Πολλαπλασιασμός

Γίνεται με τη βοήθεια της γνωστής επιμεριστικής ιδιότητας.

Βαθμός γινομένου

Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

6. Διαίρεση πολυωνύμων



Όπως είναι γνωστό, κατά την ολοκλήρωση του αλγόριθμου της ευκλείδειας διαίρεσης, τα τέσσερα μεγέθη: **Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** και **υπόλοιπο**, συνδέονται μεταξύ τους με την παρακάτω ταυτότητα:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$$

με $0 \leq \nu < \delta$

Η ταυτότητα ετούτη μπορεί να εκφραστεί, επίσης, και ως εξής:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ ($\delta \neq 0$), υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και ν , τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu, \text{ με } 0 \leq \nu < \delta.$$

Με την ίδια λογική μπορούμε να εκφράσουμε και την έννοια της διαίρεσης πολυωνύμων, δηλ.

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$, με $\delta(x) \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

βαθμός(ν) < βαθμός(δ)

όπου το $\nu(x)$ έχει βαθμό μικρότερο του βαθμού του $\delta(x)$ ή είναι μηδέν.

Για να διαιρέσουμε, λοιπόν, δύο πολυώνυμα ακολουθούμε μια αλγοριθμική διαδικασία αντίστοιχη με αυτή της διαίρεσης φυσικών αριθμών:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x^2 + x)$

Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$

Διαιρούμε το μεγαistoβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγαistoβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.

Άρα: $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$.

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$
	$2x^2$

Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$
$- 2x^4 - 2x^3$	$2x^2$

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ' το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω απ' τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$
$- 2x^4 - 2x^3$	$2x^2$
$x^3 - x^2 + 5x - 2$	

Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$
$- 2x^4 - 2x^3$	$2x^2 + x$
$x^3 - x^2 + 5x - 2$	

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$ \begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 + 5x - 2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x \end{array} $
---	---

$ \begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 + 5x - 2 \\ \hline 2x^2 + 2x \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x - 2 \end{array} $
---	---

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x^2 + x)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^2 + x - 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{7x - 2}_{\upsilon(x)}$$

1^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση, που «λείπουν» κάποιοι όροι από τον Διαιρετέο (δηλαδή, κάποιες δυνάμεις του x), τότε είναι προτιμότερο να τους συμπληρώνουμε με μηδενικούς συντελεστές.

Παράδειγμα: Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - x^2 - 2) : (x^2 + x)$

Γράφουμε:

$2x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x - 2$	$x^2 + x$
------------------------------	-----------

2^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης βγαίνει μηδέν ($v = 0$) τότε λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια**. Θα λέμε ακόμη ότι «το πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$ » ή ότι «το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ ».

Επειδή η ταυτότητα της διαίρεσης θα γράφεται, προφανώς:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$$

είναι φανερό ότι, στην περίπτωση αυτή, έχουμε καταφέρει μιας μορφής παραγοντοποίηση για το πολυώνυμο $\Delta(x)$.

7. Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$



Όταν η διαίρεση που καλούμαστε να εκτελέσουμε έχει ως διαιρέτη ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$, όπου ρ κάποιος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχουν δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$. Ισχύει δηλαδή:

$$v = P(\rho)$$

1^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1^{ου} βαθμού εννοείται ότι το υπόλοιπο θα είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο. Με άλλα λόγια, θα είναι απλά ένας πραγματικός αριθμός.

2^η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όσον αφορά στον πραγματικό ρ , χρειάζεται να προσέξουμε το εξής: αν έχουμε το πολυώνυμο πχ. $x - 3$ τότε προφανώς το $\rho = 3$. Αν όμως το πολυώνυμο είναι της μορφής πχ. $x + 2$ τότε είναι:

$$x + 2 = x - (-2), \text{ δηλαδή } \rho = -2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

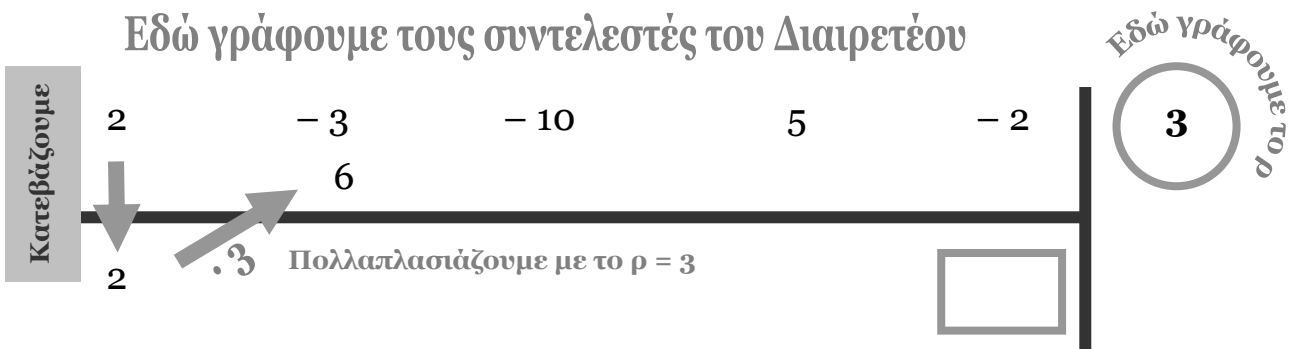
Πρέπει να θυμόμαστε ότι εκφράσεις της μορφής «*αν και μόνο αν*», «*τότε και μόνο τότε*» υποννοούν μια σχέση ισοδυναμίας ($\Leftrightarrow$). Συνεπώς, όταν καλούμαστε να αποδείξουμε μια παρόμοια σχέση $A \Leftrightarrow B$, χρειάζεται να αποδεικνύουμε και το **ευθύ** ($A \Rightarrow B$) και το **αντίστροφο** ($B \Rightarrow A$).

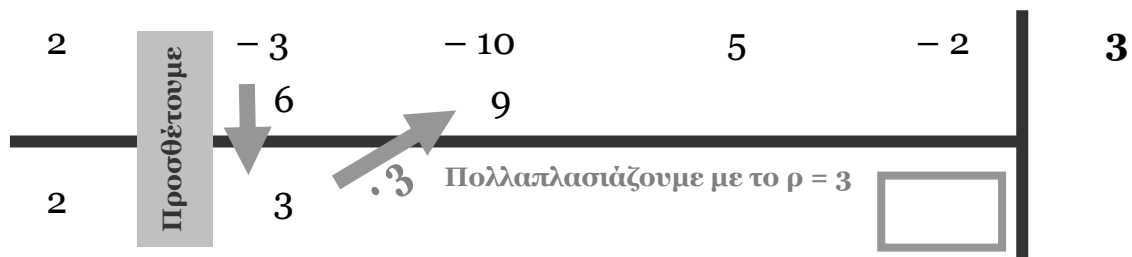


8. Σχήμα Horner

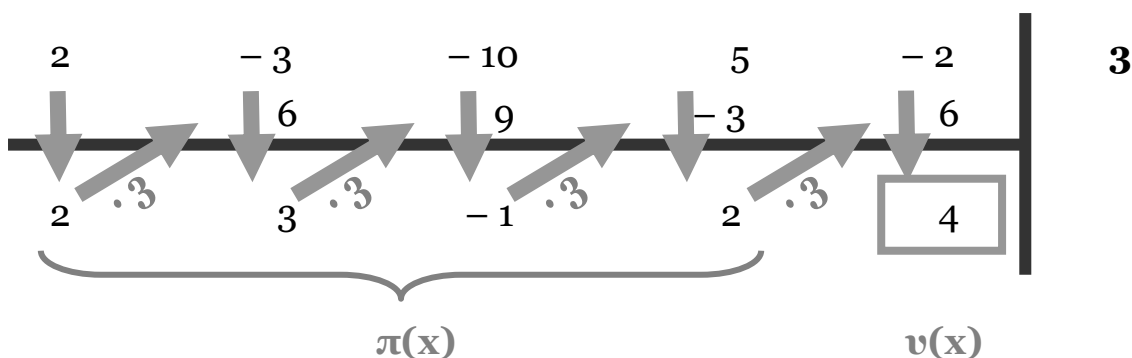
Προκειμένου, τώρα, να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$, αντί να εφαρμόσουμε τον κλασικό αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων, εφαρμόζουμε έναν άλλον αλγόριθμο, πολύ συντομότερο και απλούστερο. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται **σχήμα Horner** και έχει ως εξής:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2) : (x - 3)$





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα:

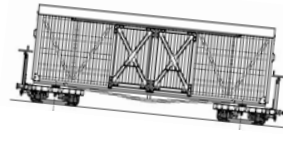
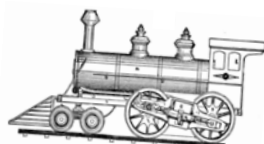


Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή $\upsilon = 4$. Τα υπόλοιπα επί μέρους αθροίσματα (2, 3, -1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το $x - 3$ που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3 , ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x - 3)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{\upsilon(x)}$$



Πολυωνυμικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

(και κάτι ψιλά)

1. Πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n ($n \in \mathbb{N}$)

θα λέγονται οι εξισώσεις της μορφής:

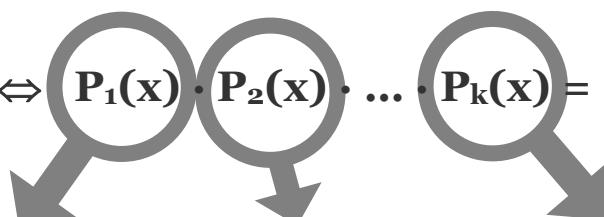
$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \text{με } \alpha_n \neq 0$$

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης θα ονομάζουμε κάθε ρίζα του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε $\rho \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

A. Προκειμένου να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις **1^{ου}** ή **2^{ου}** **βαθμού** ακολουθούμε τις γνωστές διαδικασίες επίλυσης, που μας βασανίζουν κοντά τρία χρόνια τώρα, αλλά μυαλό δε λέμε να βάλουμε.

