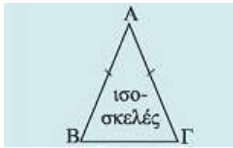
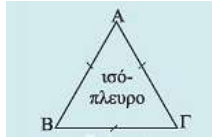
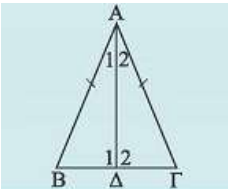
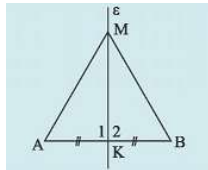
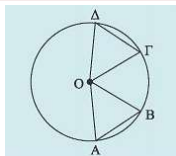
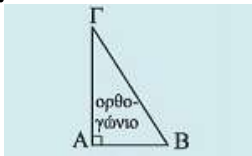
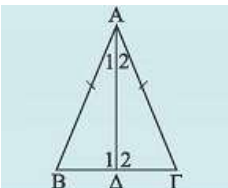
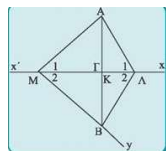
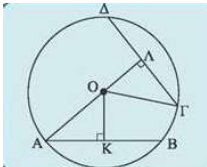
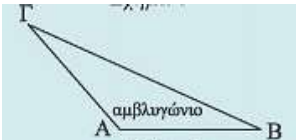
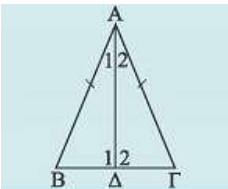
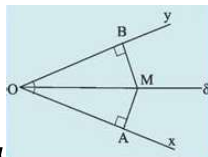
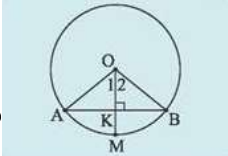
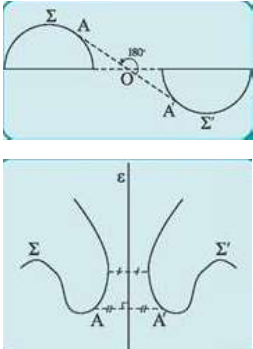
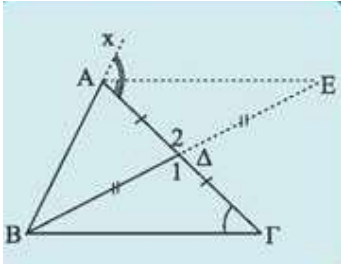
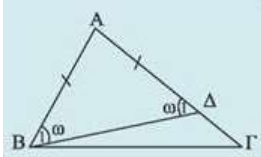
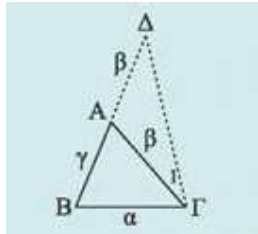
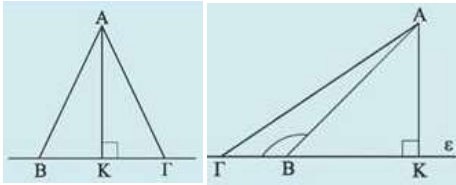
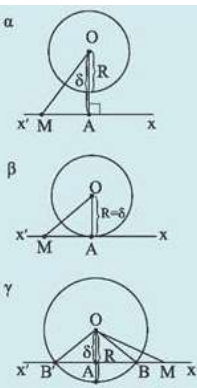


