

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Περιέχει: Όλη την ύλη της Β' Λυκείου, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας σε **(13) ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Α. Απαραίτητες γνώσεις θεωρίας**
- Β. Λυμένα παραδείγματα**
- Γ. Λυμένες ασκήσεις**
- Δ. Προτεινόμενα θέματα**
- Ε. Το ξεχωριστό θέμα**

Θέματα που **κινούν** τη σκέψη και **βοηθούν** στο σωστό τρόπο μάθησης.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο “**BIBΛΙΟμαθήματα**” δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό “**Εξετάσεις**” της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.

Γι’ αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ’έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα “**εργαλείο δουλειάς**” για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **13 BIBΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το “**ξεχωριστό θέμα**”.

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι’ αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μάθημα 1 ^ο : Διανύσματα	11
Μάθημα 2 ^ο : Συντεταγμένες στο επίπεδο	25
Μάθημα 3 ^ο : Εσωτερικό γινόμενο	33

Κεφάλαιο 2

Μάθημα 4 ^ο : Η ευθεία στο επίπεδο	55
Μάθημα 5 ^ο : Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	69
Μάθημα 6 ^ο : Απόσταση σημείου από ευθεία	85

Κεφάλαιο 3

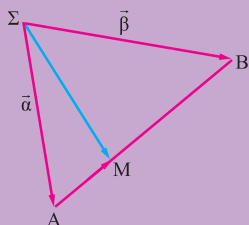
Μάθημα 7 ^ο : Ο κύκλος	99
Μάθημα 8 ^ο : Η παραβολή	123
Μάθημα 9 ^ο : Η έλλειψη	139
Μάθημα 10 ^ο : Η υπερβολή	157

Κεφάλαιο 4

Μάθημα 11 ^ο : Μαθηματική εισαγωγή	177
Μάθημα 12 ^ο : Ευκλείδεια διαίρεση	187
Μάθημα 13 ^ο : Διαιρετότητα ακεραίων	203
Επαναληπτικά - Συνδυαστικά Θέματα	217

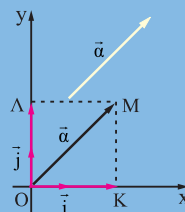
1^ο μάθημα

Διανύσματα



2^ο μάθημα

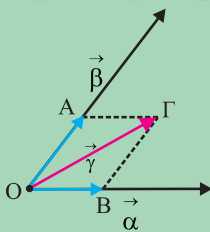
Συντεταγμένες



1^ο Κεφάλαιο

3^ο μάθημα

Εσωτερικό γινόμενο



Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός διανύσματος - Πράξεις με διανύσματα

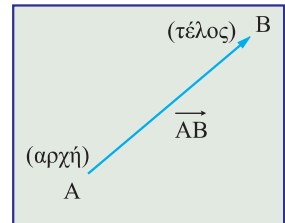
Διάνυσμα, ονομάζουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου έχουμε καθορίσει την αρχή και το τέλος.

Το συμβολίζουμε με $\vec{AB}$ ή με μικρά γράμματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}, \vec{w} \dots$

Προφανώς είναι $\vec{AB} \neq \vec{BA}$.

Κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται από:

- **Τη διεύθυνσή του**, η οποία καθορίζεται από την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα και η οποία ονομάζεται **φορέας**.
- **Τη φορά του**.
- **Το μέτρο του** δηλαδή το μήκος του. Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{AB}$ συμβολίζεται $|\vec{AB}|$.



Αν $|\vec{AB}| = 1$, τότε το διάνυσμα $\vec{AB}$ λέγεται **μοναδιαίο**.

Αν οι φορείς δύο μη μηδενικών $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ διανυσμάτων είναι παράλληλοι τότε τα διανύσματα αυτά ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**. Λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση και γράφουμε :

$$\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$$

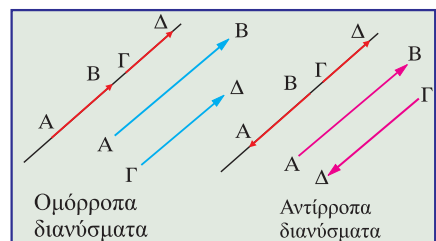
Δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα ονομάζονται **ομόρροπα** αν έχουν την ίδια φορά και **αντίρροπα** αν έχουν αντίθετες φορές.

Αν είναι ομόρροπα γράφουμε $\vec{AB} \uparrow \vec{\Gamma\Delta}$, ενώ αν είναι αντίρροπα $\vec{AB} \updownarrow \vec{\Gamma\Delta}$.

Αν η αρχή και το τέλος ενός διανύσματος συμπίπτουν τότε το διάνυσμα αυτό ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα** και το συμβολίζουμε $\vec{0}$.

Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με το μηδέν αφού ταυτίζεται με σημείο.