B. Για εξισώσεις, όμως, **μεγαλύτερου βαθμού** δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι επίλυσης (ίσως να υπάρχουν για εξισώσεις έως και 3^{ου} ή 4^{ου} βαθμού, αλλά είναι αβάσταχτα πολύπλοκες). Αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε στις περιπτώσεις αυτές είναι **παραγοντοποίηση**, έτσι ώστε τελικά να καταλήξουμε σε παράγοντες το πολύ 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού. Αν καταφέρουμε να το επιτύχουμε αυτό, χωρίς να διαταράξουμε ανεπανόρθωτα την ψυχική μας γαλήνη, τα πράγματα θα έχουν γίνει πλέον εξαιρετικά εύκολα. Σύμφωνα με το παρακάτω γενικό σχήμα θα έχουμε:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0$$



$$P_1(x) = 0 \quad P_2(x) = 0 \quad \dots \quad P_k(x) = 0$$

Για να το επιτύχουμε αυτό, πολύ χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως «**Θεώρημα ακέραιων ριζών**»:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα, λοιπόν, μπορούμε να επιλύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1.

Αναζητούμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου. Αν η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ακέραια ρίζα τότε αυτή θα βρίσκεται ανάμεσα στους διαιρέτες αυτούς. Ξαναδιαβάστε το βήμα αυτό, μέχρι να καταλάβετε καλά τι εννοεί!

2.

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner, **διαδοχικά**, για καθένα από τους αριθμούς που βρήκαμε πριν, μέχρι να ανακαλύψουμε μια ρίζα της εξίσωσης. Θ' αναρωτιέστε, φυσικά, πως στην ευχή θα το καταλάβετε αυτό. **Το υπόλοιπο θα βγαίνει μηδέν!**

3.

Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε προαναφέρει, το πολυώνυμο $x - \rho$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$. Άρα, σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης, θα είναι **$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$** . Συνεπώς, θα έχουμε καταφέρει έτσι μια πρώτη παραγοντοποίηση. Τι δεν καταλαβαίνετε;;

4.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο πολυώνυμο $\pi(x)$, δηλαδή στο πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης, κι ούτω καθεξής, έως ότου καταλήξουμε σε ένα γινόμενο με παράγοντες, μονάχα, πολυώνυμα 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού. Στις περισσότερες ασκήσεις αρκούν 2 με 3 επαναλήψεις του σχήματος Horner, ώστε να φτάσουμε στο σημείο αυτό. Ούτε δυο γουλιές καφέ, δηλαδή!

Π Α Ρ Α Τ Η Ρ Η Σ Η

Συμβαίνει συχνά, μια πολυωνυμική εξίσωση να έχει για ρίζα δυο και τρεις (ή περισσότερες) φορές τον **ίδιο αριθμό!** Λέμε τότε ότι πρόκειται για **διπλή** ή **τριπλή** ρίζα. Ακόμα μπορεί ν' ακούσετε να μιλάμε για **ρίζα πολλαπλότητας 2** ή 3, κλπ. Για παράδειγμα, αν παραγοντοποιώντας μία εξίσωση καταλήξουμε στο εξής:

$$\begin{aligned}(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-3) \cdot (x^2+x+1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x-1) \cdot (x-3)^2 \cdot (x^2+x+1) &= 0\end{aligned}$$

τότε λέμε ότι η εξίσωση έχει «**διπλή ρίζα το 3**» ή πως το 3 είναι «**ρίζα πολλαπλότητας 2**».

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !



Εξαιτίας της προηγούμενης παρατήρησης, θα πρέπει σε κάθε βήμα Horner να επανεξετάζουμε τη ρίζα που βρήκαμε από το προηγούμενο, καθώς είναι πολύ πιθανό ο ίδιος αριθμός να είναι πολλαπλή ρίζα. Ακούγεται βαρετό, αλλά μπορεί ν' αποδειχθεί σωτήριο!

2. Πολυωνυμικές ανισώσεις

Προκειμένου να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση, ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα με μια πολυωνυμική εξίσωση. Ποια είναι αυτά; Μόλις πριν λίγο τα διαβάσατε! Στο τέλος, όμως, δεν αρκεί απλά η εύρεση των ριζών κάθε παράγοντα. Αυτό που μας ενδιαφέρει, κυρίως, είναι **το πρόσημο** της παράστασης. Για το σκοπό αυτό, κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων, όπως γνωρίζουμε πολύ καλά από την 1^η Λυκείου, και κατόπιν επιλέγουμε το κατάλληλο διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

3. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Πολλές εξισώσεις, με μια πρώτη ματιά, δεν έχουν πολυωνυμική μορφή. Πολλές ούτε με τη δεύτερη ματιά! Ωστόσο, με απλές αλγεβρικές μεθόδους μπορούμε να τις ανάγουμε σε ισοδύναμες πολυωνυμικές, τις οποίες κατόπιν επιλύουμε σχεδόν με κλειστά τα μάτια, έπειτα από τόσες, απίστευτες ώρες εξάσκησης που έχουμε περάσει για να φτάσουμε σε αυτό το σημείο μαθηματικής ωριμότητας. Τέτοιες εξισώσεις, μπορεί να είναι: κλασματικές, άρρητες, τριγωνομετρικές, κλπ. Ας τις δούμε μία-μία:

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ή ΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως καλά θυμόμαστε, εξισώσεις στις οποίες εμφανίζουν άγνωστο σε παρονομαστή ονομάζονται κλασματικές. Για παράδειγμα:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$$

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.
3. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε Ε.Κ.Π. $\neq 0$.
4. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
5. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
6. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
7. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.
8. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς.

ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόκειται για εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον άγνωστο σε υπόρριξη ποσότητα. Για παράδειγμα:

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$$

Τότε, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη-αρνητικές (δηλ. ≥ 0).
2. Επειδή, συνήθως, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε τετραγωνικές ρίζες, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, ώστε να απαλειφούν οι ρίζες. Αν για διάφορους λόγους, κάποιες ρίζες εξακολουθούν να



«αντιστέκονται», αφού εκτελέσουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν, υψώνουμε και πάλι στο τετράγωνο.

3. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
5. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.
6. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

7. Απαιτείται, οπωσδήποτε, να **επαληθεύουμε** επιπλέον και την αρχική εξίσωση, για καθεμία από τις **δεκτές** ρίζες που βρήκαμε, γιατί συμβαίνει συχνά – εξαιτίας της ύψωσης στο τετράγωνο – να δημιουργούνται λύσεις, που δεν αντιστοιχούν στην αρχική εξίσωση. Έτσι, αν χρειαστεί απορρίπτουμε ακόμα και κάποιες από τις δεκτές ρίζες.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν συναντήσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις, οι οποίες κατά τ' άλλα μας θυμίζουν πολυώνυμα, όπως για παράδειγμα:

$$\eta\mu^4x - 2\eta\mu^3x - 7\eta\mu^2x + 8x + 12 = 0$$

τότε, αρκεί να κάνουμε τα εξής:

1. Θέτουμε τον άγνωστο τριγωνομετρικό αριθμό ίσο μια νέα μεταβλητή, έστω y , και κατόπιν λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση, που προκύπτει.
2. Αν ο τριγωνομετρικός αριθμός που αντικαθιστούμε είναι ημίτονο ή συνημίτονο, δεν ξεχνάμε να θέσουμε τους ανάλογους περιορισμούς, εφόσον:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$



Αν πρόκειται για εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ ή $\eta\mu x \neq 0$, αντίστοιχα.

3. Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.
4. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται, σύμφωνα με τους περιορισμούς.

5. Ξε-θέτουμε και λύνουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις που προκύπτουν, από τις δεκτές λύσεις της πολωνυμικής.

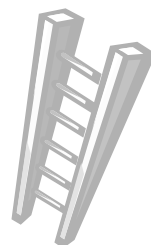
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ ($\alpha \neq 0$) ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία πολωνυμικών εξισώσεων, που ονομάζονται **αντίστροφες**. Για παράδειγμα:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, άρα:

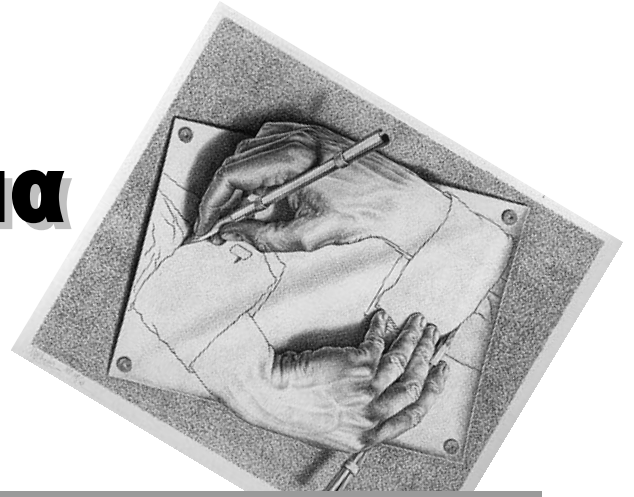
1. Διαιρούμε όλους τους όρους με x^2 .
2. Ομαδοποιούμε τα ζεύγη με x , $\frac{1}{x}$ και x^2 , $\frac{1}{x^2}$.
3. Βγάζουμε κοινό παράγοντα, αν υπάρχει, από κάθε ζεύγος.
4. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ και $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. *



Γιατί: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = y} y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

5. Λύνουμε την αντίστοιχη πολωνυμική εξίσωση.
6. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$, όπου είχαμε θέσει αρχικά, και για κάθε λύση της πολωνυμικής βρίσκουμε και μια αντίστοιχη λύση για το x .





1. Βασικές γνώσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:
 - α. $P(x) + Q(x)$
 - β. $P(x) - Q(x)$
 - γ. $P(x) \cdot Q(x)$
2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$$
 να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$$
 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο: $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$ είναι διάφορο του μηδενικού.
5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$$

$$Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda.$$
6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$$
 να παίρνει τη μορφή:

$$\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

7. Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$, ώστε το τετράγωνό του να ισούται με:
 $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.
8. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:
 $P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$
 δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.
9. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το: $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$.
10. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει:
 $(x^2 + 1) \cdot P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.
11. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.
12. Αν η διαφορά δύο πολυωνύμων βαθμού n είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δείξτε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.
13. Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ αν:
 α. $f(x + 1) = x^2 - 2x + 3$
 β. $g(3x + 1) = 9x^2 - 6x + 1$
14. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου:
 $P(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) \cdot x^3 + (\alpha^2 - \alpha) \cdot x + 1 - \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
15. Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x - 1)$ δείξτε ότι ο $\rho - 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x + 1)$.
16. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη:
 $P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1$.
 Αν $P(0) = 1$ και $P(2) = 2$, να βρείτε τα: $P(1)$, $P(5)$ και $P(26)$. Τι παρατηρείτε;
17. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση:
 $(x - 3) \cdot P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Διαίρεση πολυωνύμων

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$

β. $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$

γ. $(3x^3 - 4ax + a^2) : (x - 2a)$

δ. $[7x^3 - (9a + 7a^2)x + 9a^2] : (x - a)$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

4. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x - 1)$ και $P(x) : (x + 1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1) \cdot (x + 1)$$

5. Το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διαιρούμενο με το: $g(x) = x^2 - 3x + 2$ δίνει υπόλοιπο: $v(x) = 4x + 7$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$

1. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β .

