

1

Άλγεβρα^{1.1}

Πραγματικοί Αριθμοί

1. Να υπολογιστούν με δύο τρόπους τα παρακάτω αθροίσματα :

α. $(-5) + (-6) - (+3) - (-7) + (-12) - (-13)$

β. $(-7) - (+8) + (-3) + (+7) - (-3) - (+1)$

γ. $-3 - (8 - 7) - (-12 + 11) - (5 + 2)$

δ. $3 - [-2 - (8 + 2)] - 12 - (8 - 3)$

ε. $7 - (-8 + 3) - [-5 - (10 - 13) - 3] - 1$

στ. $-(-3 + 1) - \{-5 + (-3 + 7) - [-3 - (-7 + 1)]\} - (8 - 5)$

2. Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις :

α. $-2 - [36 - 8 - (9 - 28)]$

β. $-4 - (-5 + 3) - [6 - (-4 + 9) + (-1 - 2 + 7)] - (12 - 16)$

γ. $-(-5) + (-12) - [- (+5) - (-12)] - [- (-36)]$

δ. $4 - \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{5}\right)$

ε. $-\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - 2 - \left(\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\right)$

$$\sigma\tau. \quad -\frac{3}{10} + \frac{2}{15} - \frac{1}{30} + \frac{7}{5} - \frac{5}{6} - \frac{11}{30}$$

$$\zeta. \quad \frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{3} - 5 + 7\right) + (-4 + 8) - \left(\frac{1}{2} - 5\right)$$

3. Ομοίως :

$$\alpha. \quad (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-4)$$

$$\beta. \quad (-2) \cdot (+2) + 3 \cdot (12 - 9) - 5 \cdot (2 - 4)$$

$$\gamma. \quad [3 - (3 - 4)] \cdot [5 + (2 - 3)] \cdot (6 - 4)$$

$$\delta. \quad \left(-5 + \frac{1}{3}\right) \cdot 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3\right)$$

$$\epsilon. \quad \left(3 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left[4 - \left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\sigma\tau. \quad (-3) \cdot \left(7 + 6 - \frac{2}{3}\right) - 4 \cdot \left(4 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(7 - \frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$$

4. Ομοίως :

$$\alpha. \quad (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-7) \cdot (+2) \quad \beta. \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{8}{2}\right)$$

$$\gamma. \quad \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) \quad \delta. \quad (12 + 6 - 15) : (-2) : (-4)$$

$$\epsilon. \quad \left(-\frac{5}{12} + \frac{1}{4} - 2\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \sigma\tau. \quad [60 \cdot (-8) \cdot (-12)] : (-3)$$

$$\zeta. \quad \left(\frac{6}{7} - \frac{1}{14} + \frac{3}{7}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \quad \eta. \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[(-4) + \left(-\frac{2}{3}\right) - (-3)\right]$$

$$\theta. (-7) \cdot \left[(-4) : \left(+\frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left(+\frac{9}{2} \right) : (-9)$$

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha. \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$\beta. \left(-1 - \frac{2}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) : \left(-\frac{1}{6} \right)$$

$$\gamma. \frac{1 - \frac{5}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right)}$$

$$\delta. \frac{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right)}{2 - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)}$$

$$\epsilon. \frac{\frac{2}{3} - 3 + \frac{5}{6}}{\frac{4}{3} - 2 + \frac{1}{2}}$$

6. Να υπολογιστεί με δύο τρόπους η τιμή της παρακάτω παράστασης, αν γνωρίζετε ότι $x = \frac{2}{3}$ και $y = -2$.

$$A = x - \left[y - (y + 2) - \left(x + \frac{5}{4} \right) \right] - (x - y)$$

7. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο της παράστασης:

$$A = \alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)$$

8. Αν $\alpha - \beta = 3$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = -\alpha - \left[-2 - (-\beta + 3) + 7 - 2\alpha \right]$$

9. Να κάνετε τις πράξεις: $A = x - 2 \cdot [4x - 3 \cdot (1 - 4x)]$

10. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ και $\beta = \frac{x \cdot y}{x + y}$ είναι αντίστροφοι.

11. Αν οι αριθμοί α και $\beta \cdot \gamma$ είναι αντίστροφοι, να υπολογιστεί τη παράσταση:

$$A = (\alpha + 1) \cdot (\beta\gamma + \gamma) - \gamma \cdot (\alpha + \beta + 1)$$

12. Να αποδείξετε ότι: $(x + y) : z = (x : z) + (y : z)$, με $z \neq 0$.

Δυνάμεις

13. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων :

α. $\alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha$

β. $x^5 : x^3$

γ. $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}$

δ. $(-0,2)^5 \cdot (-0,5)^5$

ε. $\alpha^{-4} \cdot (\alpha^2)^{-4} \cdot \alpha$

στ. $2^{-2} \cdot (-2)^4$

ζ. $(-5)^2 : (-5)^4$

η. $\frac{(-27)^3}{3^3}$

θ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

14. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων :

α. $4 \cdot \alpha^4 \cdot \beta^5 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \alpha^3 \cdot \beta$

β. $4 \cdot \alpha^4 \cdot \beta^{-5} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \alpha^{-12} \cdot \beta$

γ. $(4 \cdot \alpha^4 \cdot \beta^5) : \left(-\frac{5}{7} \cdot \alpha^3 \cdot \beta\right)$

δ. $(4 \cdot \alpha^4 \cdot \beta^{-8}) : \left(-\frac{5}{7} \cdot \alpha^{-3} \cdot \beta\right)$

ε. $4 \cdot (\alpha \cdot \beta)^3 \cdot (-2 \cdot \alpha \cdot \beta)^{-3}$

στ. $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot (-4)^3$

$$\zeta. (-0,25)^{17} \cdot 8^{11}$$

$$\eta. (-4)^{60} \cdot (-1,25)^{40}$$

$$\theta. 12^{100} \cdot 1,5^{50} \cdot 6^{-149}$$

15. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων :

$$\alpha. \left(\frac{x^2 y}{xy^3} \right)^{-2} \cdot (xy)^2$$

$$\beta. \left(\frac{x^2}{2y} \right)^5 \cdot \left(\frac{4y}{x} \right)^6$$

$$\gamma. \left(\frac{7x^2}{-3y^4} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{9y^2}{49x^4} \right)^{-2}$$

$$\delta. \frac{(x^3)^2 \cdot x^7}{x^{12}}$$

$$\epsilon. \frac{(x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z)^{-2}}{x^3 \cdot y^{-2}}$$

$$\sigma\tau. \frac{(\alpha^2 \cdot \beta^3)^2}{(\alpha\beta)^{-2}}$$

$$\zeta. \frac{\left[6 - 4 \left(\frac{5}{8} \right)^0 \right]^{-2}}{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} - \frac{3}{4} \right]^{-1}}$$

16. Αν $x = -2$ και $y = 3$, να υπολογίσετε την παράσταση :

$$3x^2 - y^2 + 2xy^3$$

17. Αν $x = 0,4$ και $y = -2,5$ τότε να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$\alpha. x^5 \cdot (xy^2)^3 : (x^{-2} : y)^{-2}$$

$$\beta. [(xy^{-1})^2 : (x^3 y^7)^{-1}]^2$$

18. Να γίνουν οι πράξεις : $8 \cdot x^4 \cdot y^{-1} : [(2 \cdot x^3 \cdot y^2) \cdot x^0]$

19. Να υπολογιστεί η παράσταση :

$$A = 12 \cdot \left[3^{-4} : \left(2^4 : 3^2 - 2^2 : \frac{9}{8} \right) \right] + \left(2 \frac{1}{2} \right)^{-2}$$

20. Να υπολογιστεί η παράσταση :

$$A = (-3)^4 - 5^3 - (-2)^5 - [(3^3 - 12) : 3 - 8]$$

21. Αν $x = -2$ τότε να υπολογιστεί η παράσταση :

$$A = 25^{x+1} - 3x^2 + 4x^{x+2}$$

22. Αν $x = 2$ τότε να υπολογιστεί η παράσταση :

$$A = 2^{x-4} + 2^{x-3} + 2^{x-2} + 2^{x-1}$$

23. Να λυθεί η εξίσωση : $10^3 x = 10^4$

24. Να υπολογίσετε τον αριθμό x όταν :

α. $4^x \cdot 2 = 16$

β. $9 \cdot 3^{-x} = 9^x \cdot 27$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-4} \cdot x = \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$

β. $x : \left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} = -\frac{1}{7}$

Τετραγωνικές Ρίζες

26. Να απαλειφθούν οι ρίζες από τους παρονομαστές :

α. $\frac{7}{\sqrt{7}}$

β. $\frac{60}{3\sqrt{5}}$

γ. $\frac{8\sqrt{8}}{5\sqrt{8}-3\sqrt{8}}$

δ. $\frac{8}{\sqrt{2}}$

ε. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

27. Να απλοποιηθούν οι ρίζες : $\sqrt{98}$, $\sqrt{162}$, $5\sqrt{75}$.

28. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

α. $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

β. $\sqrt{\frac{156}{16}} \cdot \sqrt{\frac{64}{39}}$

γ. $\sqrt{\frac{16}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{64}}$

29. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α. $\sqrt{18} + \sqrt{75}$

β. $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{3}$

γ. $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$

δ. $\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$

ε. $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

στ. $-\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 11\sqrt{2}$

ζ. $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$

η. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{2})$

θ. $(2\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2)$

ι. $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

ια. $8\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{150}$

ιβ. $2\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{35}$

30. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α. $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{9 + \sqrt{49}}}}$

β. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8+1}+1}+1}$

γ. $\sqrt{\sqrt{16} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{5}}$

δ. $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}$

31. Να βρεθεί το εξαγόμενο : $\left(2\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

32. Αν $\alpha, \beta > 0$, να απλοποιηθεί η παράσταση : $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta^{-1}})^2 \cdot \alpha \cdot \beta^2$

33. Να λυθεί η εξίσωση : $4(x + \sqrt{2}) - \sqrt{8} = \sqrt{8}(x + \sqrt{2})$

Ανισοτικές Σχέσεις

34. Εάν $\alpha > \beta$ τότε να εξετάσετε ποιος είναι μεγαλύτερος στα παρακάτω ζευγάρια :

α. $3\alpha + 4\gamma$ και $3\beta + 4\gamma$

β. $\lambda - 2\alpha$ και $\lambda - 2\beta$

35. Αν $x < y < z$ τότε να βρείτε το πρόσημο του αριθμού :

$$(x - z)(z - y)(y - x)$$

36. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ να αποδείξετε ότι : $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) < 0$

37. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι : $3\alpha - \gamma < 3\beta - \gamma$

38. Αν $3 < x < 5$ και $1 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχονται οι παραστάσεις :

α. $2x$

β. $-3y$

γ. $x + y$

δ. $x - y$

ε. $-x - y$

στ. $3x - 4y$

ζ. $-x + \frac{1}{2}y - 1$

η. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{1}{4}$

39. Αν $-1 < x < 5$ και $2 < y < 6$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχονται οι παραστάσεις :

α. $-y$

β. $x - y$

γ. $x + 4y - 1$

Αλγεβρικές Παραστάσεις

40. Να ξεχωρίσετε τους συντελεστές από τα κύρια μέρη των παρακάτω μονωνύμων :

$$-2x^2, 0,35a^3b, -\frac{12}{7}x^2y^4z, -\frac{\alpha\beta^2}{8}, 14\kappa^2\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)\kappa\mu^3$$

41. Ομοίως :

$$13x^2y, \frac{x^3y^2}{13}, \frac{3y}{5x^{-2}}, \frac{-5y^2}{8x^{-1}}, \frac{3x^4y^2}{8x}, \sqrt{12}x^2y, \sqrt{3}(xy)^2x$$

42. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια :

$$-4a^2\beta, 4a^2\beta, -4a\beta^2, -4a\beta a, 8a^2\left(-\frac{1}{2}\right)\beta^1, \frac{-345}{13}a^2\beta$$