Τυπολόγιο

Τρίγωνα

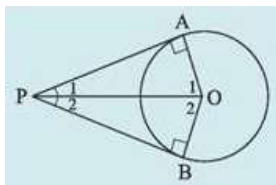
Είδη -Στοιχεία		Κριτήρια Ισότητας	
Κύρια Στοιχεία:	Δευτερεύοντα στοιχεία:	Τυχαίων Τριγώνων	Ορθογώνιων Τριγώνων
Οι πλευρές και οι γωνίες Περίμετρος: (2τ) Το άθροισμα των πλευρών του.	Διάμεσοι ,διχοτόμοι ύψη	1^ο Κριτήριο: ΠΓΠ Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, είναι ίσα (Σχολ. σελ.41 Θ. όχι απόδειξη)	Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
Είδη τριγώνων Ως προς τις πλευρές Σκαληνό: Όταν έχει όλες τις πλευρές άνισες 	▪ Διάμεσος : λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς του. ▪ Συμβολισμός: μ_a , μ_b , μ_γ	2^ο Κριτήριο: ΓΠΓ Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Σχολικό σελ.44 Θεώρημα χωρίς απόδειξη)	Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία , είναι ίσα
Ισοσκελές: Όταν έχει δύο πλευρές ίσες ΒΓ: Βάση Το σημείο Α λέγεται κορυφή 	▪ Διχοτόμος: μιας γωνίας τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. ▪ Συμβολισμός: δ_a , δ_b , δ_γ	3^ο Κριτήριο: ΠΠΠ Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες ,μία προς μία, είναι ίσα. (Σχολικό σελ.44 Θεώρημα χωρίς απόδειξη)	Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία ,είναι ίσα. (Σχολικό, σελ. 50 Θεώρημα I χωρίς απόδειξη)
Ισόπλευρο: Όταν έχει όλες τις πλευρές ίσες. ▪ Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες 	▪ Ύψος: λέγεται το κάθετο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. ▪ Συμβολισμός: u_a , u_b , u_γ	Σχόλιο: Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.	Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Σχολικό, σελ. 50 Θεώρημα II χωρίς απόδειξη)

Ιδιότητες			
Είδη - Στοιχεία	Ισοσκελών Τριγώνων	Μεσοκαθέτου	Χορδών - Τόξων
Είδη τριγώνων Ως προς τις γωνίες Οξυγώνιο: Όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες 	Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο - Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες. - Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος 	Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του Αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετο 	Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές είναι ίσες Αντίστροφα: Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου ,μικρότερων ή μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες , τότε και τα τόξα είναι ίσα. 
Ορθογώνιο: Όταν έχει μία γωνία ορθή 	Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου , που αντιστοιχεί στη βάση του , είναι διχοτόμος και ύψος. 	Μοναδικότητα Καθέτου Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος (Σχολικό σελ.49 Θεώρημα χωρίς απόδειξη) 	Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. 
Αμβλυγώνιο: Όταν έχει μία γωνία αμβλεία 	Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος. 	Ιδιότητα Διχοτόμου Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου 	Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της 
Βασικοί Γεωμετρικοί Τόποι			
Ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.	Η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.	Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ένας γεωμετρικός τόπος ,αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.	

Συμμετρικά Σχήματα	Ανισοτικές Σχέσεις		
Κεντρική – Αξονική Συμμετρία	Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών	Τριγωνική ανισότητα
Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O ή μια ευθεία ε, όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ, ως προς το O ή την ε και αντίστροφα. 	Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμιά από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.  - Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια ορθή γωνία ή αμβλεία. - Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° (Σχολικό σελ.59 Θεώρημα χωρίς απόδειξη)	- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται άνισες γωνίες και αντίστροφα. - Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου - Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές. - Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες τότε είναι ισόπλευρο. (Σχολικό σελ.60 Θεώρημα χωρίς απόδειξη) 	Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους. Δηλαδή: $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$, $\beta \geq \gamma$ Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου. (Σχολικό σελ.60 Θεώρημα χωρίς απόδειξη) 
Κάθετες και πλάγιες	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου		
Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα. 	Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε: - Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο - Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα. (Σχολικό σελ.65 Θεώρημα II χωρίς απόδειξη)		
 - Αν $\delta > R$ η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο - Αν $\delta = R$ η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο. - Αν $\delta < R$ η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο - Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη. - Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο είναι μοναδική - Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. (Σχολικό σελ.67 Θεώρημα I χωρίς απόδειξη)			

Εφαπτόμενα τμήματα

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

α. Είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής.

β. Διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Γεωμετρικές κατασκευές

Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια:

Την κατασκευή (Είναι όλες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος)

Την απόδειξη (Η επιβεβαίωση ότι το σχήμα έχει ως στοιχεία τα δοσμένα)

Τη διερεύνηση (η αναγραφή όλων των συνθηκών ώστε το πρόβλημα να έχει λύση)

www.perikentro.blogspot.gr/

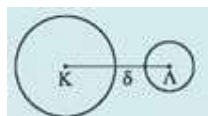
Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** και συμβολίζεται με δ

♦ Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

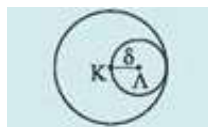


- Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R) αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$

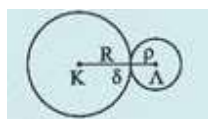


- Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκονται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$
Υπάρχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες και δύο κοινές εσωτερικές εφαπτόμενες

♦ Εφαπτόμενοι κύκλοι

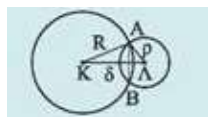


- Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά** δηλαδή έχουν **ένα κοινό σημείο** και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$
Υπάρχει μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και η διάκεντρος ΚΛ διέρχεται από το σημείο επαφής.



- Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά** δηλαδή έχουν **ένα κοινό σημείο** και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$
Υπάρχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη

♦ Τεμνόμενοι κύκλοι

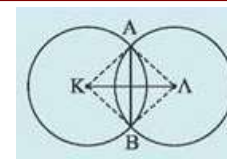
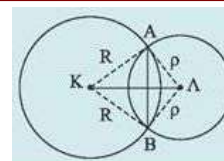


- Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο κοινά σημεία** αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή**
Υπάρχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες και η διάκεντρος ΚΛ διέρχεται από το σημείο τομής τους και διχοτομεί τη γωνία αυτών.

Τεμνόμενοι κύκλοι

- ♦ Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

- ♦ Αν οι τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι δηλαδή $R = \rho$, τότε η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.



Επιμέλεια: Κώστας Κουτσοβασίλης

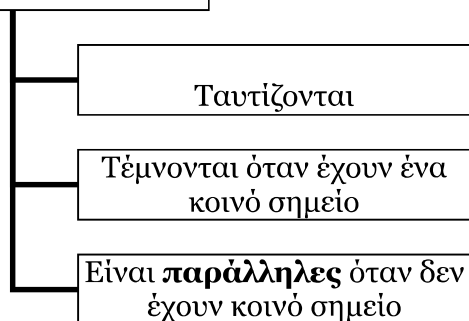
Παράλληλες Ευθείες

Ορισμός: Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες



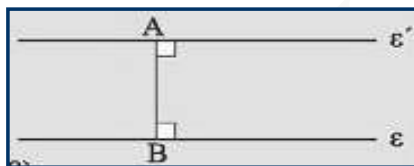
Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Δύο ευθείες ενός επιπέδου