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + \beta)x + 6$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ .

5. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.
6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλικά και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
- $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$
 - $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$
 - $[6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2)x + 3\alpha^2] : (x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$
 - $(x^6 - 4x^3 + x^2 - 2) : (2x - 1)$
 - $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2}x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1), \lambda \in \mathbb{R}^*$
7. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο:
 $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$
να έχει για παράγοντα το: $(x - 1)(x + 2)$.
8. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο:
 $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)x + \beta + 10$
να έχει παράγοντα το: $(x - 2)^2$.
9. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το $(x + 1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x - 1$.
10. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το: $(x - 2)(x + 3)$.
11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.
12. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^{v+1} + \beta x^v + 1$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ αποδείξτε ότι το πολυώνυμο: $Q(x) = (v + 1)\alpha x^v + v\beta x^{v-1}$ έχει παράγοντα το $x - 1$.
13. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = (v + 1)x^v - vx^{v+1} + \alpha$ διαιρείται με το $x - 1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x - 1)^2$.

14. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του:

$$P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3$$

με το $(2x + 1)$ να είναι το 5 .

15. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει: $P(0) = P(1) = 2004$.
Να αποδείξετε ότι: $P(x) = x(x - 1) \cdot \pi(x) + 2004$.

4. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α. $x^3 - 8x + 7 = 0$

β. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ. $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$

δ. $(x - 1)(x^4 + x) - 3(x + 4) = 0$

ε. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

2. Αν κ ακέραιος αριθμός ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\kappa} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3. Αν κ, λ ακέραιοι αριθμοί ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $8\lambda x^{2\kappa} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

*** 4.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

β. $9x^3 - 27x^2 - x + 3 = 0$

γ. $3x^4 - 8x^3 = 6x^2 - 16x$

δ. $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$

ε. $3x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 6x + 27 = 0$

στ. $2x^2(x + 2) = 3x^2 + 15x + 18 = 0$

*** 5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^3 - 7x - 6 = 0$

β. $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$

γ. $4x^4 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$

δ. $6x^4 + 10x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

ε. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β. $4x^4 - 5x^3 - 4x + 5 \geq 0$

γ. $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

δ. $(x + 2)^3 < 8x^2 + 16x$

ε. $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

στ. $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

ζ. $x^4(3x - 4) \geq 10x^2(2x - 1) + 6 - 17x$

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

5. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

* 1. Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

β. $2y^4 - 7y^2 - 4 \geq 0$

γ. $3t^4 + 5t^2 + 2 = 0$

δ. $\varphi^4 + 9\varphi^2 + 24 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ. $(\omega^2 - 3\omega + 1)^2 - 10(\omega^2 - 3\omega - 3) - 51 = 0$

δ. $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

ε. $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$

στ. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 + x^4 + kx + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι k, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $x^3 - 12x + 1 = 0$ έχει 3 διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: $(-4, -3), (0, 1), (3, 4)$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$

β. $\frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$

γ. $\frac{x^3+2}{x+1} + \frac{2-x}{x-1} = \frac{2x+1-x^2}{x^2-1}$

δ. $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $\frac{x^2+2x-4}{x-2} < 1$

β. $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$

γ. $\frac{6}{2x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{1-8x}{1-4x^2}$

δ. $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} > \frac{x^2-3x+2}{x}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$

β. $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

γ. $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

δ. $2\sigma\upsilon\nu^4 x + 17\sigma\upsilon\nu^2 x - 9 = 0$

ε. $2\eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$

8. Να βρείτε το $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του:

$$P(x) = x^4 - (\eta\mu 3\alpha)x^3 + (2\eta\mu 2\alpha)x^2 - (\eta\mu \alpha)x - 1.$$

Στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε υπολογίστε το πηλίκο της διαίρεσης: $P(x) : (x+1)$.

* 9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $1 + \sqrt{x} = \sqrt{3(x-1)}$

β. $\sqrt[3]{5\varphi-7} = \varphi-1$

γ. $\sqrt{3y+1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{7y+1}$

δ. $t^2 - 6t - 2\sqrt{t^2 - 6t + 2} = 1$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x + \sqrt{5x+10} = 8$

β. $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x+1}$

γ. $\sqrt{x-8} = 2+x$

δ. $\sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16$

ε. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\sqrt{x-1}-1=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

β. $\frac{4-\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

γ. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{3+\sqrt{2-x}}=2$

δ. $\sqrt{-x-1}-1=\frac{1}{\sqrt{x^3-x}}$

ε. $\sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{x^2+3x-5}$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $x+\sqrt{x^2-x+\lambda^2+1}=\lambda$

12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$

β. $x-1\geq\sqrt{x+5}$

γ. $\sqrt{x^2+x+3}\geq x+\frac{1}{2}$

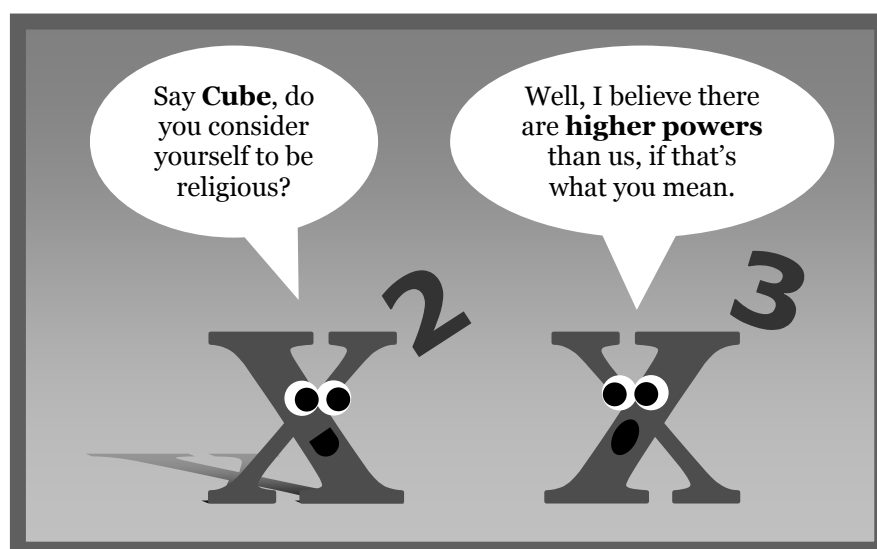
13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

β. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

γ. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$

δ. $2x^5-13x^4-61x^3-61x^2-13x+2=0$





Εκθετική Συνάρτηση



«Μ' ασέβεια μίλησες κάποτε, δίχως μιαν υποψία
για τη λεπτή ειρωνία, στις ύπαρξής μου τη μορφή,
τι μοιάζω να βυθίζομαι αενάως απ' τη μία,
μ' από την άλλη, υψώνομαι πέρα από κάθε κορυφή».

1. Δυνάμεις

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της δύναμης ενός αριθμού $a \in \mathbb{R}^+$ (πραγματικού & **θετικού**) ώστε να δέχεται ως εκθέτη οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Συνοπτικά, έχουμε:

Για εκθέτη φυσικό ($v \in \mathbb{N}$)

$$a^v = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (v \text{ παράγοντες})$$

Για εκθέτη αρνητικό ακέραιο ($\kappa \in \mathbb{Z}^-$)

$$a^\kappa = \frac{1}{a^{-\kappa}}$$

Για εκθέτη ρητό ($\mu, v \in \mathbb{Z}$)

$$a^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{a^\mu}$$

Για εκθέτη άρρητο ($x \in \mathbb{Q}'$)

Δεν απαιτείται από την ύλη μας να γνωρίζουμε το πώς και γιατί, αρκεί να γνωρίζουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση αυτή ορίζεται η δύναμη ενός θετικού, πραγματικού αριθμού.

Ορίζεται με τη βοήθεια μαθηματικών εννοιών, που ονομάζονται όρια, ως εξής:

$$a^x = \lim_{v \rightarrow +\infty} a^{p_v}$$

όπου p_v η ακολουθία δεκαδικών προσεγγίσεων του x , με v δεκαδικά ψηφία.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και για τους πραγματικούς εκθέτες εξακολουθούν να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων:

Ιδιότητες δυνάμεων

$a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$	$\frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu}$
$(a \cdot b)^{\mu} = a^{\mu} \cdot b^{\mu}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{b^{\mu}}$
$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu \cdot \nu}$	

ίδια βάση

ίδιας εκθέτης

δύναμη δύναμης

Ισχύει ακόμα:

$a^1 = a$ $a^0 = 1$ $0^{\nu} = 0$ $0^0 = \text{δεν ορίζεται}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\nu} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu}$

$1^{\nu} = 1$ $(-1)^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \nu = \text{άρτιος} \\ -1 & \text{αν } \nu = \text{περιττός} \end{cases}$



2. Εκθετική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, την οποία ονομάζουμε **εκθετική**:

$$f(x) = a^x$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

πρόσθετος
περιορισμός

Για την εκθετική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
2. Έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (0, +\infty)$