43. Ομοίως :

$$2\alpha\beta^2, -\alpha^3, -3\alpha^2\beta, 4\alpha\beta^2, -8\alpha^3, 4\alpha^2\beta, \frac{\alpha^3}{3}, -\frac{\alpha\beta^2}{2}$$

44. Να βρείτε τους ακέραιους κ, λ ώστε οι παρακάτω παραστάσεις να είναι μονώνυμα :

α. $3x^4 y^{2\kappa-1} - 8x^{\lambda+2} y^3$

β. $-2\alpha\kappa\beta^3 + 5\alpha^{2\kappa-1}\beta^{6-3\lambda}$

45. Να βρείτε από ποια μονώνυμα αποτελούνται τα παρακάτω πολυώνυμα :

$12x^2 - 4x^2y$				
$-23\alpha\beta^2 - \frac{7}{5}\alpha\beta\gamma + 3,5\beta^5$				
$-x^8 + \alpha\beta - x\alpha^{12}y - 1$				
$14\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda\kappa + 2\kappa\lambda^2\lambda^{-1}$				

46. Να υπολογίσετε τους ακέραιους x και y ώστε τα παρακάτω μονώνυμα να είναι $5^{\text{ου}}$ βαθμού :

α. $3\alpha^{2x-5}\beta^{6-3x}$

β. $-2\alpha^x\beta^y$

47. Να υπολογίσετε τους ακέραιους x και y ώστε τα παρακάτω μονώνυμα να είναι όμοια :

$$\frac{1}{2}\alpha^{\frac{x-1}{2}}\beta^{2(y-3)} \quad \text{και} \quad -\sqrt{3}\alpha^{\frac{x}{2}-1}\beta^{3(2-y)}$$

48. α. Να βρείτε για ποιες τιμές των κ και λ η παρακάτω αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο :

$$-\frac{1}{2}x^3y^{\lambda+1} + \frac{3}{2}x^{\kappa-2}y^7$$

- β. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = -2$, $y = -1$.
-

49. Να υπολογίσετε τον ακέραιο αριθμό α, ώστε το πολυώνυμο :

$$5x^{\alpha+1}y^{2\alpha} - 3x^{4\alpha-3}y^{4-\alpha} + z^5$$

- α. να είναι 4ου βαθμού ως προς y
β. να είναι μεγαλύτερο του 6ου βαθμού
-

50. Αν $x = -2$ να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

α. $x^4 + x^2 + 1$ β. $x^2 - 3x + 4$ γ. $x^3 + 1$

51. Αν $x = 7$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$3 + x + \sqrt{x+2}$$

52. Αν $x = -2$, $y = 1$ να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων :

α. $x^2 + y^2$ β. $(x + y)^2$ γ. $x^2 + 2xy + y^2$

Πράξεις μονωνύμων

53. Να γίνουν οι αναγωγές των όμοιων όρων στις παρακάτω παραστάσεις :

α. $3a^2\beta - a^2\beta - 4a^2\beta + 6a^2\beta$

β. $7x^2 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^4 + 6x^2 + 7x - 9 + 12x^3$

γ. $3a\beta^2 - 2a\beta - 7a^2\beta + 9a\beta^2 - 11a\beta$

δ. $6\psi a\chi^2 - 5a\psi - 3\psi a\chi^2 + 9\chi\psi - \chi a\psi^2 - 3a^2\chi^2 + 11\chi\psi$

- ε.** $7\alpha^2\beta - 12\alpha^2\beta + 5\alpha^2\beta - \alpha\beta + 3\alpha\beta^2 - \alpha\beta + 4\alpha\beta$
- στ.** $2\alpha^2\beta^3 - 3 + \frac{2}{3}\alpha^2\beta^3 - \alpha^2\beta^3 + 1$
- ζ.** $-\alpha^2\beta\gamma + 13\gamma\alpha^2\beta - 5\gamma\beta\alpha^2$
- η.** $3x^2y - y^2 + 1 - 3y^2 - 4 + 2x^2y - y^2 - x^2y - 1$
- θ.** $3x^2 - 4xy + x^2y - \frac{1}{2}x^2y + xy - 4x^2 + x^2y$
- ι.** $\alpha^2 - 3\alpha^3 + 4\alpha^4 - \alpha^3 + 4\alpha^2 - \alpha^4 + 2\alpha^3$
- ια.** $3xy - \frac{xy}{2} + 4x^2y - 3xy^2 + \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2}$
- ιβ.** $\alpha^2\beta - (\beta^2 - \alpha^2\beta) + 2\beta^2 + (3\beta^2 - 4\alpha^2\beta)$
- ιγ.** $\frac{4}{6}\kappa\lambda^2 - \frac{5}{6}\kappa\lambda^2 + \frac{10}{6}\kappa\lambda^2$
- ιδ.** $\frac{10}{3}xy - \frac{5}{6}xy + \frac{8}{18}xy$
- ιε.** $-2,5\alpha\beta - 10,4 - 0,5\alpha^2\beta^2 + 7,1 - 1,6\alpha\beta - 11,5\alpha^2\beta^2$

54. Ομοίως :

- α.** $2\alpha - 3\beta + 7\alpha - 3\beta$
- β.** $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2xy - 3y^2 + 8x^2$
- γ.** $\alpha^2\beta - 3\alpha\beta + 4\alpha^2\beta + 4\alpha\beta - 3\alpha\beta + 2\alpha^2\beta$
- δ.** $3x^2y - \frac{1}{2}x^2y - 2x^2y$
- ε.** $8\alpha - (-5\beta) + (-3\alpha) - (-9\alpha) + (-11\beta)$
- στ.** $(2x^2 + 8) - (3x^2 - 3)$
- ζ.** $-(2x + y) - (-3y + 5x) - 2y$

- η.** $-(3\alpha + 2\beta) + (3\beta - \alpha - 4) - (-4 + \beta)$
θ. $5x^2 - 3y^4 + (-4x^2 + 5\varphi) - (-9x^2 - y^2 + 4\varphi)$
ι. $-3\alpha^2 + (-2\alpha + 5) - [-(4\alpha^2 - 3\alpha) - 8]$
ια. $\alpha - 2\beta - [2\alpha - (\beta - 4\gamma)] - 2\alpha$
ιβ. $3x^2 - [(5x^3 - x) + 4x^2 - (2x^2 + 6)] + (-2x^2 - 5x)$
ιγ. $x^2 - (y^2 - xy) + [3y^2 - 3xy - (x^2 + y^2)]$
ιδ. $-3\alpha\beta + (\alpha^2 - 2\beta^2) - [\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2) - 3\alpha^2] - (2\alpha^2 + \beta^2)$
ιε. $[6\alpha^4 - (4\beta^2\gamma^2 + \gamma^2)] - [6\gamma^2 - (\beta - 3\beta^2\gamma^2)] - (\gamma^2 + \beta)$
-

55. Να γίνουν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί :

- | | |
|---|--|
| α. $3x^2y(-2)x$ | β. $(3x)^3yx^2$ |
| γ. $2x^2y^2 \cdot \frac{1}{8}xy^3$ | δ. $xy \cdot 2x^2y^2 \cdot (-1)xy^2$ |
| ε. $(3x^2) \cdot (-x^6)$ | στ. $(-x^2y) \cdot (-3) \cdot (\frac{1}{2}x^4y^2)$ |
| ζ. $4\alpha^3 \cdot (-\alpha^4)$ | η. $\frac{2}{3}\kappa^2\lambda \cdot 7\kappa\lambda^4 \cdot \frac{9}{4}\lambda$ |
| θ. $(\alpha^2\beta) \cdot (\alpha^3\beta^4)$ | ι. $(3x^4y^4) \cdot (12x^2y)$ |
| ια. $-10\kappa^3\lambda\mu \cdot 24\kappa\lambda^6$ | ιβ. $4\kappa^3\lambda^2\mu \cdot (-3\kappa\lambda^5\mu^2)$ |
| ιγ. $(-7xy^2) \cdot (-6x^3y^5)$ | ιδ. $2,5\alpha^2\beta\gamma^4 \cdot (-5,2\alpha\beta^2\gamma)$ |
| ιε. $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}xy\right) \cdot 2x$ | ιστ. $-xy^2z \cdot (-3xyz^2)$ |
| ιζ. $-\frac{3}{4}\kappa^5\lambda^5 \cdot \frac{8}{10}\kappa^2\lambda^2\mu$ | ιη. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}xy^3\right)$ |
-

56. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις :

- α.** $xy^3 : (4x^4y)$ **β.** $(\alpha^2\beta) : (\alpha^3\beta^4)$
γ. $(12x^4y^4) : (3x^2y)$ **δ.** $-48\kappa^3\lambda\mu : (24\kappa\lambda^6)$
ε. $14\kappa^3\lambda^2\mu : (-8\kappa\lambda^5\mu^2)$ **στ.** $(-7xy^2) : (-7x^3y^5)$
ζ. $2,5\alpha^2\beta\gamma^4 : (-0,5\alpha\beta^2\gamma)$ **η.** $6\mu^2\nu\xi^2 : (\frac{1}{2}\mu^3\nu^3)$
θ. $10\alpha^2\beta^5 : (-2\alpha^3\beta)$ **ι.** $-36x^{10}y\alpha^3 : (-9x^8\alpha^6)$
ια. $\frac{2}{5}\alpha^2\beta^4 : (\frac{10}{9}\alpha^4\beta)$ **ιβ.** $-\frac{3}{4}\kappa^5\lambda^5 : (\frac{8}{10}\kappa^2\lambda^2\mu)$
ιγ. $(-xy^2\omega)^3(xy\omega) : (x^2y^3\omega)$

Πράξεις πολυωνύμων

57. Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις :

- α.** $2 [2(x - y) - 3(x - 2y)] - 4 [3(x^2 + y^2) + 7xy - (x^2 - y)]$
β. $(\alpha^2 - \alpha + 1) - [(\alpha^2 + \alpha + 2) - (2\alpha + 3) - (\alpha^2 - 4\alpha + 3) + \alpha] - (\alpha^2 - \alpha + 6)$
γ. $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x - 2) + 4(x^2 - 1)$
δ. $3x(x^2 - 5) - 4x^2(x + 2) + 4x(x^2 - 1)$
ε. $3x^2(x - 1) - 3x(x^2 + 3) - 2x^2 + 5(x - 2 - 4x^2)$

58. Ομοίως :

- α.** $-3(x - 1) + 4(-x - 2) - 3x$
β. $3x - 2(x + 3) - 4x(x - 2)$
γ. $2\alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - 2\alpha^2\beta$
δ. $4\alpha\beta + \alpha(3 - 2\beta) - (5 - \alpha)$
ε. $-4\alpha[(1 - \alpha^2) - \alpha(\alpha - 2)] + 3\alpha - 2(1 - 3\alpha^2)$

$$\sigma\tau. \quad 3x^2(x-1) - 4x(x^2 - x + 1) - 5x + 1$$

$$\zeta. \quad -1 - 2x(-x + 1) + x(-2x + 3) + 4 - x(1 - 2x) + 3$$

$$\eta. \quad \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{6}{5}x^2 \right)$$

$$\theta. \quad -5x^2(x^3 - 2x^2 + 4) + (1 - 2x)(-4x^3) - x(x - 1) - 2x$$

$$\iota. \quad 2\alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \beta^3 - (\alpha - \beta)(-3\alpha\beta) - 4\alpha^2\beta$$

59. Να εκτελεστούν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί :

$$\alpha. \quad 10\alpha\beta(5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\gamma - 10\beta^2)$$

$$\beta. \quad -4\alpha(-6\alpha^2 + 12 - 7\alpha^3)$$

$$\gamma. \quad -6\kappa^2\lambda^3(6\kappa^3\lambda + 3\kappa\lambda - 5\kappa\lambda^4)$$

$$\delta. \quad (\mu^2 - 2\mu)(5 - \mu)$$

$$\epsilon. \quad (-3\alpha^2 - \alpha)(6\alpha - 1 - 5\alpha^2)$$

$$\sigma\tau. \quad (2\mu^2\lambda^3 - 4\mu\lambda^2)(5\mu\lambda - 10\mu^5\lambda)$$

$$\zeta. \quad \frac{4}{6}\kappa\lambda \left(-\frac{2}{3}\kappa^2\lambda + \frac{5}{2}\lambda^2 \right)$$

$$\eta. \quad (2\alpha^2\beta^2 - 6\alpha\beta + 1)(\alpha\beta^3 - \alpha^4 + 2\beta^2)$$