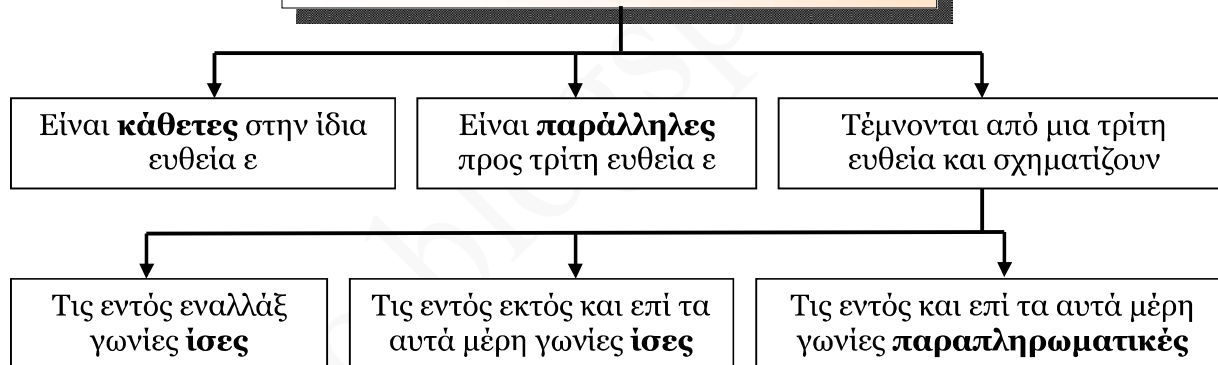


Αίτημα Παραλληλίας

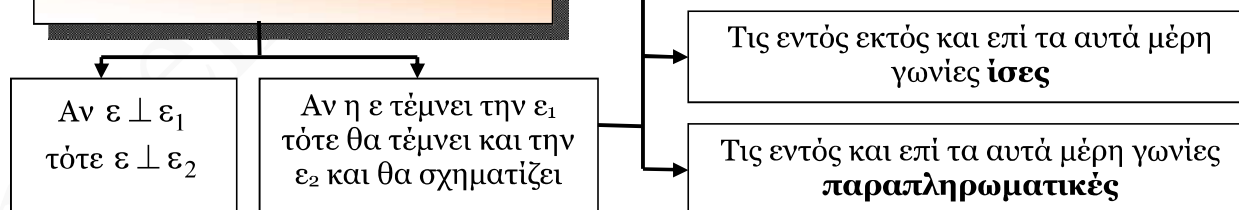
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.



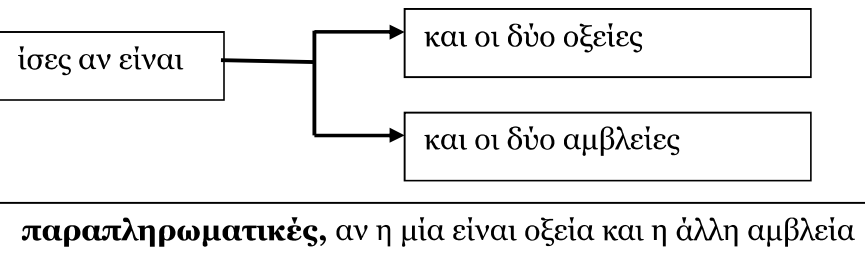
Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν :



Έστω $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε μια τρίτη ευθεία

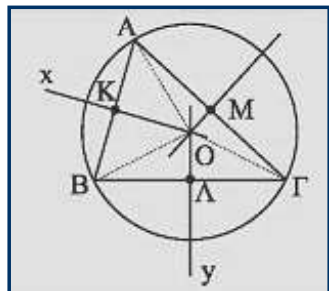


Δύο γωνίες που έχουν παράλληλες ή κάθετες πλευρές είναι:

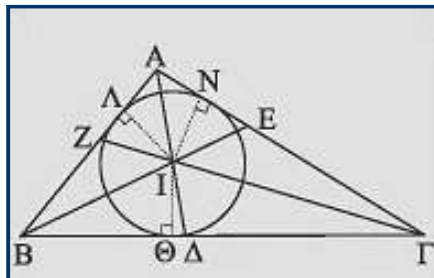


Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου και κέντρα τους

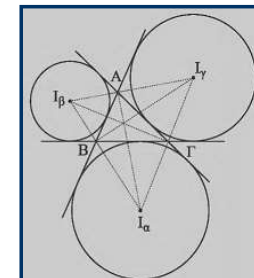
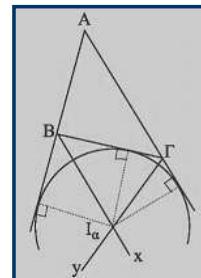
Περιγεγραμμένος : Λέγεται ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές τριγώνου. Το κέντρο του λέγεται **Περίκεντρο** και είναι το σημείο τομής **μεσοκαθέτων**



Εγγεγραμμένος : Λέγεται ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται στις τρεις πλευρές του. Το κέντρο του λέγεται **Έγκεντρο** και είναι το σημείο τομής **εσωτερικών διχοτόμων**.