3. Είναι «1-1», δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

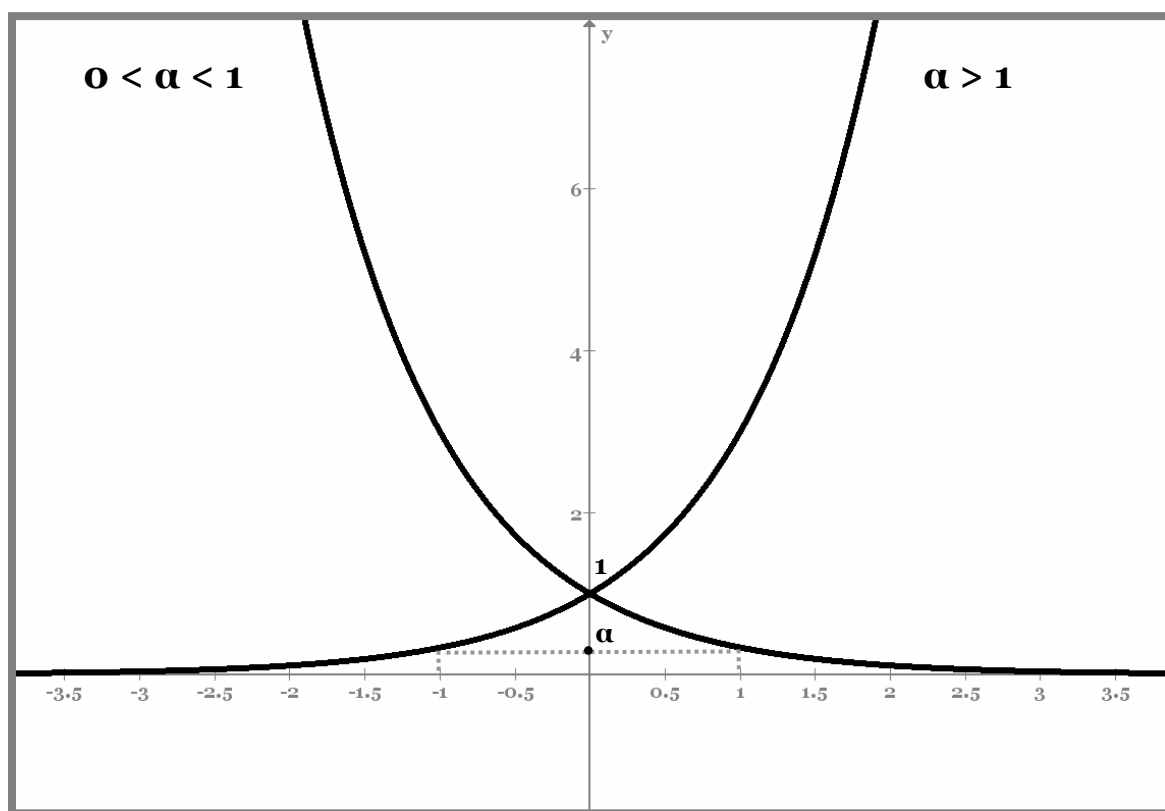
4. Αν $a > 1$ είναι **αύξουσα** ($\uparrow$), δηλαδή $\forall x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

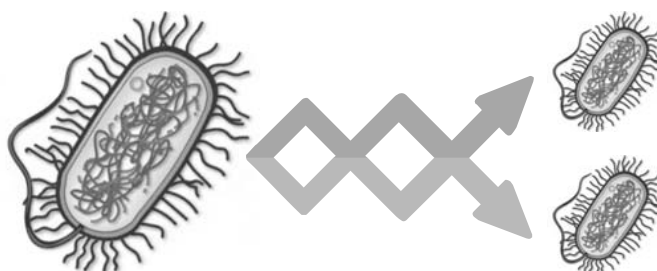
Αν $0 < a < 1$ είναι **φθίνουσα** ($\downarrow$), δηλαδή $\forall x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

5. Για καθεμία απ' τις προηγούμενες περιπτώσεις, έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη της μορφής:

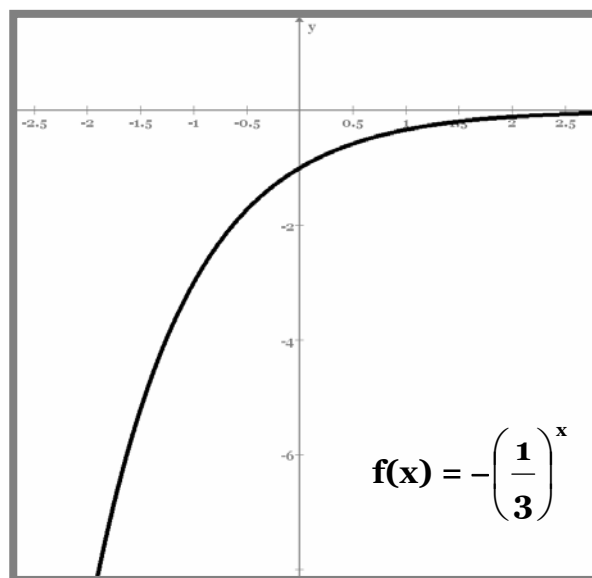
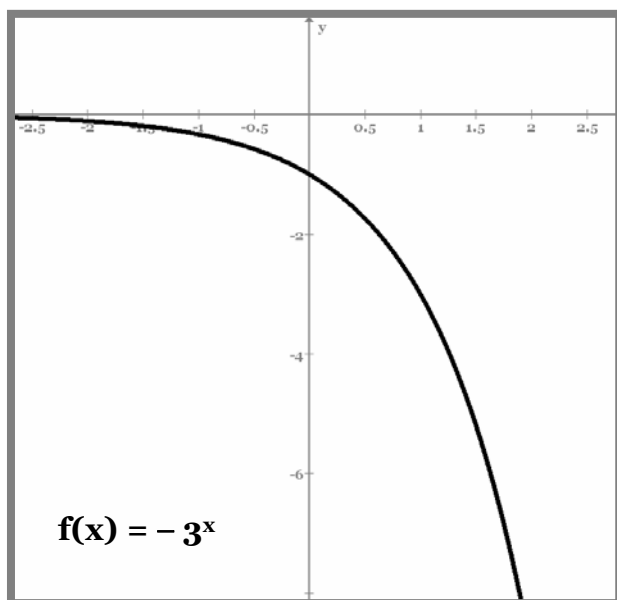
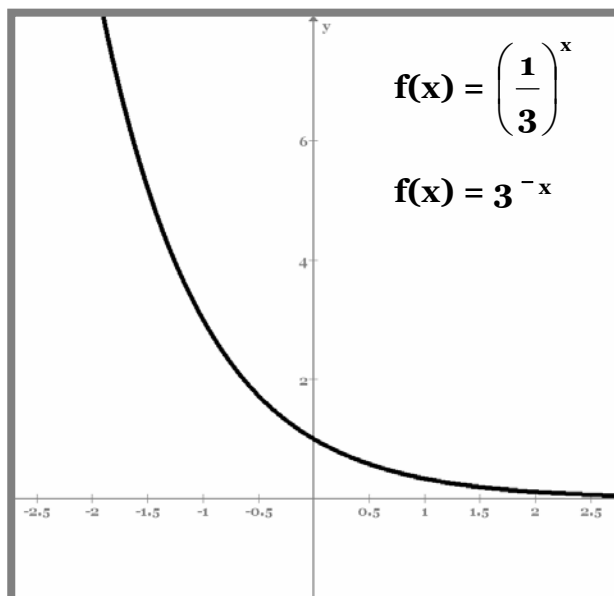
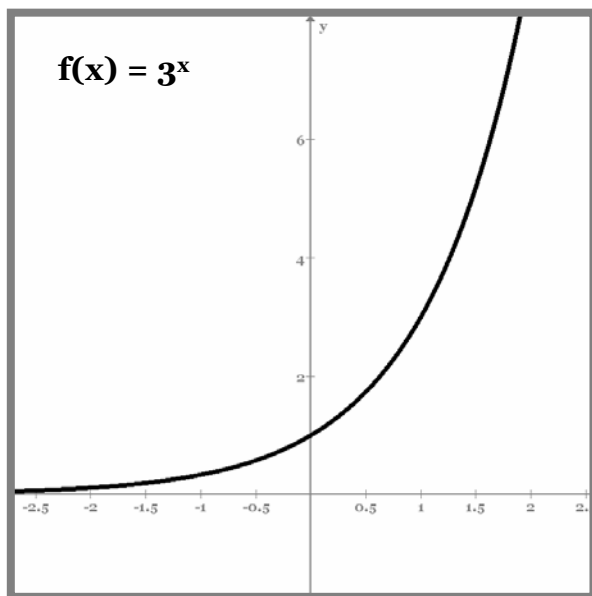