60. Να γίνουν οι αναγωγές ομοίων όρων, αφού πρώτα ολοκληρωθούν όλοι οι απαραίτητοι πολλαπλασιασμοί :

$$\alpha. \quad (x+1)(x+2)$$

$$\beta. \quad (x-3)(x^2-1)$$

$$\gamma. \quad (x^2+x-1)(x+1)$$

$$\delta. \quad (x-1)(x^2-2x+1)$$

$$\epsilon. \quad (x^2-x-1)(x^3-x^2+x)$$

$$\sigma\tau. \quad (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\zeta. \quad (3x-1)(x^2+1)(2x-1)$$

$$\eta. \quad (x+y)(y+z) - (z+\omega)(\omega+x) - (x+z)(y-\omega)$$

θ. $2x(x - 2)(3x + 1) - 3x(x + 1)(2x - 3)$

ι. $(-a^3 + 5a^2 + a)(-2a^2 + 3a) + (5a - 7a^2)(-3 + 4a - 6a^2 + a^3)$

61. Δίνονται τα πολυώνυμα :

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1, Q(x) = x^2 - 7x + 2, R(x) = 3x - 2$$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$P(x) - Q(x) + R(x) \text{ και } Q(x) \cdot R(x) - P(x)$$

62. Δίνονται τα πολυώνυμα :

$$A = x^2 - 2x + 1, B = 2x^2 - 3, \Gamma = -x^3 + 5x^2 - 2$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα :

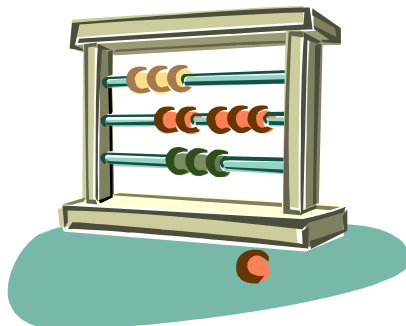
$$-2A + B - \Gamma \text{ και } A \cdot B$$

και στη συνέχεια την αριθμητική τους τιμή για $x = -1$.

63. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x + x^2 + 3$ και $Q(x) = x^2 - 5x - 8$.
Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x) + Q(x)$ και $3 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$

64. Αν $x = -2$ τότε να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$(2x + 3)(x^2 + x - 1) - (x^2 - 1)(x + 2) - 2x^3$$



1

Άλγεβρα^{1.2}

Ταυτότητες

Τετράγωνο Αθροίσματος – Διαφοράς

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα :

α. $(\alpha + 3)^2$

β. $(10 + \kappa)^2$

γ. $(\mu - 4)^2$

δ. $(4 - x)^2$

ε. $(\alpha + 2\beta)^2$

στ. $(6\kappa - 5)^2$

ζ. $(3\alpha + 4\beta)^2$

η. $(2\alpha - 7\beta)^2$

θ. $(-\alpha - \beta)^2$

ι. $(-x + y)^2$

2. Ομοίως :

α. $(\alpha + \frac{1}{2}\beta)^2$

β. $(x + \frac{1}{x})^2$

γ. $(-\psi + 5\chi)^2$

δ. $(-3\alpha - 7\beta)^2$

ε. $(-\frac{1}{2}x - y)^2$

στ. $(-\frac{1}{2}xy + y)^2$

ζ. $(\alpha^2 + \beta)^2$

η. $(-x^2 + xy)^2$

θ. $(-2xy + x^2y)^2$

ι. $(\alpha - \beta^3)^2$

$$\text{ια. } (x^2 - y^3)^2$$

$$\text{ιβ. } (3\alpha^2 + 4\alpha\beta)^2$$

$$\text{ιγ. } (x^3 + 3xy^2)^2$$

$$\text{ιδ. } (x^v - y^v)^2$$

$$\text{ιε. } \left(\frac{2}{3}x + y\right)^2$$

$$\text{ιστ. } \left(x^2 + \frac{1}{2}y^3\right)^2$$

$$\text{ιζ. } \left(\frac{2}{5}x - 2y\right)^2$$

$$\text{ιη. } \left(x^2 - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{ιθ. } \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^2$$

$$\text{κ. } (x - \sqrt{3})^2$$

$$\text{κα. } (\sqrt{2x} - \sqrt{5y})^2$$

$$\text{κβ. } \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5}} - \beta\sqrt{5}\right)^2$$

$$\text{κγ. } \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{7y}{12}\right)^2$$

Κύβος Αθροίσματος – Διαφοράς

3. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα :

$$\text{α. } (x + 1)^3$$

$$\text{β. } (x - 2)^3$$

$$\text{γ. } (-x + 1)^3$$

$$\text{δ. } (-x - 1)^3$$

$$\text{ε. } (2x + 1)^3$$

$$\text{στ. } (2x - 3)^3$$

$$\text{ζ. } (3 - 2x)^3$$

$$\text{η. } (2\alpha + 3\beta)^3$$

$$\text{θ. } (\kappa^2 - \lambda)^3$$

$$\text{ι. } \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3$$

$$\text{ια. } \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^3$$

$$\text{ιβ. } \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$$

$$\text{ιγ.} \quad \left(x^2 - \frac{y}{3}\right)^3$$

$$\text{ιδ.} \quad (x^2 + 2y^2)^3$$

$$\text{ιε.} \quad \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3$$

$$\text{ιοστ.} \quad \left(\frac{2}{3}x^2 - 3y^2\right)^3$$

Άθροισμα επί διαφορά / Διαφορά τετραγώνων

4. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\text{α.} \quad (x - 9)(x + 9)$$

$$\text{β.} \quad (x + 4)(x - 4)$$

$$\text{γ.} \quad (3 - \alpha)(3 + \alpha)$$

$$\text{δ.} \quad (2\kappa - \lambda)(2\kappa + \lambda)$$

$$\text{ε.} \quad (x + 81)(81 - x)$$

$$\text{στ.} \quad (-x + 2y)(x + 2y)$$

$$\text{ζ.} \quad (-x - 2y)(x + 2y)$$

$$\text{η.} \quad (-x - 2y)(x - 2y)$$

$$\text{θ.} \quad (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$\text{ι.} \quad (x^2 - y)(x^2 + y)$$

$$\text{ια.} \quad (2x^2 - y)(2x^2 + y)$$

$$\text{ιβ.} \quad (\kappa^2 + \lambda^3)(\kappa^2 - \lambda^3)$$

$$\text{ιγ.} \quad (\alpha^3 - 3\beta)(\alpha^3 + 3\beta)$$

$$\text{ιδ.} \quad (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$\text{ιε.} \quad (2x^2y + 6)(2x^2y - 6)$$

$$\text{ιοστ.} \quad (3xy^v - \omega^v)(\omega^v + 3xy^v)$$

$$\text{ιζ.} \quad (0,1\alpha + 0,2\beta)(0,1\alpha - 0,2\beta)$$

$$\text{ιη.} \quad (\kappa\lambda + \mu)(\mu - \kappa\lambda)$$

$$\text{ιθ.} \quad (-\alpha^2 - \beta)(-\beta + \alpha^2)$$

5. Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα :

$$\text{α.} \quad \left(\frac{x}{\alpha} + 2\right)\left(\frac{x}{\alpha} - 2\right)$$

$$\text{β.} \quad \left(\frac{x}{11} + \frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11} - \frac{5y}{12}\right)$$

$$\text{γ.} \quad \left(-2x + \frac{1}{2}y\right)\left(2x + \frac{1}{2}y\right)$$

$$\text{δ.} \quad \left(2x + \frac{3}{2}y\right)\left(2x - \frac{3}{2}y\right)$$

$$\text{ε.} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)$$

$$\text{στ.} \quad (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

$$\zeta. (-\sqrt{3x-3y})(-\sqrt{3x+3y}) \quad \eta. (\sqrt{5\alpha}-\sqrt{3\beta})(\sqrt{5\alpha}+\sqrt{3\beta})$$

$$\theta. \left(\frac{1}{4x^2}-\frac{y^3}{3}\right)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{y^3}{3}\right)$$

6. Να υπολογίσετε με το συντομότερο τρόπο το γινόμενο :

$$(3x-2y)(9x^2+4y^2)(3x+2y)$$

Συμπλήρωση Κενών

7. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες :

$$\alpha. (\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$$

$$\beta. (\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$$

$$\gamma. (\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$$

$$\delta. \left(\dots - \frac{1}{2}\right)^2 = 16x^4 - 4x + \dots$$

$$\epsilon. (2\beta - \dots)^2 = \dots - \dots + 36\gamma^2$$

$$\sigma\tau. (-\sqrt{2} + \dots)^2 = \dots - \dots + 9x^2y^4$$

$$\zeta. (5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$$

$$\eta. (2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3 \cdot \dots + 3 \cdot \dots + 27$$

$$\theta. x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$$

$$\iota. \dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$$

$$\iota\alpha. \dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$$

$$\iota\beta. \alpha^2x^4 + \dots + \dots = \left(\dots + \frac{1}{2}\beta y\right)^2$$

$$\iota\gamma. x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$$

$$\iota\delta. \dots - 8\alpha^2\beta + \dots = (\alpha + \dots)^2$$

$$\text{ιε.} \quad \dots - \dots + \dots - 8y^3 = (10x - \dots)^3$$

Παραστάσεις με ταυτότητες

8. Να γίνουν οι πράξεις :

α. $(1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$

β. $(x^2 - 1)^2 - 1$

γ. $(4\alpha - 3\beta)^2 - 16\alpha^2 - 9\beta^2 + 24\alpha\beta$

δ. $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$

ε. $2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$

στ. $2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$

ζ. $-9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$

η. $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$

θ. $(1 - 2x)^2 - x(-x - 1)^2 + (2 - 3x)(2 + 3x)$

ι. $(1 - x)(1 + x) + (x - 2)^2 - (2x + 1)^2$

ια. $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$

ιβ. $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$

ιγ. $(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$

ιδ. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - 2)^2$

ιε. $(x + 3)(5 + 2x)(2x - 5) - 2x(1 - 4x)^2$

9. Ομοίως :

α. $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$

β. $2(x - 1)^3 - (3x + 2)^2 + (5x + 2)(5x - 2)$

- γ.** $(x - 2)^3 - 2x(x + 1)^2 + 3(x + 1)(x - 1)$
- δ.** $(x - 2)^3 - x(3 - 2x)(3 + 2x) + 2x(3 + 2x)^2$
- ε.** $(\alpha^3 + 1)^2 - (\alpha^2 + 1)^3 + 3\alpha^2(\alpha + 1)^2$
- στ.** $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$
- ζ.** $(\alpha + 2\beta)^3 - (2\alpha - \beta)^3 - (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta)$
- η.** $(2x + 1)^3 - (3x - 1)^2 + (2x + 8)(2x - 8)$
- θ.** $(2x - 3)^3 - (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) + 5$
- ι.** $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^3 - (\alpha - \frac{1}{\alpha})^3$
- ια.** $(2\alpha + 2)^3 - (2\alpha - 2)^3$
-

10. Ομοίως :

- α.** $(6x^{v-1} + y^{3v})(6x^{v-1} - y^{3v})$
- β.** $(x + y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 + (x - y)^3$
- γ.** $(4x + 3y + 5\omega)^2 - (2x - y + 3\omega)^2 - (x + 3y - 2\omega)^2$
- δ.** $-2x(x - 1)(x + 2) + 3x(3x^2 - 2x)^3 + 5x^2(2x^4 - x)^2$
- ε.** $2\alpha^3(4\alpha^2 + 3)^2 - 5(2\alpha + 1)^3 - 3\alpha(4\alpha^3 - \alpha^2)(4\alpha^3 + \alpha^2)$
-