Παρεγγεγραμμένος: Λέγεται ο κύκλος που εφάπτεται στη μια πλευρά τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Το κέντρο του λέγεται **Παράκεντρο** και είναι το σημείο τομής **δύο εξωτερικών** και **μιας εσωτερικής** διχοτόμου.



Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών

Κυρτού n -γώνου **$2n-4$** ορθές

Τριγώνου **2 ορθές** οπότε

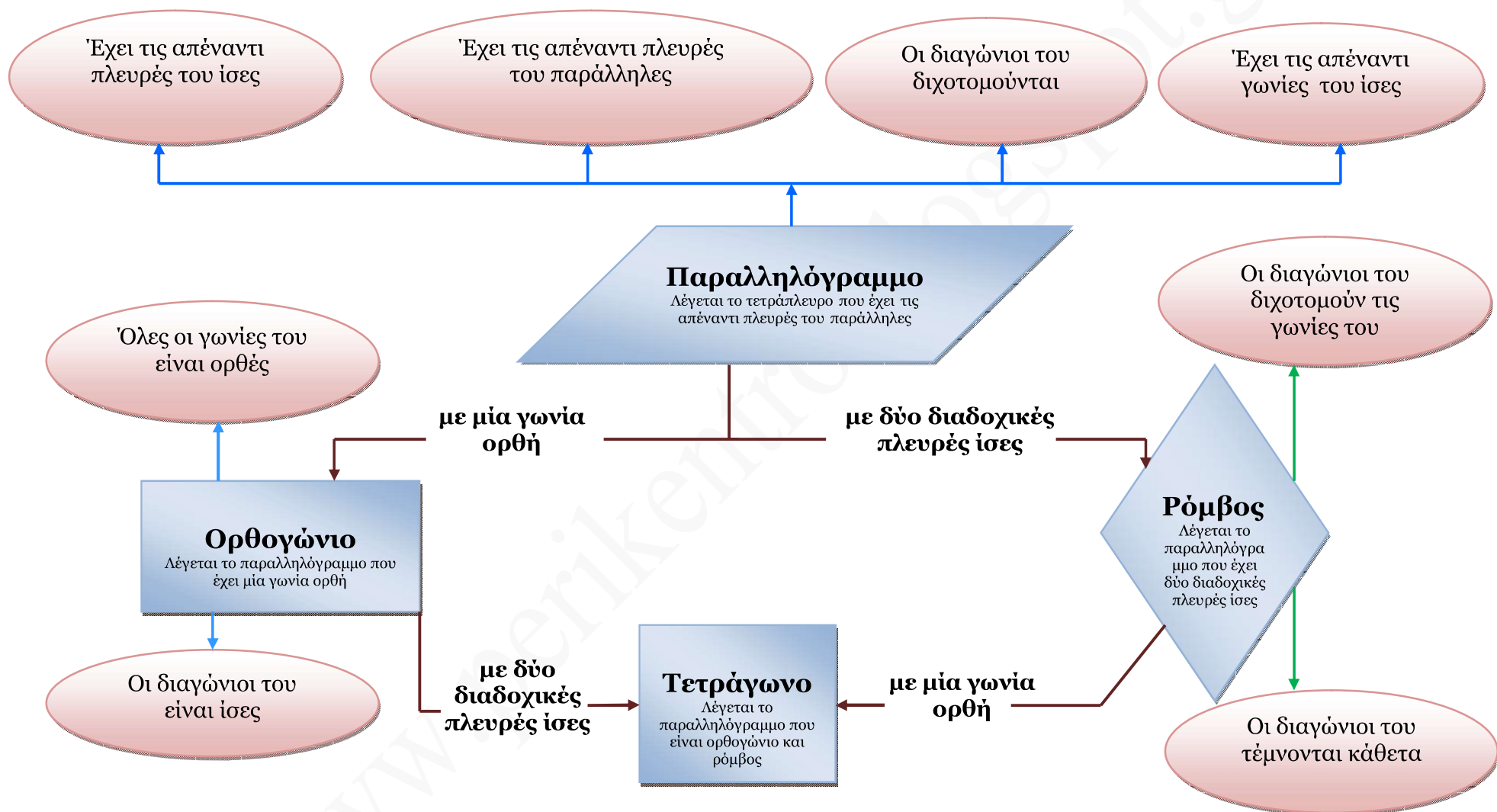
Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.