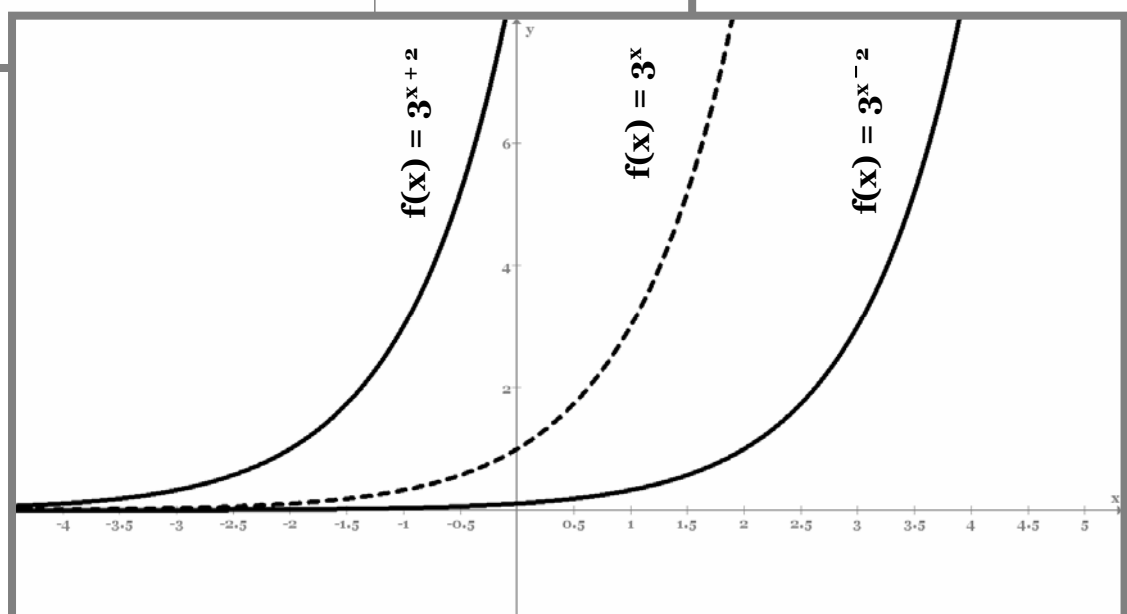
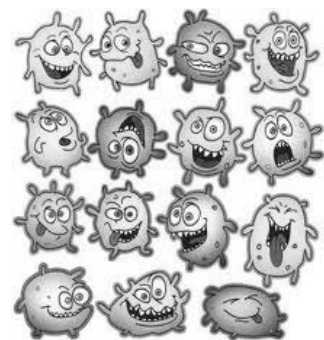
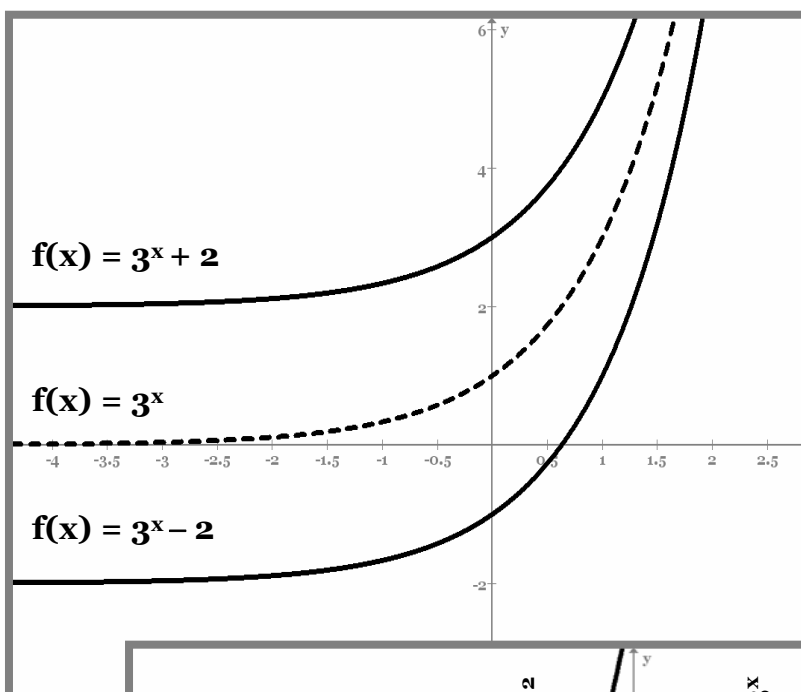
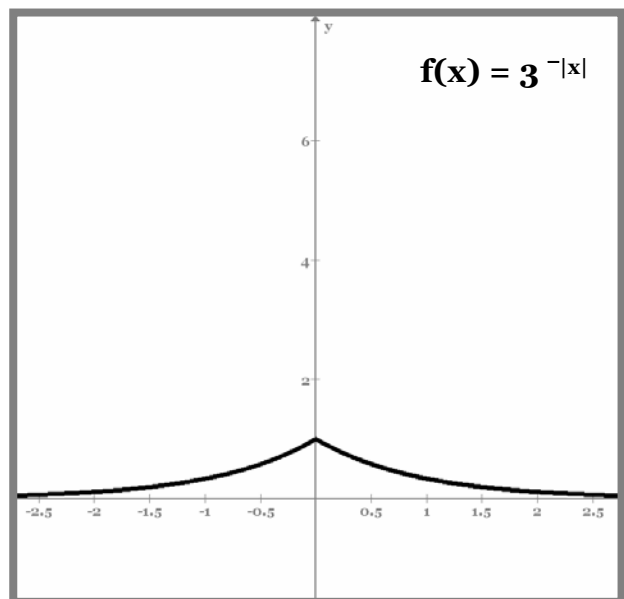
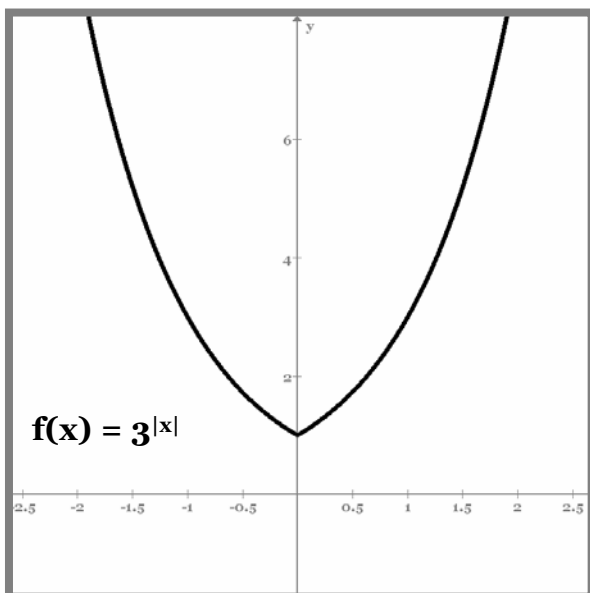
6. Λέμε ότι ο άξονας $x'x$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, καθώς η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης τον πλησιάζει απεριορίστα, δίχως ποτέ να τον τέμνει.



3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

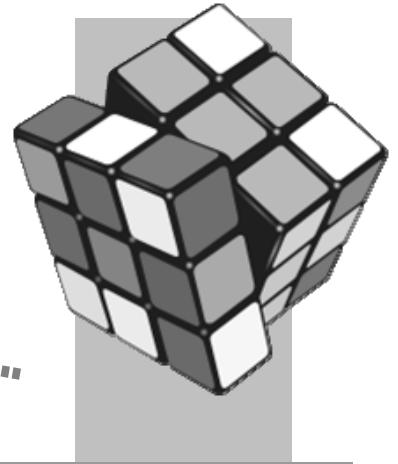
Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = 3^x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της εκθετικής συνάρτησης (αλλά και γενικότερα των συναρτήσεων).





Εκθετική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...



1. Εκθετικές Συναρτήσεις

- Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στις προηγούμενες σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = 3^{x-2} + 1$

- Αν για μια συνάρτηση $f(x) = a^x$ μας ζητείται να εξετάσουμε :

α. τότε είναι **εκθετική**, θα πρέπει:

$$a > 0 \text{ και } a \neq 1$$

β. τότε **ορίζεται** για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει:

$$a > 0$$

γ. τότε είναι **γνησίως αύξουσα**, θα πρέπει:

$$a > 1$$

δ. τότε είναι **γνησίως φθίνουσα**, θα πρέπει:

$$0 < a < 1$$

2. Εκθετικές Εξισώσεις

- Προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως δυνάμεις με την ίδια βάση, με τη βοήθεια των γνωστών ιδιοτήτων των δυνάμεων. Στη συνέχεια, επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι «1-1», θα ισχύει:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

2. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε την εξίσωση σε μια ισοδύναμη πολυωνυμική, πχ. $2^{\text{ου}}$ βαθμού.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $9^{x-1} + 3^x = 4$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε στην περίπτωση που $0 < a < 1$ να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα ισχύει: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Εξάσκηση : Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$4^{2x-3} > 2^{2x+4} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$$

4. Συστήματα

1. Με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο με δυο αγνώστους, το οποίο μπορούμε να λύσουμε με κάποια από τις γνωστές μας μεθόδους.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

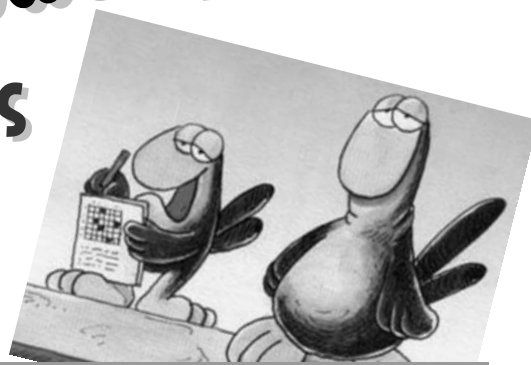
2. Σε μερικές περιπτώσεις, όταν σε κάθε εξίσωση του συστήματος και τα δύο μέλη είναι γινόμενα, αρκεί να ακολουθήσουμε μια μέθοδο ανάλογη με αυτή που περιγράψαμε στις εξισώσεις: προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη, κάθε εξίσωσης, σαν δυνάμεις με την ίδια βάση.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 27^{3x+1} = 27 \cdot 81^{y-1} \\ 4 \cdot 16^{x-y} = 32^{2x+y+2} \end{cases}$$

- 3.** Όταν σε περιπτώσεις όπως η προηγούμενη, δεν είναι δυνατόν να γραφτούν και τα δύο μέλη με την ίδια βάση, τότε μια καλή ιδέα είναι να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε κατά μέλη, τις δυο εξισώσεις του συστήματος.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$$





1. Εκθετικές Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση:
- α. έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$;
 - β. είναι γνησίως αύξουσα;
 - γ. είναι γνησίως φθίνουσα;
 - δ. είναι σταθερή;

2. Εκθετικές Εξισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
- α. $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$
 - β. $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$
 - γ. $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$
 - δ. $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0$
 - ε. $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 5$
 - στ. $5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x + 6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^x = 11$
 - ζ. $2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x+2} - \frac{24}{2^{x-1}} = \frac{468}{2^{x-2}}$
 - η. $4^{2x} - 5 \cdot 8^x - 7 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x + 13 = 0$
 - θ. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$
 - ι. $5^{2\eta\mu^2 x - \eta\mu 2x} = 1$
 - ια. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
 - ιβ. $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{x-3}$
 - ιγ. $9^x - 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x+7}{2}} - 3^{2x-1}$
 - ιδ. $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $\sin x + e^{-x} = 2$ στο $[0, \pi]$

β. $3^x + 4^x = 5^x$

γ. $10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^x = 111110$ αν $x \in \mathbb{N}^*$

3. Να λυθεί στο $[0, \pi]$ η εξίσωση: $4^{\sin 2x} + 4^{\sin^2 x} = 3$

4. α. Να υπολογίσετε την παράσταση $(3 + \sqrt{2})^2$

β. Να λυθεί η εξίσωση $7 \cdot (11 + 6\sqrt{2})^x = 3 - \sqrt{2}$

3. Εκθετικές Ανισώσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α. $e^{2x} + 3 \geq e^x + e^{x+1}$

β. $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

γ. $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^x}$

δ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-3x}$

ε. $27^x + 12^x - 2 \cdot 8^x > 0$

στ. $9^{x+1} - 108 \cdot 3^x + 243 > 0$

4. Εκθετικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = -5 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$$