11. Εάν $x = 2\sqrt{3} + 1$ και $y = 2\sqrt{3} - 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $x^2 + y^2 + 2xy$

12. Εάν $x + y = 6$ και $x \cdot y = 8$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

- α.** $x - y$ **β.** $x^2 - y^2$ **γ.** $x^2 + y^2$
- δ.** $(x + 3)(x - 3)$ **ε.** $x^3 + y^3$ **στ.** $(x - y)^2$

ζ. $x^4 + y^4$

13. Εάν $x - y = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = (x + y)^2 - 4xy$

14. Εάν $x + \frac{1}{x} = 4$ τότε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

15. Αν είναι $x^2 - y^2 = 24$ και $x + y = 6$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: $x + y$ και xy

16. Αν είναι $x^2 + y^2 = 36$ και $x - y = 4$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: xy , $x + y$, $x^2 - y^2$

Αποδεικτικές

17. Να αποδείξετε ότι :

α. $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β. $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha^2$

γ. $(4x + 3y)^2 + (3x - 4y)^2 = 25(x^2 + y^2)$

δ. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 = 24xy$

ε. $x^2 + (2x + 5)^2 = (x + 4)^2 + (2x + 3)^2$

ε. $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$

στ. $(2x - y)^2 - (x - 2y)^2 = 3(x + y)(x - y)$

ζ. $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$

$$\eta. (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

$$\theta. (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (xy + 1)^2 = (x - y)^2$$

$$\iota. (\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\iota\alpha. (\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

$$\iota\beta. \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 = 2xy$$

$$\iota\gamma. \frac{(3\sqrt{7}-1)^2 - (1+3\sqrt{7})^2}{4\sqrt{7}} = -3$$

$$\iota\delta. (\alpha + \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$$

Διάφορες

18. Να απαλειφούν οι ρίζες από τους παρονομαστές :

$$\alpha. \frac{1}{1-\sqrt{3}} \qquad \beta. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-7} \qquad \gamma. \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\delta. \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} \qquad \epsilon. \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

19. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha. (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \qquad \beta. 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$$

$$\gamma. (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$$

20. Αν $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = 4$ τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \alpha^3 + \beta^3$$

- 21.** Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$ τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \alpha^4 + \beta^4$$

- 22.** Αν $(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$, να αποδείξετε ότι : $x = y$
-

- 23.** Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι : $\alpha = \beta$
-

- 24.** Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, να αποδείξετε ότι :

$$(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

- 25.** Αν $x + y = 7$ και $xy = 12$ τότε να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

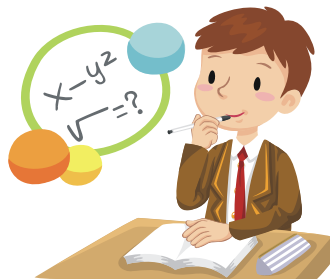
$$x^2 + y^2 \text{ και } (x + 2)(y + 2)$$

- 26. α.** Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) [(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

- β.** Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
-

- 27.** Αν $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ισόπλευρο.





Άλγεβρα^{1.3}

Παραγοντοποίηση

Κοινός Παράγοντας

1. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις :

α. $2αβ - 2αδ$

β. $8x^2 - 4x$

γ. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

δ. $4κλ^2 - 10κ^2λ + 13κλ$

ε. $2αx^2 + 3βx^2 - 7γx^2$

στ. $9x^2y^2 - 15xy^3 + 21x^3y$

ζ. $4x^2 - 12x + 20xy$

η. $15α^3β^3γ^2 - 5α^2β^3γ + 20α^2β^3γδ$

θ. $α^3χ^2ψ - α^2χ^3ψ^2 + α^2χ^2ψ^3$

ι. $3χψ^2 + 6χ^2ψ + 12χ^2ψ^2$

ια. $5χ^3ψ^2 - 10χ^2ψ^2 + 15χ^2ψ^4$

ιβ. $16χ^2ψω - 24χψ^2ω^2 + 32χψω$

ιγ. $3α^{ν+2} - 12α^ν$

2. Ομοίως :

α. $β(x + 2y) + γ(x + 2y)$

β. $2α^2β(x + y) - 4αβ^2(x + y)$

γ. $3α(κ - 3λ) + 6αβ(κ - 3λ) + 12α^2β(κ - 3λ)$

- δ.** $(x + y)^3 - (x + y)^2$
- ε.** $\alpha(x - y) + \gamma(y - x)$
- στ.** $2\alpha(\gamma - 2\delta) + 2\alpha\beta(2\delta - \gamma) - 4\alpha^2(\gamma - 2\delta)$
- ζ.** $\alpha(x + y) + \beta(x + y) - (\alpha - \beta)(x + y)$
- η.** $(x - 2)(x - 1)^2 - 4(2 - x)$
- θ.** $2\alpha(\alpha - 2\beta) + \alpha - 2\beta$
- ι.** $5(x - 2)(x - 3) - x + 3$
- ια.** $5\alpha(x - y) - 3\beta(x - y) - (x - y)$
- ιβ.** $(4x - 3)(y + 5) - 4x + 3$
- ιγ.** $\chi^3(\psi - 4) - 3\chi^2(4 - \psi)$
- ιδ.** $\chi(\alpha + \beta) + \psi(\alpha + \beta) - (\chi - \psi)(\alpha + \beta)$
- ιε.** $3(\chi + 1)(\chi - 4) - \chi + 4$
- ιστ.** $3\kappa(\alpha - \beta + \gamma) - \lambda(\beta - \gamma - \alpha)$
- ιζ.** $(\alpha - \beta)(2x - y) - 2(\beta - \alpha)(y - 2x)$
- ιη.** $3x^2(x - 3y) - x + 3y$
- ιθ.** $2x^2y^3(\alpha - 5\beta) - 4xy^2(5\beta - \alpha)$

Ομαδοποίηση

3. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις :

- | | |
|---|---|
| α. $2x + 2y + \alpha y + \alpha x$ | β. $8\chi + 8\psi + \alpha\chi + \alpha\psi$ |
| γ. $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta$ | δ. $\alpha^2 - 4\alpha + \alpha\gamma - 4\gamma$ |
| ε. $3\chi - \alpha\psi - \alpha\chi + 3\psi$ | στ. $\chi^3 - 5\chi^2 + 2\chi - 10$ |
| ζ. $\alpha^2\gamma^2 - \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\gamma - \beta\delta$ | η. $5\alpha x - 4\beta y + 5\alpha y - 4\beta x$ |
| θ. $4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega$ | ι. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ |
| ια. $12\alpha^3 + 60\alpha^2 + 4\alpha + 20$ | ιβ. $\alpha^3 + 4\alpha^2 - \alpha - 4$ |

- ιγ.** $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$ **ιδ.** $8xy^3 - 24y^2 - 7\alpha xy + 21\alpha$
- ιε.** $\alpha^3 - \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 - \beta^3$ **ιστ.** $\alpha\chi + \beta\psi + \alpha - \beta\chi - \alpha\psi - \beta$
- ιζ.** $10\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2\gamma + 30\delta\alpha - 12\beta\gamma\delta$
- ιη.** $6\chi^5 - 4\chi^3\psi - 3\chi^2\psi^3 + 2\psi^4$
- ιθ.** $3\chi^3 - 7\chi^2 + 3\chi - 7$
- κ.** $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$ **κα.** $7\alpha\beta + 7\alpha\gamma - 9\beta\delta - 9\gamma\delta$
- κβ.** $\alpha\beta x - \alpha\beta y - \alpha\gamma x + \alpha\gamma y$ **κγ.** $5x^3 + x^2 - 20x - 4$
- κδ.** $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$ **κε.** $x^3 + x^2 - 4x - 4$
- κστ.** $\beta x - \alpha\beta + x^2 - \alpha x$
-

4. Ομοίως :

- α.** $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$
- β.** $\alpha^5 - \alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 1$
- γ.** $1 - \chi + \chi^2 - \chi^3 + \chi^4 - \chi^5 + \chi^6 - \chi^7$
- δ.** $\alpha x - 2\alpha y - \beta x + 2\beta y + \gamma x - 2\gamma y$
- ε.** $\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha^6\beta^5 - \alpha^5\beta^6 + 12\alpha - 12\beta$
- στ.** $\chi\psi^2 - \psi^2 + \psi(\chi - 1)^2 - \chi^2\psi + \chi\psi$
- ζ.** $\alpha\beta(x^2 + y^2) + xy(\alpha^2 + \beta^2)$
- η.** $\alpha x^\nu + \alpha y^\mu + \beta x^\nu + \beta y^\mu$
- θ.** $x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8$
- ι.** $(\alpha - \beta)^3 + \alpha^3 - \beta^3$
- ια.** $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1$
-

Διαφορά Τετραγώνων

5. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $\alpha^2 - 16$

β. $25 - x^2$

γ. $4x^2 - 9$

δ. $36\psi^2 - 0,49\psi^2$

ε. $36x^4 - 121y^2$

στ. $25\alpha^2x^2 - 16\beta^4$

ζ. $\frac{49}{64}x^2 - 9$

η. $\frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{25}x^2$

θ. $\frac{4}{25}\alpha^4 - 9\beta^2$

ι. $\kappa^2\lambda^4 - 9\mu^6$

ια. $81x^4 - 16y^4$

ιβ. $16\alpha^2\beta^2 - 25$

ιγ. $3x^{v+2} - 12x^v$

ιδ. $\alpha^4 - \beta^4$

ιε. $\alpha^8 - \beta^8$

ιστ. $\alpha^{2v} - \beta^{2v}$

6. Ομοίως :

α. $(2x - 3)^2 - 16$

β. $25 - (\alpha + 7\beta)^2$

γ. $625 - (2x - 3y)^2$

δ. $36\omega^4 - (\omega^2 - 5)^2$

ε. $(3\chi + 4)^2 - 16\psi^2$

στ. $9\kappa^4 - (2\kappa^2 - 3)^2$

ζ. $(x - 3y)^2 - (-x + 2y)^2$

η. $(5\kappa + 6)^2 - 36\lambda^2$

θ. $(3\kappa - 4\lambda)^2 - (\kappa + 7\lambda)^2$

ι. $9(\mu + 3\nu)^2 - 16(2\mu + 5\nu)^2$

ια. $4(\chi + 2\psi)^2 - 9(3\chi - \psi)^2$

ιβ. $4\mu^2(\mu + 2)^2 - 9\mu^2(2\mu - 1)^2$

ιγ. $(\alpha^2 - 4)^2 - (\beta + 2)^2$

ιδ. $\alpha^2(\alpha + \beta)^2 - \beta^2(\alpha - \beta)^2$

ιε. $5(x + y)^2 - 20(x - y)^2$

ιστ. $(x - 3y)^2 - (3x + y)^2$

ιζ. $25(x - 1)^2 - 4$

ιη. $(x - 8y)^2 - 49(x + 1)^2$

ιθ. $\frac{1}{4}x^2 - (x - y)^2$

κ. $(\alpha - 2\beta)^2 - 4\beta^2$

κα. $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 1)^2$

κβ. $(\chi^2 + \psi^2 - \omega^2)^2 - 4\chi^2\psi^2$

κγ. $(\alpha^2 - 16)^2 - (\alpha + 4)^2$

Τέλειο Τετράγωνο

7. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $x^2 + 2x + 1$

β. $x^2 - 4x - 4$

γ. $-4x^2 - 4x - 1$

δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$

στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$

ζ. $16x^2 + 40xy + 25y^2$

η. $-25x^2 + 40xy - 16y^2$

θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$

ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

ια. $\alpha^2\beta^2 - 14\alpha\beta + 49$

ιβ. $x^2y^2 - 8xy + 16$

ιγ. $4x^2 + 9 + 12x$

ιδ. $\psi^2 + 9\chi^2 - 6\chi\psi$

8. Ομοίως :

α. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$

β. $81x^4 - 36x^2 + 4$

γ. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$

δ. $x^4 - 2x^2y^3 + y^6$

ε. $x^6 - 2x^3 + 1$

στ. $100x^4y^6 - 40x^2\psi^3\omega^2 + 4\omega^4$

ζ. $x^2 + x + \frac{1}{4}$

η. $25x^2y^2 - 20xy + 4$

θ. $64\psi^8 - 80\chi^3\psi^4 + 25\chi^6$

ι. $\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4}$

ια. $\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}$

ιβ. $\frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4}$

ιγ. $100\alpha^2 + \frac{45}{2}\alpha + \frac{81}{64}$

9. Ομοίως :

α. $(\alpha - 3)^2 - 6(\alpha - 3) + 9$

β. $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$

γ. $(\kappa + 2)^2 - 6(\kappa + 2) + 9$

Κύβος Αθροίσματος / Διαφοράς

10. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

β. $\alpha^3 + 6\alpha + 12\alpha + 8$

γ. $8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1$

δ. $\kappa^3 + 9\kappa^2 + 27\kappa + 27$

ε. $\psi^6 + 3\psi^4 + 3\psi^2 + 1$

στ. $(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1$

Τριώνυμο

11. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα που ακολουθούν :

α. $x^2 + 6x - 7$

β. $x^2 - 3x - 2$

γ. $x^2 - 7x - 30$

δ. $x^2 - 5x + 6$

ε. $x^2 + 5x + 4$

στ. $x^2 + 3x - 18$

ζ. $x^2 + 12x + 32$

η. $x^2 - 10x + 24$

θ. $x^2 + 6x + 8$

ι. $x^2 - x - 72$

ια. $x^2 - 7x + 6$

ιβ. $x^2 + 2x - 15$

ιγ. $x^2 + x - 42$

ιδ. $3x^2 + 12x + 9$

ιε. $10x^2 + 9x + 2$

ιστ. $6x^2 - 5x + 1$

ιζ. $x^2 - 7x + 12$

ιη. $x^2 + 4x - 12$

ιθ. $x^2 + 8x + 15$

κ. $x^2 - 8x - 20$

κα. $x^2 - 7x - 8$

κβ. $x^2 + x - 20$

κγ. $x^2 - 3x - 4$

κδ. $x^2 + 2x - 35$

κε. $x^2 - 15x + 26$

κστ. $x^2 + 5x - 50$

Κοινός Παράγοντας & Διαφορά Τετραγώνων

12. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $a\beta^2 - a\gamma^2$

β. $6x^2 - 24$

γ. $15x^2 - 15$

δ. $x^4 - 64x^2y^2$

ε. $\kappa^5 - \kappa$

στ. $16a^5 - a$

ζ. $x^7 - x^3$

η. $6x^2 - 96$

θ. $12x^2 - 75y^2$

ι. $ax^2 - 25ay^2$

ια. $a^3(\beta - 5) - 7a^2(5 - \beta)$

ιβ. $x^3 - x(y - z)^2$

ιγ. $x^3y - xy^3$

ιδ. $2x^3 - 18xy^2$

ιε. $5a^3 - 5ax^2$

ιστ. $81x^4 - 16y^4$

ιζ. $9x^6y^4 - 25y^{10}$

ιη. $2ax^2 - 32a$

ιθ. $3x^3y^2 - 27x^3$

κ. $3x^{v+2} - 12x^v$

κα. $x^3 - 9x - 2(x + 3)^2$

Συνδυαστικές

13. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $x^2 - 4y^2 - x - 2y$

β. $ax^2 + \beta y^2 - ay^2 - \beta y^2$

γ. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

δ. $ax^2 - \beta x^2 - a - \beta$

ε. $a^2 - \beta^2 - a - \beta$

στ. $3x^3 + 6x^2 - 9x$

ζ. $x^{2v+1} - xy^2$

η. $9x^{2v+2} - 4y^{2v+2}$

θ. $x^2 - y^2 + \omega^2 + 2x\omega$

ι. $x^2 - y^2 - 2ay - a^2$

ια. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$

ιβ. $4a^2 - 4a\beta + \beta^2 - 9a^2\beta^2$

$$\text{ιγ. } 1 - x^2 + 2xy - y^2$$

$$\text{ιδ. } \alpha^2 + x^2 - \beta^2 - y^2 - 2\alpha x + 2\beta y$$

14. Ομοίως για τις παραστάσεις :

$$\text{α. } x^4 - 7x^2 + 10$$

$$\text{β. } 4x^4 - 4x^3 + x^2$$

$$\text{γ. } 2x^2 - 5x + 3$$

$$\text{δ. } 4x^3 - xy^2$$

$$\text{ε. } x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$\text{στ. } x^3 - 6x^2y + 9xy^2$$

$$\text{ζ. } x + \sqrt{x} - 2$$

$$\text{η. } y^3 - 2y^2 - 5y + 6$$

$$\text{θ. } x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$\text{ι. } x^3 - 7x + 6$$

$$\text{ια. } x^4 + x^2 + 1$$

$$\text{ιβ. } \alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2$$

$$\text{ιγ. } \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$$

15. Ομοίως :

$$\text{α. } (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$$

$$\text{β. } (3x - 1)(x + 1)^2 - 9(3x - 1)$$

$$\text{γ. } (x^2 + 3)^2 - 16x^2$$

$$\text{δ. } (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$$

$$\text{ε. } (x^2 - 4)^2 - (3x - 2)(x + 2)^2$$

$$\text{στ. } (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 9\alpha^2\beta^2$$

$$\text{ζ. } x^3 - 1 + x^2 - 1 - (x - 1)^2$$

$$\text{η. } (x + 1)^3 - x^2 - 1$$

$$\text{θ. } (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$$

$$\text{ι. } (x^2 - 3x + 1)^2 - 1$$

$$\text{ια. } (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$$

$$\text{ιβ. } (x^2 - 25)(x + 5) - 25(x - 5)$$

$$\text{ιγ. } 2(\alpha + 5)^2 + 20(\alpha + 5) + 50$$

$$\text{ιδ. } (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2$$

$$\text{ιε. } (2x - 3)(3x - 5) + 9x^2 - 25 - (5 - 3x)(3x + 2)$$

16. Ομοίως :

α. $(1 + \alpha + \beta)^2 - (1 + \alpha - \beta)^2$

β. $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2$

γ. $\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - \beta^2$

δ. $\alpha^4 - \alpha^2 - 2\alpha - 1$

ε. $x^4 + x^3 - x^2 - x$

στ. $36x^2 + 60\chi\psi + 25y^2$

ζ. $3x^2 - 3x - 18$

η. $(x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + 4x^2y^2$

θ. $4x^2 + 28xy + 49y^2$

ι. $9x^2 - 48xy + 64y^2$

ια. $9x^3 - 12x^2 + 4x$

ιβ. $x^5 + y^5 - xy^4 - x^4y$

ιγ. $x^3 + y^3 - x - y - x^2y - xy^2$

ιδ. $2x^3 - 4x^2y - \alpha x^2 + 2xy^2 + 2\alpha xy - \alpha y^2$

ιε. $12\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \beta^2\gamma - 4\alpha^2\gamma$

ιοστ. $(9\alpha^4 - 2\beta^2 - 11)^2 - (7\alpha^4 + 2\beta^2 - 5)^2$

17. Ομοίως :

α. $x^2 + 14xy + 24y^2$

β. $1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

γ. $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2$

δ. $x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2$

ε. $(4x - 8)(x^2 - 1) - (6x - 12)(\chi - 1)^2$

στ. $x^3 - 16x + 2x^2y - 32y$

ζ. $x^2 + 6xy + 9y^2 - \omega^2$

η. $x^2 + 2xy - \omega^2 - 2\omega\psi$

θ. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

ι. $(x^2 - 4)^2 - (x + 3)(x - 2)^2$

ια. $1 - 2x + 2y\omega + x^2 - y^2 - \omega^2$

18. Ομοίως :

α. $5x^3 - 20x + x^2 - 4$

β. $ax^2 - ay^2 + x - y$

γ. $(\alpha - \beta)(x + y)^2 - (\alpha - \beta)$

δ. $3(x + 5)(x - 2)^2 - 12x - 60$

ε. $(\alpha + 1)(\alpha + 2) - (\alpha^2 - 4)$

στ. $(4x + y)^2 + 16x^2 - y^2$

ζ. $(x - y)(2\kappa - \lambda) + (x^2 - y^2)$

η. $\alpha(x + y)^2 + \beta(x + y)^2 - 4\alpha - 4\beta$

θ. $\alpha\beta^5 - \alpha^5\beta$

ι. $\alpha^2x^2 - \alpha^2 - \beta^2x^2 + \beta^2$

ια. $\alpha x^2 - \alpha y^2 - x + y$

ιβ. $3x^3 - 3\alpha x - x^2 + \alpha$

19. Ομοίως :

α. $x^2 + (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha$

β. $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - \omega^2)^2$

γ. $(5x - 10)(x^2 - 1) - (7x - 14)(x - 1)^2$

δ. $(x^2 - 25)^2 - (x + 5)^2$

ε. $\alpha^4 + \alpha^2 + 1$

στ. $2\alpha\beta + 1 - \alpha^2 - \beta^2$

ζ. $4\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4\beta^2 + 4\beta - 1$

η. $(17x^2 - 1)^2 - 64x^4$

20. Ομοίως :

α. $x^2 - 2x - y^2 + 1$

β. $x^2 - 2xy - 3y^2$

γ. $(x - 1)(x^2 + 2) - 2(1 - x)(x^2 - 1) - 4(x - 1)$

δ. $6x(x + 1)^4 - 2x^2(x + 1)^3 + 12x(x + 1)^5$

ε. $1 - x^8$

στ. $4\alpha^3 - 4 + 16\alpha^2 - \alpha$

ζ. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

η. $x^2 - y^2 + 4\psi z - 4z^2$

θ. $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$

ι. $x(x + 2) + 1$

ια. $x^2 + 2xy - 3y^2$

ιβ. $\alpha^4 + \alpha^2 - 20$

$$\text{ιγ. } \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 1$$

$$\text{ιδ. } \alpha^3\beta^3 - \alpha^3 - \beta^3 + 1$$

21. Ομοίως :

$$\text{α. } 4\alpha^3 - 9\alpha(y+z)^2$$

$$\text{β. } x^3 - x(y-z)^2$$

$$\text{γ. } \alpha x^3 - \alpha^3 x(y+z)^2$$

$$\text{δ. } x^2 - 4y^2 + x + 2y$$

$$\text{ε. } y^2 - x^2 - 10y + 25$$

$$\text{στ. } 9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$$

$$\text{ζ. } 25y^2 - 81x^2 - 20y + 4$$

$$\text{η. } 2\alpha^3 + 8\alpha^2 + 8\alpha$$

$$\text{θ. } (x-y)^2 + 8(x-y) + 16$$

$$\text{ι. } x^2 - 8x + 15$$

$$\text{ια. } 5x^3 - 15x^2 - 20x$$

$$\text{ιβ. } z^2 - 25z + 24$$

22. Ομοίως :

$$\text{α. } c(x-1) - x^2 + 2x - 1$$

$$\text{β. } 16x^4 + 9c^2 + 24x^2c + (4x + 3c)$$

$$\text{γ. } x^3 + 2x^2 + x + \alpha x + \alpha$$

$$\text{δ. } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2$$

$$\text{ε. } 9 - 9\alpha^2 - \beta^2 + 6\alpha\beta$$

$$\text{στ. } y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\text{ζ. } x^2 - 2x + 1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$$

$$\text{η. } (2x-1)^2 - 2x(2x-1) + x^2 - 1$$

$$\text{θ. } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2 + 30\gamma\delta - 25\delta^2$$