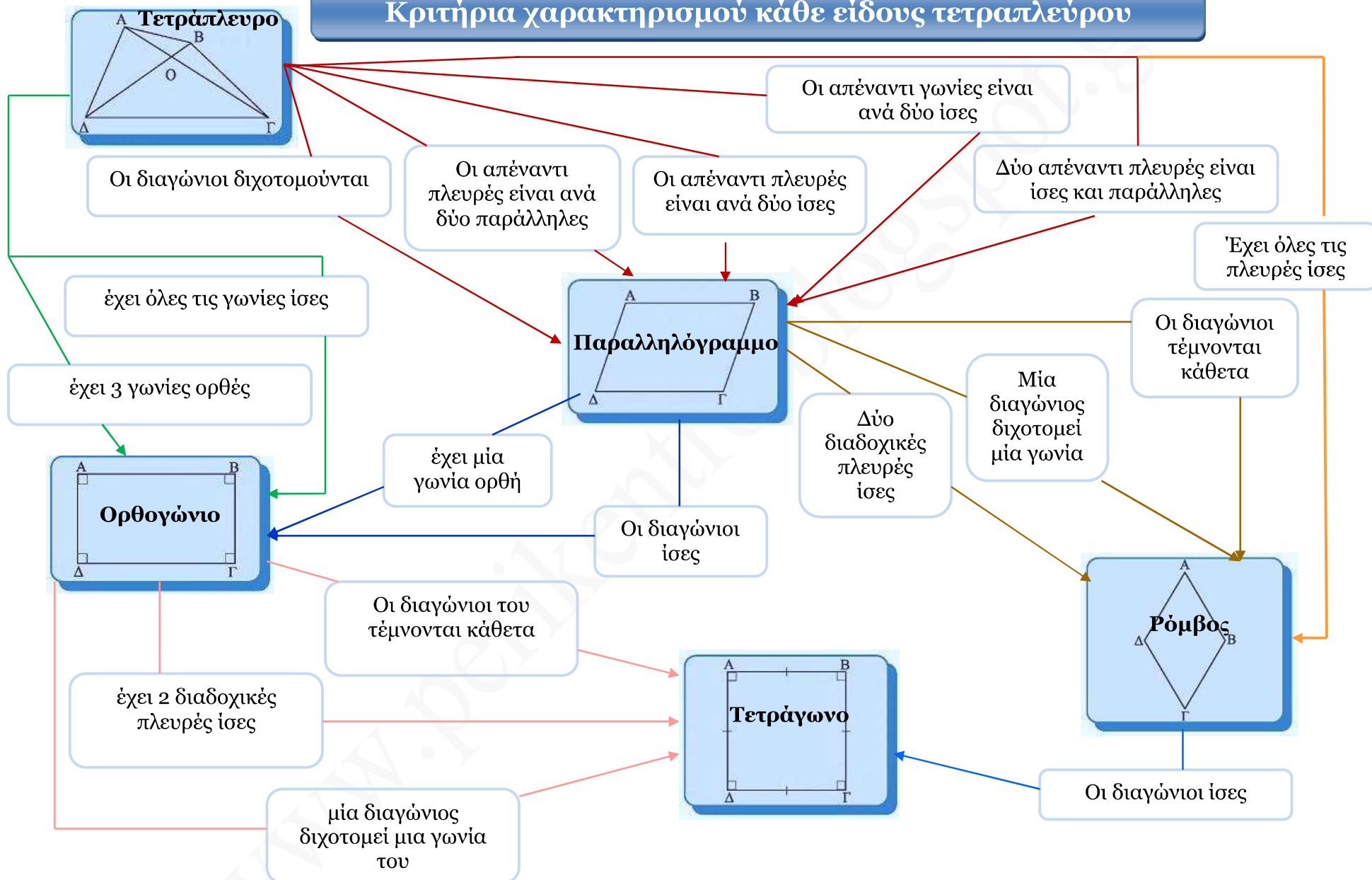
Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές .

Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°

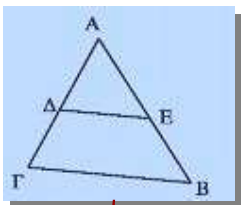
Παραλληλόγραμμα: Είδη παραλληλογράμμων και οι ιδιότητές τους



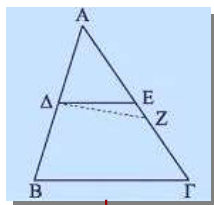
Κριτήρια χαρακτηρισμού κάθε είδους τετραπλεύρου



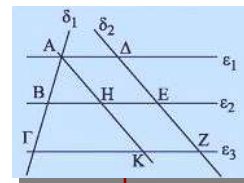
Εφαρμογές των παραλληλογράμμων



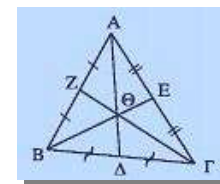
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς



Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει



$$AO = \frac{2}{3} AD \quad \quad \quad BO = \frac{2}{3} BE$$

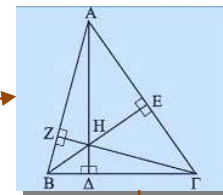
Τρίγωνο

Ορθογώνιο Τρίγωνο

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

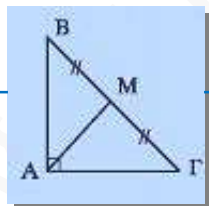
Βαρύκεντρο

Ορθόκεντρο Τριγώνου



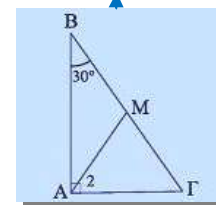
Σημείο τομής των υψών

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της

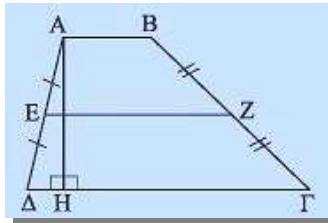


Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα

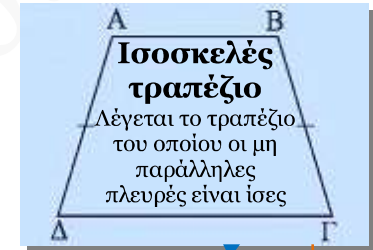


Τραπεζίο



Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου λέγονται **βάσεις**
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις λέγεται **ύψος**

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη
παράλληλων πλευρών λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου



Η διάμεσος του τραπεζίου
είναι παράλληλη προς τις
βάσεις του και ίση με το
ημιάθροισμά τους

Οι γωνίες που πρόσκεινται σε
μια βάση του είναι ίσες

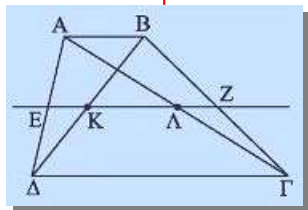
Οι διαγώνιοί του είναι ίσες

Θεώρημα

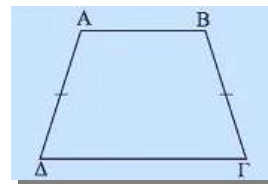
Τραπεζίο
Λέγεται το κυρτό
τετράπλευρο που έχει μόνο
δύο πλευρές παράλληλες

Το ευθύγραμμο τμήμα που
ενώνει τα μέσα των διαγωνίων
είναι παράλληλο με τις βάσεις
του και ίσο με την ημιδιαφορά
των βάσεών του

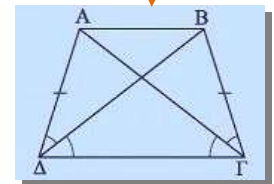
Πόρισμα



Οι διαγώνιοι που
πρόσκεινται σε μια
βάση είναι ίσες



Οι διαγώνιοι είναι ίσες



Ιδιότητες