δ.
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} 2^{x+2y} - 3^{2x-y} = 15 \\ 2^{\frac{x}{2}+y} + 3^{\frac{x-y}{2}} = 5 \end{cases}$$

$$\theta. \begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$$

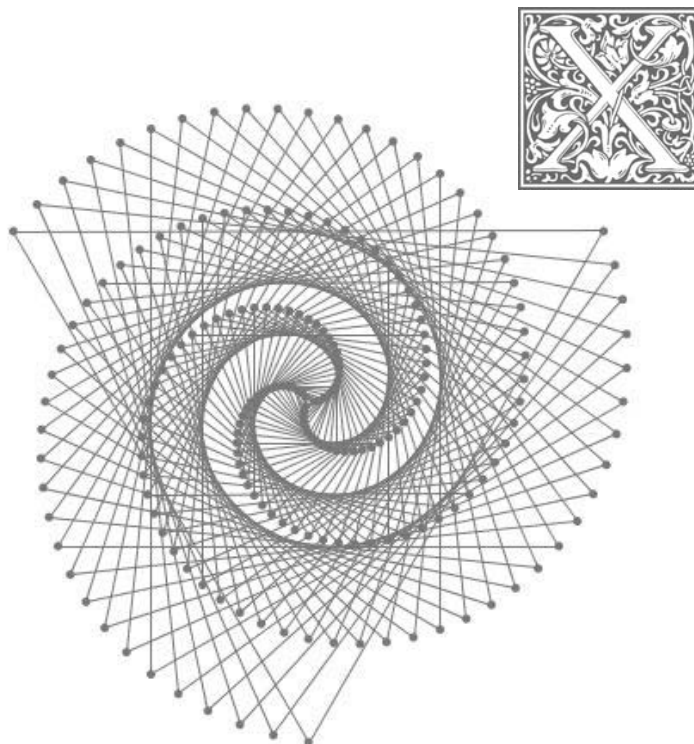
5. Συνδυαστικές Ασκήσεις

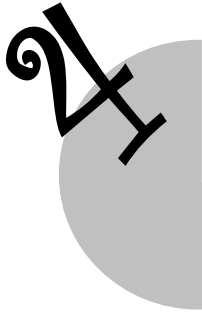
1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 2^{\sin x} + 2 \cdot 2^{-\sin x} - 3 = 0 \quad \text{στο } [0, 2\pi]$$

$$\beta. \frac{e^{\sin^2 x}}{e} = e^{-2\sin^3 x + 2\sin x}$$

$$\gamma. e^{3 \cdot \ln x} = 7e^{\ln x} + 6$$





Λογαριθμική Συνάρτηση



«Στου σύμπαντος αναρριχώμενος τη φαύλη σπείρα,
αναζητώντας μια διέξοδο, ίσως φυγή απ' τη μοίρα,
γύρεψες στήριγμα σ' ανώτερες δυνάμεις και θεριά,
που με της Λογικής τα δάμασες το κράτος, τη θεωριά».

1. Λογάριθμοι

Με τις προϋποθέσεις $a > 0$, $a \neq 1$ και $\theta > 0$, ορίζεται ο **λογάριθμος** του αριθμού θ , ως προς βάση a , ως ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a ώστε να μας δώσει τον θ . Ισχύει, δηλαδή, η ισοδυναμία:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα οι σχέσεις:

$$\begin{array}{cc} \log_a a^x = x & a^{\log_a \theta} = \theta \\ \log_a 1 = 0 & \log_a a = 1 \end{array}$$

Ειδικότερα, έχουμε τους **δεκαδικούς** λογάριθμους, με βάση το 10, και γράφουμε **log** θ αντί για **log**₁₀ θ . Δηλαδή:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

και τους **φυσικούς** ή **νεπέρειους** λογάριθμους, με βάση τον αριθμό **e** ($\approx 2,71828$), και γράφουμε **ln** θ αντί για **log**_e θ . Δηλαδή:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

2. Ιδιότητες Λογαρίθμων

Αν $a, \beta > 0$ και $a, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$, ισχύει:

1. $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
2. $\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
3. $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$
4. $\log_a \theta = \frac{\log_\beta \theta}{\log_\beta a}$ (Αλλαγή βάσης)

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την τελευταία, μπορούμε να ανάγουμε εύκολα τον υπολογισμό λογάριθμων, με οποιαδήποτε βάση, σε υπολογισμό δεκαδικών ή φυσικών λογάριθμων, δηλαδή:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log a} \quad \text{ή} \quad \log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln a}$$

3. Λογαριθμική Συνάρτηση

Με τον τρόπο αυτό, λοιπόν, μπορούμε για κάθε $x > 0$ να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, την οποία ονομάζουμε **λογαριθμική με βάση a** :

$$f(x) = \log_a x$$

$$\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

πρόϋποθέσεις
περιορισμοί

Για τη λογαριθμική συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

1. Έχει πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$
2. Έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$
3. Είναι «1-1», δηλ. για κάθε $x_1 = x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

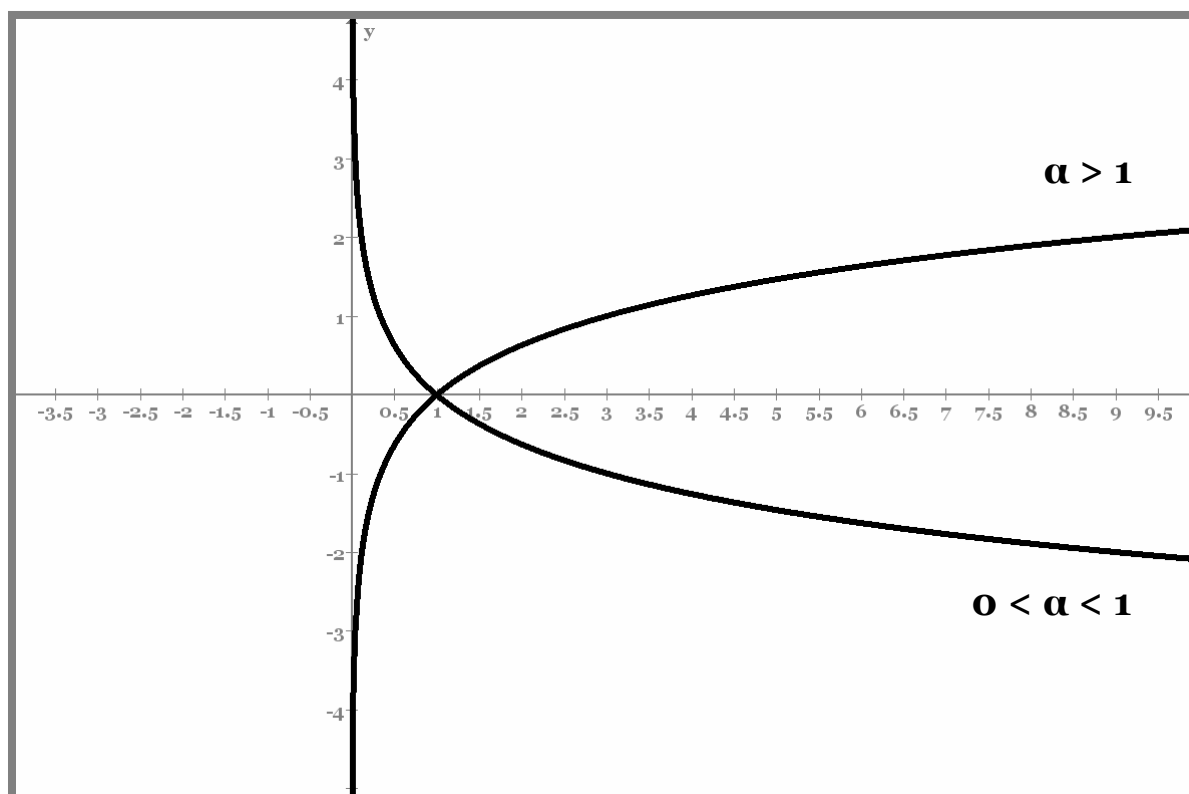
4. Αν $a > 1$ είναι **αύξουσα** ($\uparrow$), δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

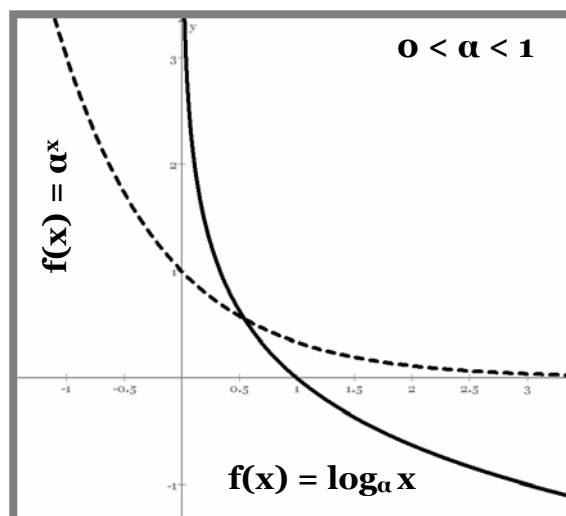
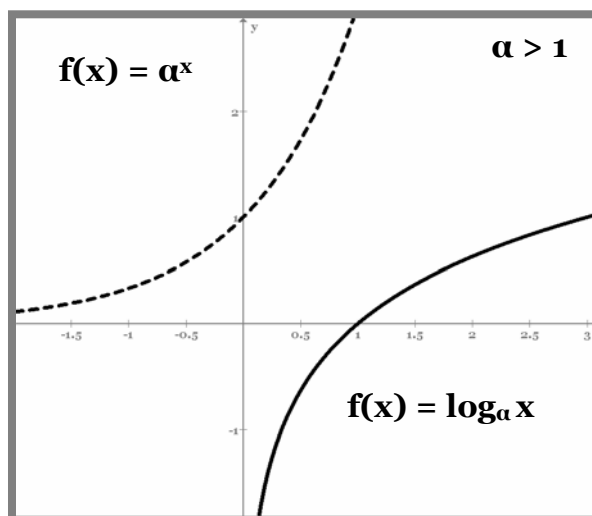
Αν $0 < a < 1$ είναι **φθίνουσα** ($\downarrow$), δηλαδή για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

5. Για καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια καμπύλη της παρακάτω μορφής:

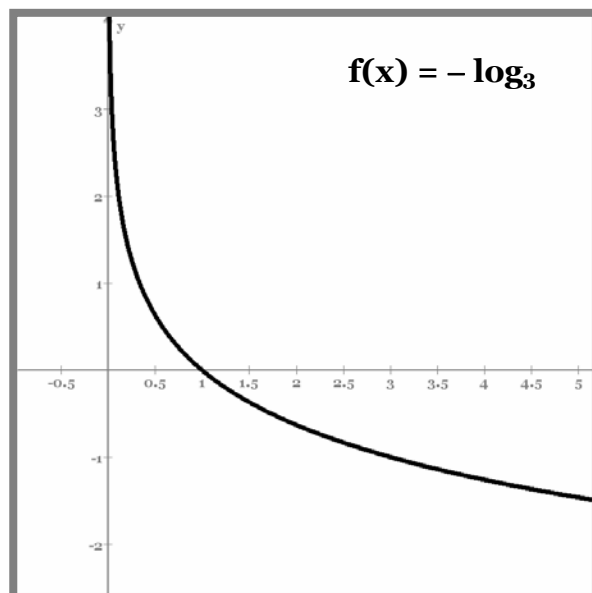
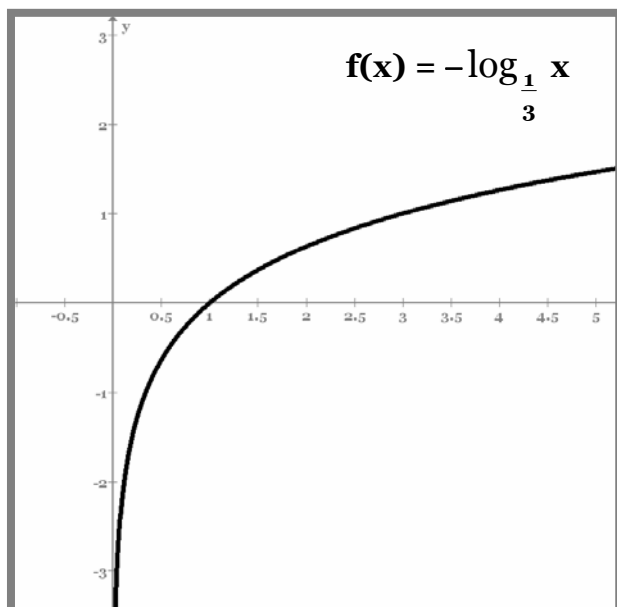
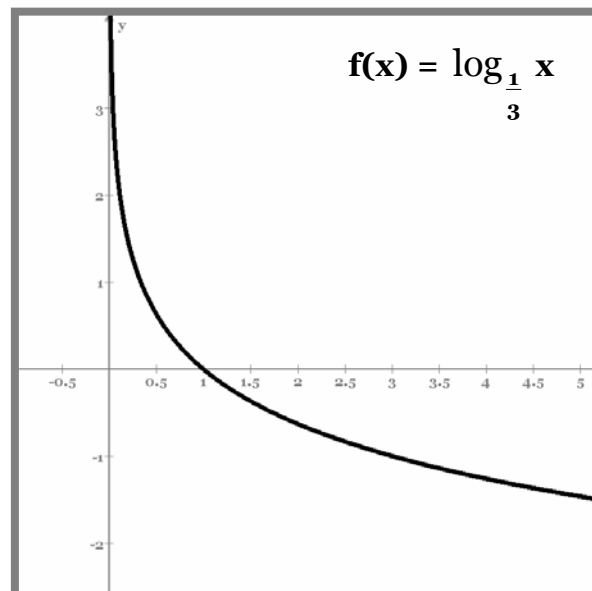
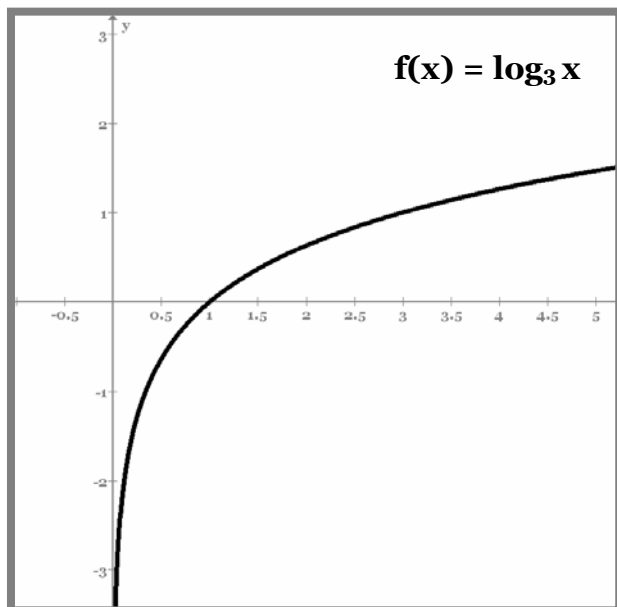


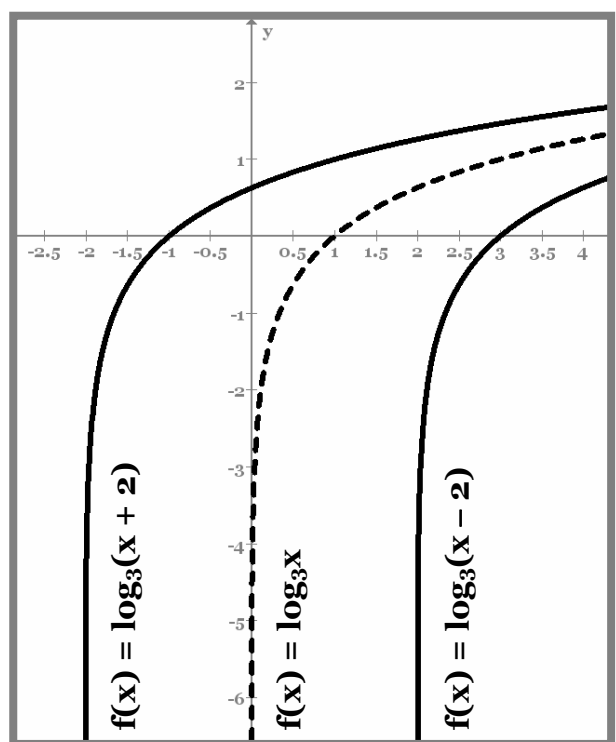
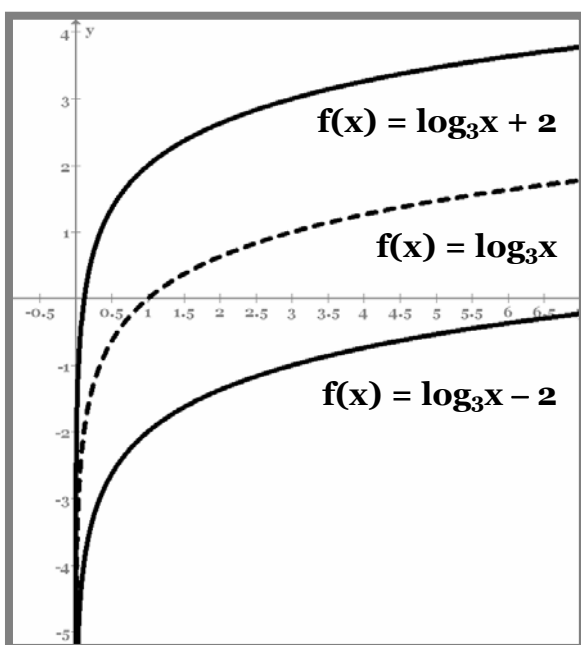
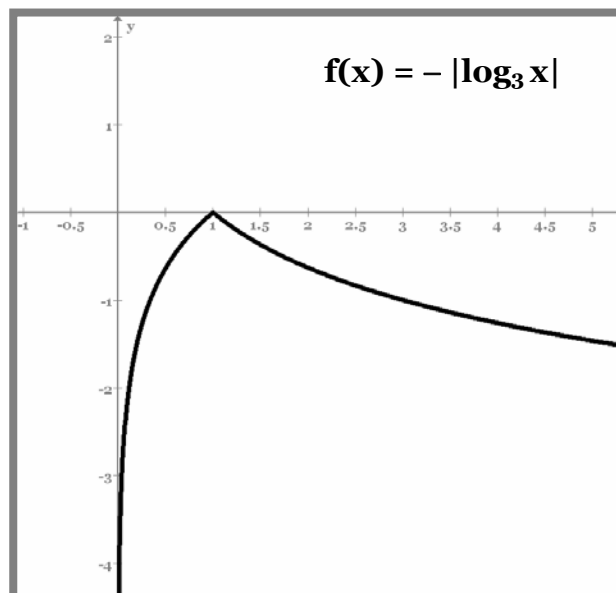
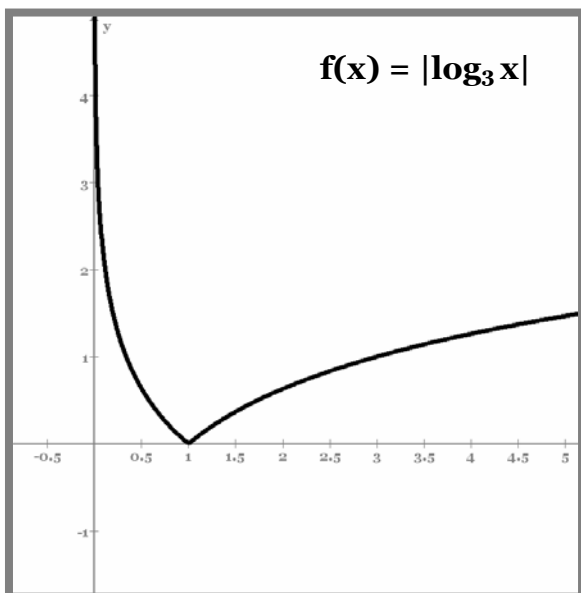
6. Λέμε ότι ο άξονας $y'y$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, για τους ίδιους λόγους που ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της εκθετικής συνάρτησης.
7. Διαπιστώνουμε, επίσης, ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ (δηλαδή, με την ίδια βάση) είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου:



3. Παραδείγματα Γραφικών Παραστάσεων

Εδώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις από διάφορες παραλλαγές της $f(x) = \log_3 x$, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητή η συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης.





Λογαριθμική Συνάρτηση

και άλλα όμορφα...



1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Όταν μας ζητείται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης λαμβάνουμε υπόψιν τις διάφορες περιπτώσεις που αναλύθηκαν στην προηγούμενη σελίδες ή συνδυασμό αυτών.

Εξάσκηση : Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

2. Όταν ζητείται να βρούμε πότε ορίζεται μια λογαριθμική συνάρτηση τότε έχουμε δυο πράγματα, κατά νου:
 - α. Καταρχάς, όμοια με την εκθετική, απαιτούμε για τη βάση του λογαρίθμου να είναι $a > 0$ και $a \neq 1$. Συνήθως, αυτό θα συμβαίνει, εφόσον στις περισσότερες ασκήσεις ασχολούμαστε με δεκαδικούς ή φυσικούς λογάριθμους. Καλό είναι όμως να έχουμε το νου μας, σε απαιτητικότερες ασκήσεις.
 - β. Κατά δεύτερο λόγο, η λογαριθμική συνάρτηση $\log_a x$ είδαμε πως έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, δηλαδή θα πρέπει $x > 0$.