Διάσπαση

23. Ομοίως :

$$\text{α. } x^2 + 8\alpha x + 12\alpha^2$$

$$\text{β. } \alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 + 4\beta^4$$

$$\text{γ. } x^4 + x^2 + 1$$

$$\text{δ. } 9x^4 - 15x^2 + 1$$

$$\text{ε. } x^4 + 10x^2y^2 + 9y^4$$

$$\text{στ. } \alpha^3 + 2\alpha^2 - 1$$

$$\text{ζ. } x^4 + y^4 - 11x^2y^2$$

Διάρφορες

24. Αφού παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$A = 4x^2 - 12xy + 9y^2 \quad \text{και} \quad B = 12x^2 - 27y^2$$

να δημιουργήσετε και να παραγοντοποιήσετε τη διαφορά : $A - B$



1

Άλγεβρα^{1.4}

Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Περιορισμοί

1. Για ποιες τιμές του x έχουν έννοια οι παραστάσεις :

α. $\frac{2x+7}{x-3}$

β. $\frac{2}{3x-5}$

γ. $\frac{3-x}{5x+25}$

δ. $\frac{4x-1}{1-3x}$

ε. $\frac{1}{x^2-9}$

στ. $\frac{-2}{\alpha x - \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

ζ. $\frac{3x+11}{x^2-3x}$

η. $\frac{x-y}{x^3-4x^2}$

θ. $\frac{12x^2+3y}{x^2-7x}$

ι. $\frac{1}{x^2-2x+1}$

ια. $\frac{1}{x^2-5x+6}$

ιβ. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}$

ιγ. $\frac{5x-y}{(x-y)^2}$

ιδ. $\frac{3y-4}{(y-3)(1-2y)}$

ιε. $\frac{2x+5y}{2x-7y}$

ιστ. $\frac{x-y}{(2x-1) \cdot (3x-y)}$

Απλοποίηση

2. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα :

$$\alpha. \frac{5xy}{20x^2}$$

$$\beta. \frac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma^2}$$

$$\gamma. \frac{6(x-y)^3}{(x-y)^2}$$

$$\delta. \frac{4\alpha - 4\beta}{8\alpha - 8\beta}$$

$$\epsilon. \frac{5y - 10}{y^2 - 2y}$$

$$\sigma\tau. \frac{2\beta - 4}{\beta^2 - 2\beta}$$

$$\zeta. \frac{3x - 6}{4 - x^2}$$

$$\eta. \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$$

$$\theta. \frac{4\alpha^3 - 16\alpha}{2\alpha^3 + 4\alpha^2}$$

$$\iota. \frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - 18}$$

3. Ομοίως :

$$\alpha. \frac{x^2 + 4x + 4}{3x^2 - 12}$$

$$\beta. \frac{xy - x}{y^2 - 2y + 1}$$

$$\gamma. \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\delta. \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 8x + 15}$$

$$\epsilon. \frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^3\beta - \beta^4}$$

$$\sigma\tau. \frac{x^2 + 10x + 25}{3x^2 - 75}$$

$$\zeta. \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\eta. \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\theta. \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\iota. \frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^5 + x^4 - 4x - 4}$$

$$\iota\alpha. \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma}$$

$$\iota\beta. \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^3 - xy^2}$$

$$\text{ιγ. } \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{ιδ. } \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$$

Πράξεις

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\text{α. } \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x}$$

$$\text{β. } \frac{\alpha}{\alpha+6} - \frac{\alpha}{\alpha-6}$$

$$\text{γ. } \frac{4x}{3x} + \frac{1}{5x^3y}$$

$$\text{δ. } \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5xy^2}$$

$$\text{ε. } \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{x}{x-1}$$

$$\text{στ. } 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$\text{ζ. } \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$$

$$\text{η. } \frac{x-1}{xy-y^2} - \frac{y}{(x-y)^2}$$

$$\text{θ. } \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$$

$$\text{ι. } \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{2x}{x+3}$$

$$\text{ια. } \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{3x-6} + \frac{x+8}{3x^2-12}$$

$$\text{ιβ. } \frac{2x+4}{x^2-2x} + \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{6x+4}{x^2-4}$$

$$\text{ιγ. } \frac{1}{\alpha+1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} - \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\text{ιδ. } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\text{ιε. } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\text{ιστ. } \frac{\alpha-2\beta}{\alpha+2\beta} + \frac{\alpha+2\beta}{\alpha-2\beta} - \frac{8\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$$

$$\text{ιζ. } \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$$

$$\eta. \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\theta. \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + \frac{\alpha - 3}{\alpha^2 + 2\alpha} - \frac{3}{\alpha + 2}$$

$$\kappa. \frac{x+1}{3x-3} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{x^2+11}{6x^2-6}$$

$$\kappa\alpha. \frac{x^{2v}}{x^v - 1} - \frac{x^{2v}}{x^v + 1} - \frac{1}{x^v - 1} + \frac{1}{x^v + 1}$$

5. Ομοίως :

$$\alpha. \frac{2x}{5y^2} \cdot \frac{10xy}{8x^3}$$

$$\beta. \frac{5}{7x} \cdot \left(-\frac{3y}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)$$

$$\gamma. \frac{x+2}{y-4} \cdot \frac{y^2 - xy}{4 - x^2}$$

$$\delta. (x+4) \cdot \frac{x^2 y}{x^2 - 16}$$

$$\epsilon. \frac{x^4(x-1)^3}{4y} \cdot \frac{yx}{2(x-1)^7}$$

$$\sigma\tau. \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\zeta. \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x+3}{x-3}$$

$$\eta. \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{8x - 8y}$$

$$\theta. \frac{x^4 - x^2 - 4x + 4}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x}$$

$$\iota. \frac{\alpha^{2v} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^v + 1}$$

6. Ομοίως :

$$\alpha. \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} : \frac{3\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta}$$

$$\beta. \frac{20}{\omega^2 - \varphi^2} : \frac{-10}{\varphi - \omega}$$

$$\gamma. \frac{\omega^2 - 9}{\omega + \varphi} : \frac{\omega + 3}{\omega^2 - \varphi^2}$$

$$\delta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\epsilon. \frac{x^2 - 9}{4x - 12} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\sigma\tau. \frac{5x^3}{4x^2 - 9} : \frac{2x^2 + 6x}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$\zeta. \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{2}$$

$$\eta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\theta. \frac{6(2\alpha - x)(x - \alpha)}{25(2x + \alpha)^2} : \frac{10(x - \alpha)^2}{9(2x + \alpha)(2\alpha - x)}$$

7. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\alpha. \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$$

$$\beta. \frac{x - \frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$\gamma. \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

$$\delta. \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\epsilon. \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x} - 2 \right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right)$$

$$\sigma\tau. \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{3}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$\zeta. \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

$$\eta. \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$$

$$\theta. \frac{3}{1 + \frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}} + \frac{3}{1 + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}}$$

$$\iota. \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

$$\iota\alpha. \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$$

$$\text{ιβ.} \quad \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 1}$$

$$\text{ιγ.} \quad \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\text{ιδ.} \quad \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2y - xy^2} \cdot (x+y)$$

$$\text{ιε.} \quad \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\frac{x}{y} + 1\right) \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - y^2}\right)$$

$$\text{ιστ.} \quad \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

$$\text{ιζ.} \quad \frac{1}{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3} + \frac{2}{x^2 - y^2} - \frac{3}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

Διάφορες

8. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = (x+1)^2 - x(x+1) \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

- α. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση Α.
- β. Να απλοποιήσετε την παράσταση Β.
- γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα Α + Β.

9. Δίνεται το παρακάτω κλάσμα :

$$\frac{(x^2 + 3x + 1)^2 - 1}{x^3 - 9x}$$

- α. Να παραγοντοποιήσετε τους όρους του.
 - β. Να το απλοποιήσετε.
 - γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση.
-

10. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$$\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος. Ποιος είναι ο ακέραιος αυτός;

(Υπόδειξη: Ονομάστε $333333 = x$)

11. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

12. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς a, β, x, y ισχύει ότι $ay = \beta x$, να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

είναι ίση με τη μονάδα.

13. Να αποδείξετε την ισότητα : $\frac{x^{10}}{x^5 - 1} - \frac{x^{10}}{x^5 + 1} - \frac{1}{x^5 - 1} + \frac{1}{x^5 + 1} = 2$

14. Να αποδείξετε την ισότητα : $\frac{x^v}{x^v + 1} + \frac{1}{x^v - 1} - \frac{2}{x^{2v} - 1} = 1$

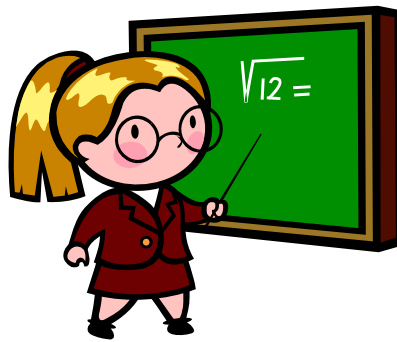
15. Δίνονται τα κλάσματα : $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ και $B = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$

α. Να καθορίσετε τα πεδία ορισμού των κλασμάτων A και B .

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A - B$.

16. Αν είναι $x = 3\sqrt{2} - 2$ και $y = 3\sqrt{2} + 2$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x \cdot y}$$



2

Άλγεβρα^{2.1}

Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $3(x + 2) - 4x = -3(1 - 2x) + 5$

β. $2(x - 4) - 5(4 - x) = 3x - 2(1 - 2x)$

γ. $\frac{x-5}{3} = \frac{10-2x}{2}$

δ. $\frac{7-2x}{3} + \frac{5x}{4} = 1$

ε. $\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{4x-7}{4} - 5$

στ. $\frac{5x}{9} - \frac{2x-4}{3} = \frac{3x+47}{9} - \frac{2(x+1)}{18}$

ζ. $\sqrt{3x+4} = x + \sqrt{48}$

2. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η εξίσωση: $(\alpha + 1)x + 5 = x + 3\alpha$ να έχει ως λύση τον αριθμό 1 .

3. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση: $(2\mu + 1)x + 1 = x + 4\mu$ είναι αδύνατη και για ποιες τιμές είναι αδύνατη;

Προβλήματα Εξισώσεων 1^{ου} Βαθμού

4. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, ώστε να έχουν άθροισμα 24.
-
5. Το άθροισμα της ηλικίας ενός πατέρα και της κόρης του είναι 50 έτη. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Να βρεθεί η σημερινή τους ηλικία.
-
6. Να βρείτε τα ζεύγη των λύσεων της εξίσωσης : $3x + 2y = 15$ όταν ο x παίρνει ακέραιες τιμές στο διάστημα από 1,5 έως 4,2 .

Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^2 + 1 = 0$

β. $-2x^2 + 8 = 0$

γ. $x^2 - 6 = 0$

δ. $-3x^2 - 7 = 0$

ε. $5x^2 - 7x = 0$

στ. $2x^2 = -5$

ζ. $-4x^2 = 6$

η. $2x^2 + 4x = 0$

θ. $x^2 - 1 = 0$

ι. $4x^2 = 64$

ια. $3x^2 + x = 0$

ιβ. $2x^2 + x = 0$

ιγ. $16x^2 = 100$

ιδ. $x^2 = 5x$

ιε. $2x^2 + 8 = 0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $x^2 + 6x + 8 = 0$

β. $x^2 - 4x + 4 = 0$

γ. $x^2 + x + 1 = 0$

δ. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\epsilon. \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\sigma\tau. \quad x^2 - x - 12 = 0$$

$$\zeta. \quad x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\eta. \quad \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\theta. \quad 3x^2 = 7x + 3$$

$$\iota. \quad -10x + 1 + 25x^2 = 0$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha. \quad (x + 2)^2 + 5 = 0$$

$$\beta. \quad (3x - 1)^2 = 9$$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha. \quad (x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$$

$$\beta. \quad (x + 1)^2 + (3x + 7)^2 = 0$$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha. \quad (x - 1)^2 = -x$$

$$\beta. \quad (4x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 9$$

$$\gamma. \quad (x + 4)^2 - (x + 6)^2 = -8$$

$$\delta. \quad (x - 2)(x - 1) = 2x^2 + 4$$

$$\epsilon. \quad 2(9 - x^2) - 4x = 3x(1 - x) + 1$$

$$\sigma\tau. \quad (x - 2)^2 + 2x(x + 2) = 2(3x + 10)$$

$$\zeta. \quad (2x - 3)^2 = (x - 1)(x - 4) + 9x$$

$$\eta. \quad (2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = (x + 1)(2x - 1)$$

$$\theta. \quad (x^2 - 2)^2 - 5(x^2 - 2) + 6 = 0$$

$$\iota. \quad (x - 2)(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$$

$$\iota\alpha. \quad (4x - 1)^2 - 9 = (x - 1)^2$$

$$\iota\beta. \quad (x - 2)(x + 5) = (x - 3)(x + 3) + 5$$

$$\iota\gamma. \quad (5x - 3)(x^2 + 5x + 2) = -10x + 6$$

$$\iota\delta. \quad x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$$

$$\text{ιε. } (x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$$

$$\text{ιοστ. } (x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 29$$

$$\text{ιζ. } 5(x^2 - 2x) - 3(x - 2)^2 = 28$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{α. } (x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$\text{β. } (x - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{γ. } (4x^2 - 9)(2x^2 + 4x) = 0$$

$$\text{δ. } x^2(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\text{ε. } (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\text{στ. } x(x^2 + 1)(x - 3) = 0$$

$$\text{ζ. } (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$\text{η. } (x + 5)(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\text{θ. } (3x^2 + 6)(3x^2 - 6)(3x^2 + 6x) = 0$$

$$\text{ι. } x^4 - 36 = 0$$

$$\text{ια. } x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{ιβ. } 2x^3 + 8x^2 - 24x = 0$$

$$\text{ιγ. } 3x^8 - 27x^6 = 0$$

$$\text{ιδ. } (x + 4)^2 - (x + 6)^2 = 0$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{α. } x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\text{β. } x^6 - 9x^3 = -8$$

$$\text{γ. } \sqrt{2}x^2 + 5x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{δ. } x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{ε. } 2x^2 + (1 - 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{στ. } 2x^2 + (1 + 2\sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$$

$$\text{ζ. } x^2 + (\alpha + 1)x - 2\alpha^2 + \alpha = 0$$

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(\alpha\beta - 1) = 0$. Αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

15. Για ποιες τιμές των κ, λ η παρακάτω εξίσωση έχει μοναδική λύση το μηδέν ;

$$5x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$$

16. Για τις διάφορες τιμές του λ , να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $(1 - \lambda)x^2 + (3 + 2\lambda)x - \lambda = 0$

17. Για ποιες τιμές των κ, λ η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 1)x + \lambda^2 = 0$ έχει διπλή ρίζα; Κατόπιν να βρεθεί η ρίζα αυτή.

18. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 9 = 4\alpha x$ είναι αδύνατη ενώ η εξίσωση $4x^2 + 4x + \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες;

19. Να δείξετε ότι αν $\beta \neq 0$ και $\alpha > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ τότε η εξίσωση :

$$x^2 + 2\sqrt{\alpha}x + \beta = 0$$

έχει δύο ρίζες ίσες.

20. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^2 - 9$ και $B(x) = (x - 1)^2$.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $\Gamma = A - B$.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις: $A = 0$, $B = 0$ και $\Gamma = 0$.

21. **α.** Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = \beta$ να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = -1$ και $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

β. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Αν $\alpha + \gamma = -\beta$ να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 1$ και $x = \frac{\gamma}{\alpha}$.

- 22.** Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 6x + \lambda = 0$.
- α.** Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει λύση;
- β.** Να λυθεί η εξίσωση, όταν το λ πάρει την μεγαλύτερη τιμή από τις παραπάνω.

Προβλήματα Εξισώσεων 2^{ου} Βαθμού

- 23.** Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 15 και γινόμενο 56.
-
- 24.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $x + 2$, x , $x - 2$. Να βρείτε τον αριθμό x , καθώς και το εμβαδό και την περίμετρο του τριγώνου.
-
- 25.** Σε διψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι μεγαλύτερο κατά 3 από το ψηφίο των μονάδων. Να βρεθεί ο αριθμός αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του είναι 29.
-
- 26.** Τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσα με τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου.
-
- 27.** Βρείτε δύο αριθμούς, που να έχουν άθροισμα 9 και το άθροισμα των αντιστροφών τους να είναι $\frac{9}{20}$.
-
- 28.** Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, που η διαφορά των αντιστροφών τους να είναι ίση με το $\frac{1}{12}$.
-
- 29.** Μια διάσταση ενός ορθογωνίου είναι 18m και η άλλη του διάσταση είναι ίση με το μήκος πλευράς τετραγώνου. Αν το εμβαδό του ορθογώνιου είναι ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του

τετραγώνου, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

Κλασματικές Εξισώσεις

30. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

α. $\frac{5}{x-2} = 4$

β. $\frac{2x-3}{2x-1} = \frac{3}{4}$

γ. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 5$

δ. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+2}{3x-6}$

ε. $x - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{x}$

στ. $\frac{2x}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x-2}$

ζ. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-1+5x}{x^2+1}$

η. $1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$

θ. $\frac{4x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{8x}{x^2-4} = 0$

ι. $\frac{8}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x}{9x^2-1}$

ια. $\frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} - \frac{2x-1}{2x+2}$

ιβ. $\frac{4x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3-x}$

ιγ. $\frac{3}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} = \frac{-2}{x+2}$

ιδ. $\frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3}{x^2-4} = 0$

31. Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις :

α. $\frac{2x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = 1 + 7 \cdot \frac{x-1}{x^2-4x+3}$

β. $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$

$$\gamma. \frac{x}{2x-4} - \frac{x+2}{3x+3} = \frac{x^2}{6(x-2)(2x-1)}$$

$$\delta. \frac{3}{y} - \frac{2}{y+3} = \frac{y}{y^2-9}$$

$$\epsilon. \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{(2x+3)(2x-1)}$$

$$\sigma\tau. \frac{8}{2x^2-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{x}$$

$$\zeta. \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$$

$$\eta. \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

$$\theta. \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x}$$

$$\iota. \frac{x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x}{2 \cdot (x^2-1)}$$

$$\iota\alpha. \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x-12} = \frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

$$\iota\beta. \frac{3x}{x^2-x-2} + \frac{2x+5}{x^2-2x-3} = \frac{5x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\iota\gamma. \frac{3x-5}{2x-3} - \frac{2x+3}{3x+5} + \frac{5x^2+2x}{(3x+5)(3-2x)} = 0$$

32. Να λυθεί η εξίσωση : $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = -1$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $2x^{-2} - 5x^{-1} + 3 = 0$

β. $x^{-2} - 4x^{-1} + 3 = 0$

34. Να λυθεί η εξίσωση : $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0$

35. Αν $A = 4x^2 + 12x + 9$, $B = 4x^2 - 2x$ και $\Gamma = (x - 2)^2 - 9$, τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $A = 0$ β. $B = 0$ γ. $\Gamma = 0$ δ. $\frac{\Gamma}{B} = 0$

36. Αν είναι :

• $A = (8x - 6)(4 - 2x) + (6x - 3)(4 - 2x)$

• $B = (10x - 6)^2 - (4x - 3)^2$

τότε να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $A = 0$ β. $B = 0$ γ. $\frac{A}{B} = 0$ δ. $\frac{B}{A} = 0$

37. Αφού απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση, να λύσετε την εξίσωση : $A = 9$

$$A = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}$$

38. Αφού απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις A και B, να λύσετε την εξίσωση : $A - B = 0$

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, \quad B = \frac{9 \cdot (2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4 \cdot (x^2 + 4x + 4)}$$

39. Δίνονται τα κλάσματα : $A = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ και $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

α. Να βρείτε πότε ορίζονται.

β. Να τα απλοποιήσετε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $A = B$

40. Ομοίως για τα κλάσματα : $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$ και $B = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 9}$

41. Δίνονται τα κλάσματα :

$$K = \frac{4x^3 + 8x^2}{4x^3 - 16x} \text{ και } \Lambda = \frac{9x^2 - 36}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

Αφού τα απλοποιήσετε, να λύσετε την εξίσωση : $K - \Lambda = \frac{8}{x^2 - 4}$

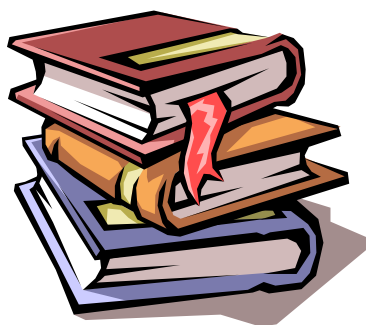
42. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = x^3 - x^2 + x - 1 \text{ και } B = x^2 - x$$

α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις.

β. Ν' απλοποιήσετε το κλάσμα : $\frac{A}{B}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{A}{B} = 2$



3

Άλγεβρα

Γραμμικές Εξισώσεις

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + \beta$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$. Να βρείτε τον αριθμό β .

2. Δίνεται η ευθεία $y = 3x + (2\alpha - 1)$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να είναι μια ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Για ποια τιμή του λ η ευθεία με εξίσωση $y = (2\lambda + 3)x + 2\lambda + 8$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ποια είναι τότε η εξίσωση της;

4.
 - α. Δίνεται η ευθεία $y = ax + 3$. Να προσδιορίσετε τον a , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$.
 - β. Ομοίως για την $y = 3x + (5\alpha - 1)$ αν διέρχεται από το σημείο $(-3, 5)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο :
 - α. $A(1, 3)$
 - β. $B(2, 4)$
 - γ. $\Gamma(-3, 1)$
 - δ. $\Delta(-\frac{1}{2}, 4)$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(0, 3)$ και διέρχεται, επίσης, από το σημείο $\Lambda(-2, 11)$.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $3x - 6y = 4$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

8. Να βρείτε το λ αν είναι γνωστό ότι το σημείο $A(2\lambda, -1,5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2,5x$.

9. Να σχεδιάσετε τις ευθείες που έχουν εξισώσεις :

α. $x - 2y = 4$

β. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

γ. $2(1 - x) + 4(y + 2) = 14$

10. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες:

• $\epsilon_1: y = -x + 2$

• $\epsilon_2: 2y = -2x + 6$

• $\epsilon_3: y = \frac{1}{2}x + 3$

• $\epsilon_4: 4y = 2x + 16$

11. Για ποιες τιμές του λ είναι παράλληλες οι ευθείες:

α. $y = 3\lambda x + 2$ και $y = 9x - 2$

β. $y = 2\lambda(\lambda - 2)x + 3$ και $y = (\lambda + 3)x - 4$

γ. $y = (\lambda - 1)x + 3$ και $y = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x - 1$

δ. $y = (2\lambda + 1)x + \lambda$ και $2x + 3y = 5$

ε. $y = \frac{1 - \lambda}{12}x + 8$ και $y = \frac{\lambda + 1}{2}x - 6$

στ. $y = (\lambda^2 - 7\lambda)x + 3$ και $y = -12x + \lambda + 4$

$$\zeta. \quad y = \frac{\lambda}{\lambda+2}x+1 \quad \text{και} \quad y = \frac{\lambda-2}{3}x-6$$

12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $(\epsilon_1) y = (5\lambda + 1)x$ εάν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και ότι η (ϵ_1) διέρχεται από το $B(1, 6)$.
13. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου OAB που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία A, B που η ευθεία $2x + 3y = 6$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
14. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : y = 2\lambda x + 5$ και $(\epsilon_2) : y = \lambda^2 x + 8$, με $\lambda \neq 0$.
- α. Σε ποια σημεία τέμνει κάθε ευθεία τους άξονες;
- β. Για ποια τιμή του λ είναι μεταξύ τους παράλληλες;
- γ. Αν $\lambda = 1$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η (ϵ_1) με τους άξονες.
15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = x + 2$, καθώς και των ευθειών $x = 1$ και $x = 4$. Να βρείτε το εμβαδό του τραπεζιού που σχηματίζεται από τις άνω ευθείες και τον άξονα $x'x$.

Γ ρ α μ μ ι κ ά Σ υ σ τ ή μ α τ α

16. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα: **(α)** με τη μέθοδο της αντικατάστασης και **(β)** με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\alpha. \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\beta. \quad \begin{cases} 2(x + y) - 7 = y \\ x + 2y = 2(x - 1) \end{cases}$$

$$\gamma. \quad \begin{cases} 2x = 5y + 1 \\ 24 - 7x = 3y \end{cases}$$

$$\delta. \quad \begin{cases} 0,6x - 0,8y = -1,2 \\ -0,3x + 0,4y = 0,8 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

17. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα (με όποια μέθοδο επιθυμείτε):

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{7} - \frac{y}{5} = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{2x}{3} + y = 16 \\ x + \frac{y}{4} = 14 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \frac{x}{2} + 7y = -8 \\ x - \frac{y}{5} = -9 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} 3x - 2y = y + 3 \\ x + y - 1 = 2(x - 1) \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x + 4y}{6} = x \\ \frac{2(x - 1)}{3} + \frac{x - y}{4} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} 5(x + 2y) (3x + 13y) = 14 \\ 7x + 6y - 3(x + 4y) = 38 \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x + 2}{4} - \frac{y - 3}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\theta. \begin{cases} \frac{2x - 1}{3} = 4 - \frac{y + 2}{4} \\ \frac{x + 3}{2} - \frac{x - y}{3} = 3 \end{cases}$$

18. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

19. Να βρείτε για ποια τιμή του a το σύστημα είναι αδύνατο:

$$\begin{cases} x + ay = 5 \\ (a-1) \cdot x + 2y = 1 \end{cases}$$

20. Να βρείτε για ποια τιμή των a, β είναι αδύνατο το σύστημα :

$$\begin{cases} ax + 6y = \beta \\ 2y - 3x = 5 \end{cases}$$

21. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών:

α. $y = 3x - 7$ και $y = 12x + 11$

β. $x - y = 2$ και $2y - x = 1$

22. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) y = 2x + 3$ και $(\varepsilon_2) 3x + 6y = 12$.

α. Να δικαιολογήσετε γιατί οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

β. Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται.

23. Να δείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις :

• $\varepsilon_1 : 5x + 6y = 60$

• $\varepsilon_2 : 6y - x = 24$

• $\varepsilon_3 : 2x - y = 7$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

24. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τις ευθείες :

- $\varepsilon_1 : x - 2y = -6$
- $\varepsilon_2 : 3x + 4y = 2$
- $\varepsilon_3 : x = 2$

Αν Α, Β, Γ είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών ανά δυο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

25. Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την ευθεία που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 5$ και διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $y = \frac{3}{2}x - 3$ και $y = -\frac{5}{2}x + 5$.

26. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- α.** Α (-2, -8) και Β (4, 10) **β.** Α (0, -6) και Β (2, -4)
-

27. Να βρείτε ένα κλάσμα τέτοιο ώστε αν προσθέσουμε το 1 στον αριθμητή γίνεται ίσο με $\frac{1}{5}$, ενώ αν προσθέσουμε το 1 στον παρονομαστή γίνεται ίσο με $\frac{1}{7}$.

28. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές έχουν εξισώσεις : $2x - 3y = 1$, $x + y = 3$, $x - 3y = 3$

29. Να βρείτε δυο ετερόσημους αριθμούς με άθροισμα 9 και άθροισμα απόλυτων τιμών 25.

Μη Γραμμικά Συστήματα

30. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x - y = -1 \\ 3xy = x + 1 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} x^2 - x \cdot y + y^2 = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$$

$$\zeta. \begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\eta. \begin{cases} y + x^2 - 4 = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

31. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x^2 - 3y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 57 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy = y^2 - 1 \end{cases}$$

32. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2x - 3y}{5} - \frac{2y - 3x}{11} = \frac{112}{55} \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 3(x-y) - 4x + 5 = 6(2x+1) - 55 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 28 \end{cases}$$

33. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους -1 και 2 . Να βρείτε τα a και β .

34. Να λύσετε :

α. την εξίσωση : $x^2 - 5x + 6 = 0$

β. το σύστημα : $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$

Τι παρατηρείτε;

35. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ αν ξέρουμε ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 6)$.

36. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x^2$ και $y = -3x + 2$ και να βρείτε τα κοινά σημεία τους.

37. α. Να βρεθεί το a , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y = ax - 4$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 8)$.

β. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραπάνω ευθείας με την παραβολή $y = -4x^2$.

38. Η παραβολή $y = x^2 - 3x + 4$ και η ευθεία $y = a \cdot x$ έχουν κοινό σημείο το $A(1, 2)$. Να βρεθεί το δεύτερο κοινό τους σημείο.

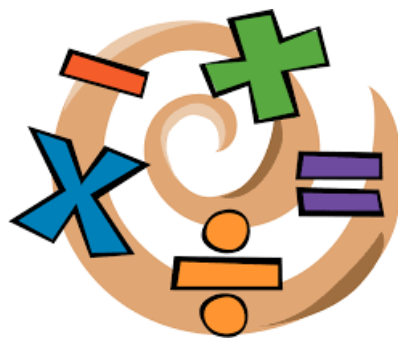
39. Δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και η ευθεία $y = 3x - 2$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, σημεία στα οποία τέμνονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Αν υπάρχουν, τότε να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας γραφικά σχεδιάζοντας τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

40. Θεωρούμε την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$ και την ευθεία $y = x + \lambda$.

- α.** Για ποιες τιμές του λ η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία;
- β.** Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των δύο σημείων συναρτήσει του λ .
- γ.** Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων όταν $\lambda = \frac{3}{2}$;

41. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 - 6x + 9$ και η ευθεία $y = 2x + \kappa$. Να βρείτε το κ , ώστε η ευθεία να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την παραβολή. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου και να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

42. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = ax^2 - 2x + 3$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$, με την ευθεία που έχει εξίσωση $y = \kappa x + \lambda$, η οποία διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2$.



4

Άλγεβρα

Στοιχεία Συναρτήσεων

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$

γ. $g(x) = \frac{3-x}{(x+6)(2x-5)}$

δ. $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4}$

ε. $h(x) = \sqrt{4-x}$

στ. $h(x) = \sqrt{2x-4}$

ζ. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$

η. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 5}$

θ. $r(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1-x}{\sqrt{x+2}}$

ι. $r(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

2. Στις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν τα $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ και $f(2)$:

α. $f(x) = 2x^2$

β. $f(x) = 2x^2 - 1$

γ. $f(x) = -2x^2$

δ. $f(x) = -2x^2 - 1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $2f(x+1) - f(x-1) = -6$

4. Αν $f(x) = \frac{6}{x}$ και $g(x) = 2x - 1$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α. $A = f(2) \cdot g(1) - f(-3) \cdot g\left(\frac{-5}{2}\right)$

β. $B = \frac{2}{f(-1)} - \frac{3}{2} \cdot g\left(\frac{-1}{4}\right)$

5. Ένας πλασιέ βιβλίων παίρνει ημερομίσθιο 30 € και για κάθε βιβλίο που πουλάει άλλο 1 €. Να εκφράσετε το ημερομίσθιο του ως συνάρτηση του αριθμού των βιβλίων που πουλάει.

6. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $M(2, 7)$. Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει για γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.

7. Δίνεται η συνάρτηση : $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$

α. Να βρείτε για ποιές τιμές του x ορίζεται.

β. Για τις τιμές αυτές να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

8. Δίνεται η συνάρτηση : $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

9. Αν $-1 \leq x < 4$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση :

α. $y = -2x + 7$

β. $y = \frac{2}{x+3}$

10. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παρακάτω συναρτήσεις :

α. $y = -3x - 5, -1 \leq x \leq 3$

β. $y = \frac{1}{3x+2}, 2 \leq x \leq 6$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Για ποιες τιμές του x είναι :

α. $f(x) = x$

β. $f(x) = f(-x)$

γ. $f(x) = f(x+1)$

δ. $f(x) = -5$

12. Αν $f(x) = \alpha \cdot x$ να δείξετε ότι :

α. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

β. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

γ. $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - \lambda x + 4}{(x-1)^2}$. Να βρεθεί το λ , ώστε η συνάρτηση να διέρχεται από το σημείο $(2, 10)$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2\lambda - 3)x + 2\lambda + 2}{x-1}$. Να βρείτε το λ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται απ' το σημείο $M(2, 14)$.

Παράβολη

Γραφικές Παραστάσεις

15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 3x + 2$ και να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης και τον άξονα συμμετρίας της.

16. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + x + 1$

α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $x'x$;

β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$;

γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής ;

δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής ;

ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.

17. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $x'x$;

β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$;

γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής ;

δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής ;

ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.

18. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

δ. Να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας της.

19. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = a \cdot x^2$ αν αυτή διέρχεται από το σημείο:

α. $A(2, -6)$

β. $B(-1, 4)$

20. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = a \cdot x^2 + \beta$ αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και την αρχή των αξόνων.

21. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + a \cdot x + \beta$, αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$ και από την αρχή των αξόνων.

22. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a \cdot x^2 + \beta$, αν είναι γνωστό ότι διέρχεται απ' τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 1)$.

Κορυφή & Ακρότατα

23. Αν είναι γνωστό ότι η παραβολή $y = x^2 + kx + \lambda$ διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(1, 4)$, τότε :

α. Να υπολογίσετε τα k, λ .

β. Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

γ. Παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο και σε ποιο σημείο;

δ. Ποια ευθεία αποτελεί άξονα συμμετρίας της παραβολής;

24. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{\alpha-1}{2} - 3\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η παραβολή έχει ελάχιστο.

25. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{\kappa-1}{2} - \frac{2\kappa-3}{3}\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η παραβολή έχει μέγιστο.

26. Δίνεται η παραβολή $y = (2\lambda - 1)x^2 - 3x + 7$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει μέγιστο.

27. Για ποια τιμή του λ η συνάρτηση $y = 2x^2 - 2(2\lambda + 1)$ έχει γραφική παράσταση παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων;

28. Να βρεθεί ο λ ώστε η συνάρτηση :

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 7\left(2\lambda + \frac{\lambda - 11}{5}\right)$$

να έχει γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων.

29. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{1-3\alpha}{6} - 1\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1$. Να βρείτε τον k αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο τον αριθμό -4 . Στη συνέχεια, να βρείτε την κορυφή της.

31. Να βρείτε το μέγιστο ή ελάχιστο και την κορυφή των συναρτήσεων :

α. $f(x) = x^2 - 2x$

β. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

γ. $y = -x^2 + 2x + 8$

32. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε οι εξισώσεις $y = (\lambda - 1)x^2$ και $y = (2\lambda + 3)x^2$ να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

Διάφορες

33. Για ποιές τιμές των λ, k η παραβολή $y = (\lambda - 1)x^2 - 5x + 2k - 6$ διέρχεται από τα σημεία $\Delta(1, 2)$ και $E(0, 6)$.

- 34.** Δίνεται η παραβολή : $y = x^2 + kx + \lambda$
- α.** Να βρείτε τους k, λ αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(4, 4)$ βρίσκονται πάνω στην γραφική παράσταση της παραβολής.
 - β.** Ποιά η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από την κορυφή της παραπάνω παραβολής;
-

- 35.** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, -8)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η εξίσωση της συμμετρικής της, ως προς τον άξονα $x'x$, και να γίνει η γραφική της παράσταση για $-5 \leq x \leq -3$.
-

- 36.** Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο 12 και μήκος x .
- α.** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .
 - β.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
 - γ.** Πότε το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν;
-

- 37.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με αντίστοιχα μήκη : x και $4 - x$
- α.** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .
 - β.** Να βρείτε την μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου.