Εξάσκηση : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \log \frac{2-x}{2+x}$

2. Λογαριθμικές Παραστάσεις - Αποδεικτικές Ασκήσεις

Προσπαθούμε με τις ιδιότητες των λογαρίθμων να «ενώσουμε» όλους τους όρους σε έναν (συνήθως, ένα λογάριθμο), τον οποίο κατόπιν υπολογίζουμε.

Σε κάποιες περισσότερες απαιτητικές περιπτώσεις, χρήσιμες είναι και οι ιδιότητες $\log_a a^x = x$ και $\log_a a^x = x$.

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε την παράσταση: $4^{1 - \frac{1}{2} \log_2 3}$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε πριν λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση είναι να πάρουμε βαθιές ανάσες και κατόπιν τους απαραίτητους **περιορισμούς**. Θα πρέπει η παράσταση, μέσα σε κάθε λογάριθμο, να είναι **θετική ποσότητα** (θυμάστε το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής;). Αφού εξετάσουμε όλους τους περιορισμούς, αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία αυτοί **συναληθεύουν** (αναζητούμε δηλαδή τις κοινές τους λύσεις).

1. Καταρχάς, στις εξαιρετικά απλοϊκές εξισώσεις $\log_a \theta = x$, όπου ο άγνωστος είναι κάποιος από τους a , θ , x κάνουμε άμεση αναγωγή της λογαριθμικής εξίσωσης σε μια εύκολη εκθετική, σύμφωνα με τον ίδιο τον ορισμό των λογάριθμων, δηλ. **$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$** .

Εξάσκηση : Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\log_x 32 = 5 \quad \text{και} \quad \log_3 81 = x \quad \text{και} \quad \log_5 x = 3$$

2. Γενικά, προσπαθούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη ως λογάριθμους με την ίδια βάση, ενώνοντας τους διάφορους όρους με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων. Στη συνέχεια, **"διαγράφουμε"** τους λογάριθμους, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι «1-1», άρα θα ισχύει: **$\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$** .

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log(4x + 3) + \log 2 = \log(3x - 1) + \log 3$$

3. Συχνά, μπορεί να μας δίνονται λογαριθμικές εξισώσεις όπου ο άγνωστος θα βρίσκεται εκτός λογαρίθμου, σαν ξεχωριστός όρος. Τότε τον μετατρέπουμε σε λογάριθμο με βάση την κοινή βάση της εξίσωσης, σύμφωνα με την ιδιότητα **$x = \log_a a^x$** .

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση:

$$x + \log(3 + 2^x) = x \log 5 + 2 \log 2 + \log 7$$

4. Σε άλλες πάλι εξισώσεις, μπορεί να μας δίνονται λογάριθμοι με διαφορετικές βάσεις. Τότε, πολύ εύκολα, ανάγουμε όλους τους λογαρίθμους σε άλλους με την ίδια βάση, σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης $\log_a \theta = \frac{\log_b \theta}{\log_b a}$.

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

Σκεφτόμαστε με παρόμοιο τρόπο, όπως στις εξισώσεις, ωστόσο φροντίζουμε αν το $0 < a < 1$ να **αλλάζουμε τη φορά** της ανίσωσης, αφού τότε ισχύει: $\log x_1 < \log x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Στο τέλος, θα πρέπει φυσικά να **συναληθεύσουμε** τα διαστήματα λύσης της ανίσωσης με τα διαστήματα των περιορισμών. Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, τότε η ανίσωση θα είναι προφανώς αδύνατη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η ανίσωση: $\log(3x - 2) - \log 4 > \log(2x - 5)$

5. Ανυπότακτες Εκθετικές Εξισώσεις

Μερικές φορές, ερχόμαστε αντιμέτωποι με εκθετικές εξισώσεις, στις οποίες θα αδυνατούμε να γράψουμε και τα δύο μέλη σαν δυνάμεις με την ίδια βάση. Στην περίπτωση αυτή – και εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά – λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη.

Εξάσκηση : Να λυθεί η εξίσωση: $2^{3x-1} = 3^{x+2}$

6. Συστήματα

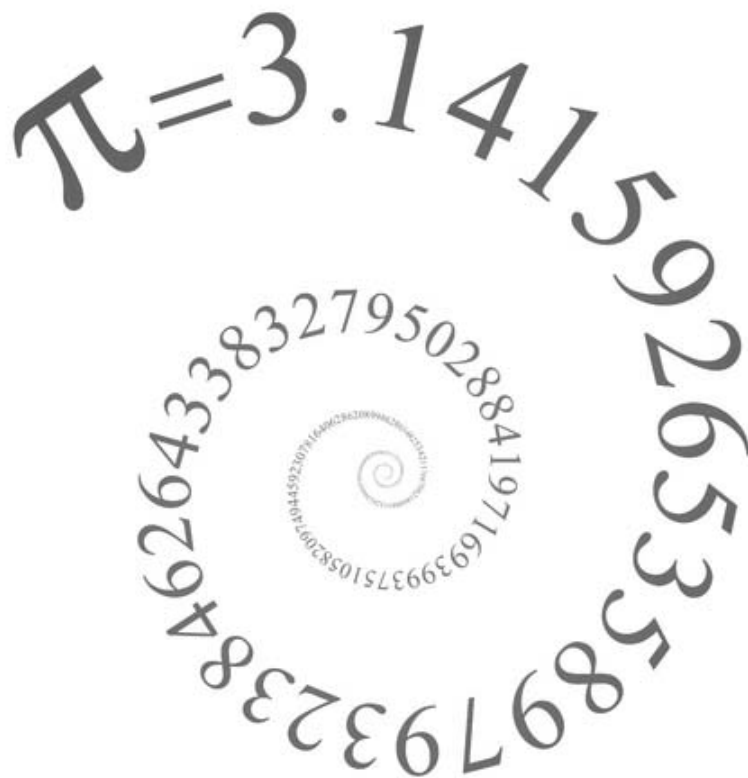
1. Κάποια συστήματα λύνονται εύκολα, με απλή χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και, στη συνέχεια, με απλές αντικαταστάσεις.

Εξάσκηση : Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x^3 - \log y^5 = 5 \end{cases}$$

2. Γενικά πάντως, με όσες γνώσεις έχουμε συνολικά από τις εκθετικές εξισώσεις και τις ιδιότητες των λογαρίθμων, προσπαθούμε να ανάγουμε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο χωρίς λογαρίθμους ή αγνώστους στους εκθέτες.

Εξάσκηση : Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^y = 128 \\ 2 \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$





1. Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = (x^4 - 3x^3 + 6x - 4)^x$

β. $g(x) = \log_{x-1}(e^{2x-1} - 1)$

γ. $\varphi(x) = \ln(x-2) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + \sqrt{\ln \frac{x^2+1}{2}}$

δ. $f(x) = \left(\frac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x, \alpha \in \mathbb{R}$

β. $g(x) = \log_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(x^2+1), \alpha \in \mathbb{R}$

γ. $h(x) = (x^2 - x + 1)^x$

δ. $t(x) = \log_{\frac{x+2}{1-x^2}}(x^4+4)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$.

α. Για ποιές τιμές του λ είναι 1-1 ;

β. Υπολογίστε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

$$f(1) + f(2) + f(3) = 3f(0)$$

γ. Αν για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > 1$ να βρείτε τις τιμές του λ .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log_a\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

α. Εξετάστε αν είναι άρτια η περιττή.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν $x > 0, y > 0$ και $x^2 + y^2 = 7xy$ να δείξετε ότι:

$$\log_a \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y)$$

2. Αν α, β, γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1, \text{ αν ισχύει: } \frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$$

3. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \theta > 0$ και διάφοροι του 1 (α, β, γ διαδοχικοί σε γεωμετρική πρόοδο) να αποδείξετε ότι οι αντίστροφοι των αριθμών: $\log_\alpha \theta, \log_\beta \theta, \log_\gamma \theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων σε αριθμητική πρόοδο με $a_1 = \log \alpha, a_2 = \log \beta$ είναι: $S_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}$.

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $3 \log 2 + \log 5 - \log 4 = 1$

β. $\frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{5} \log 32 = 1 + \log 2$

γ. $\log_{\alpha\beta} \gamma = \frac{\log_\beta \gamma}{1 + \log_\beta \alpha}, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+, \alpha\beta \neq 1, \beta \neq 1$

6. Να αποδείξετε ότι: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_7 8 = 3$

7. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{\log_\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\log_{\alpha^2} (\alpha^2 - 1)} \cdot \frac{\log_{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\log_{\sqrt[3]{\alpha}} \sqrt[6]{\alpha^2 - 1}}$$

$$B = 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 3} + 3 \frac{1}{\log_7 9}$$

8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το $\log \alpha$ και δεύτερο το $\log \beta$ είναι:

$$S_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{\omega(\omega-1)}}{\alpha^{\omega(\omega-3)}}$$

9. Να υπολογίσετε το x , αν είναι: $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$

3. Λογαριθμικές Εξισώσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\sin x + e^{-x} = 2$ στο $[0, \pi]$

β. $3^x + 4^x = 5^x$

γ. $10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^x = 1111110$, αν $x \in \mathbb{N}^*$

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $\log(4x - 1) = 2 \log 2 + \log(x^2 - 1)$

β. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

γ. $\frac{1}{2} \log(x + 2) + \log \sqrt{x - 3} = 1 + \log \sqrt{3}$

δ. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

ε. $4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

στ. $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

ζ. $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

η. $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x + \frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2} + 1} = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$

β. $\log_2(3^{3x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

γ. $\ln x + 6 \log_x e = 5$

$$\delta. \log(3^x + 2 \cdot 5^x) - x \log 5 = \log 39 - \log 15$$

$$\epsilon. x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

$$\sigma\tau. (x^2 - 5x + 6)^{x^2 - 2x} = 1$$

$$\zeta. (4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$$

$$4. \text{ Να λυθεί στο } [0, \pi] \text{ η εξίσωση: } 4^{\sin 2x} + 4^{\sin^2 x} = 3.$$

4. Λογαριθμικές Ανισώσεις

1. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha. (4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} > 100$$

$$\beta. e^{2x} + e \geq e^x + e^{x+1}$$

$$\gamma. 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \geq 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

$$\delta. \left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3 \log x + 2} > 1$$

5. Λογαριθμικά Συστήματα

1. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

ε. $x^2 + y^2 = 425$
 $\log x + \log y = 2$