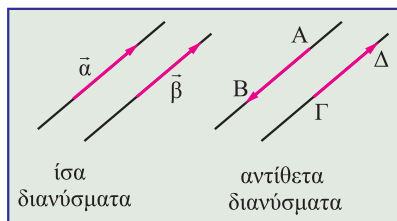
Φορέας του μηδενικού διανύσματος είναι οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται απ' το σημείο αυτό. Συμβατικά μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή κάθετο προς κάθε άλλο διάνυσμα.



Ίσα διανύσματα είναι τα ομόρροπα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο.

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίσα γράφουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Αντίθετα διανύσματα είναι τα αντίρροπα διανύσματα που έχουν το ίδιο μέτρο. Στο διπλανό σχήμα τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα διότι είναι



αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$. Γράφουμε τότε: $\vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$.

Ονομάζουμε **γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ και

τη συμβολίζουμε με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right)$ ή $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}} \right)$ ή απλά θ .

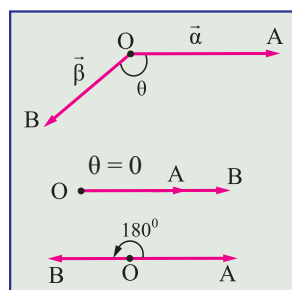
Είναι $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) = \left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}} \right)$

Φανερό είναι ότι: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ή $0 \leq \theta \leq \pi$ και ειδικότερα:

$$\hat{\theta} = 0, \text{ αν } \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$$

$$\hat{\theta} = \pi, \text{ αν } \vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$$

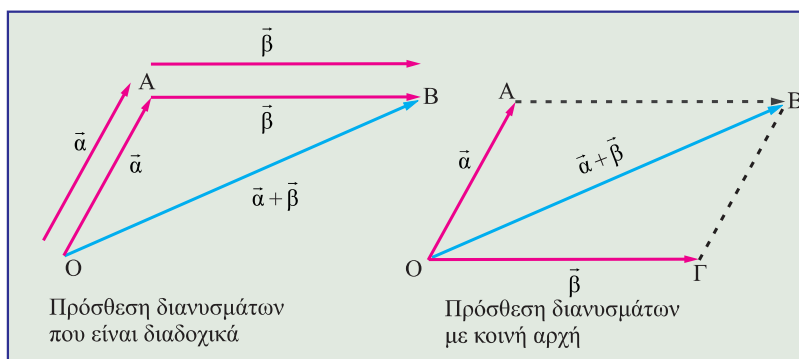
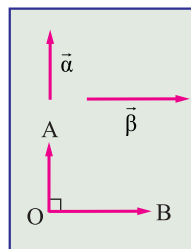
$$\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}, \text{ αν } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \text{ (} \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ κάθετα)}$$



Σχόλιο: Αν ένα απ' τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$.

Πρόσθεση - Αφαίρεση διανυσμάτων

Με αρχή ένα σημείο O γράφουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AB} = \vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ λέγεται **άθροισμα** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



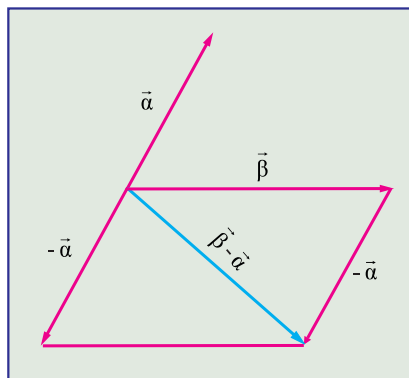
Παρατηρήστε ότι το τέλος του $\vec{OA}$ είναι η αρχή του $\vec{AB}$ (διαδοχικά διανύσματα)

Αν με αρχή το O γράψουμε το $\vec{OG} = \vec{AB} = \vec{\beta}$ τότε

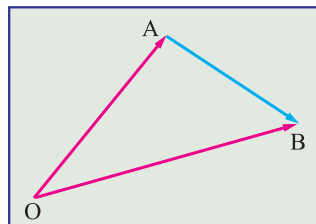
το $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OG}$ είναι η **διαγώνιος του παραλληλογράμμου** $OABG$.

Η **διαφορά** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ του διανύσματος $\vec{\alpha}$ από το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του διανύσματος $\vec{\beta}$ με το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha}$, δηλαδή:

$$\vec{\beta} - \vec{\alpha} = \vec{\beta} + (-\vec{\alpha})$$



Από τη σχέση $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ προκύπτει $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Δηλαδή, κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διαφορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στα άκρα του, θεωρώντας ως κοινή αρχή ένα οποιοδήποτε σημείο, έστω O . Τα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ λέγονται **διανυσματικές ακτίνες ή διανύσματα θέσης** των σημείων A και B αντιστοίχως και το τυχαίο σημείο O λέγεται **διανυσματική αρχή** (ή σημείο αναφοράς). Δηλαδή έχουμε:



$\vec{AB} = \text{διανυσματική ακτίνα του } B - \text{διανυσματική ακτίνα του } A.$

Για την πρόσθεση διανυσμάτων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$1. \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$5. \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

$$2. (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

$$6. \vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$3. \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

$$7. \vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{\alpha}$$

$$4. \vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$$

$$8. -(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})$$

Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Τότε ισχύει: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά ισχύει $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| < |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ισχύει $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| < |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα ισχύει $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

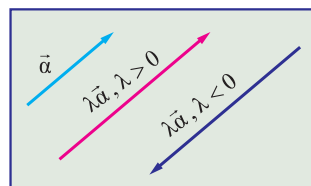
Αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα ισχύει

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Το γινόμενο του πραγματικού αριθμού $\lambda \neq 0$ με το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\lambda\alpha}$ για το οποίο ισχύουν :

- Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$.



- Έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{\alpha}|$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε θεωρούμε ότι το γινόμενο $\lambda \vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Βασικές ιδιότητες του γινομένου αριθμού με διάνυσμα

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

$$(-\lambda) \vec{\alpha} = \lambda \left(-\vec{\alpha} \right) = -\lambda \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad \text{και} \quad \lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha} \quad \text{τότε} \quad \lambda = \mu$$

$$\lambda \left(\mu \vec{\alpha} \right) = (\lambda \mu) \vec{\alpha} = \mu \left(\lambda \vec{\alpha} \right)$$

$$\lambda \left(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta} \right) = \lambda \vec{\alpha} \pm \lambda \vec{\beta}$$

$$\text{Αν } \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ τότε } \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

$$(\lambda \pm \mu) \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \pm \mu \vec{\alpha}$$

$$\text{Αν } \vec{\alpha} \neq \vec{0} \text{ και } \lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha} \text{ τότε } \lambda = \mu$$

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων})$$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

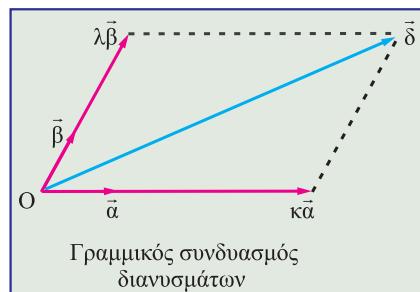
Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, τότε κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ της μορφής: $\vec{\delta} = k \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ όπου k, λ είναι πραγματικοί αριθμοί, λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Παρατήρηση.

Αποδεικνύεται ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων του επιπέδου. Η γραφή αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή αν :

$$\vec{\delta} = x_1 \vec{\alpha} + y_1 \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = x_2 \vec{\alpha} + y_2 \vec{\beta}$$

τότε ισχύουν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$

**Διανυσματική ακτίνα του μέσου ευθυγράμμου τμήματος.**

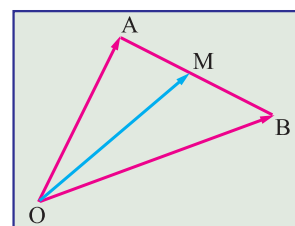
Το σημείο M είναι **μέσο** του ευθύγραμμου τμήματος AB, όταν και μόνο όταν, ισχύει:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM} \Leftrightarrow$$

$$2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

**Βασικές διανυσματικές σχέσεις σε τρίγωνο OAB**

Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου OBA, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, ισχύουν:

$$1. \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$$

$$2. \vec{AB} = -\vec{BA}$$

$$3. \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MA} = \frac{1}{2}\vec{BA}$$

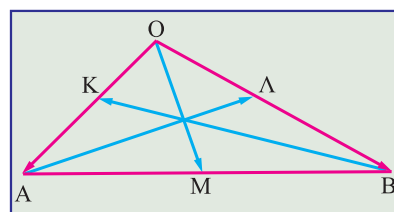
$$4. \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{MB} = -\frac{1}{2}\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$5. \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{AM} = -\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{MA} = \vec{BM}$$

$$6. |\vec{AM}| = |\vec{MB}| = |\vec{BM}| = |\vec{MA}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}| = \frac{1}{2}|\vec{BA}|$$

$$7. \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$8. \vec{AM} = \vec{MB} = \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA}) \Leftrightarrow \vec{MA} = \vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} - \vec{OB})$$



$$9. \vec{KL} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$10. \vec{OM} + \vec{AL} + \vec{BK} = \vec{0} \text{ (το διανυσματικό άθροισμα των διαμέσων ενός τριγώνου είναι } \vec{0} \text{)}$$

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να αποδείξουμε μια διανυσματική ισότητα θεωρούμε ως διανυσματική αρχή ένα σημείο της δοσμένης σχέσης και εκφράζουμε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα ως διαφορές διανυσματικών ακτίνων ως προς την αρχή που θεωρήσαμε.

Π.χ. Αν η αρχή είναι το σημείο O γράφουμε: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Παράδειγμα 1

Να αποδειχθεί ότι για έξι τυχαία σημεία A, B, Γ, Δ, E, Z ισχύει:

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{ΓZ} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{ΓΔ}$$

Λύση

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα ως διαφορές διανυσμάτων με αρχή π.χ. το σημείο A.

$$\text{Έτσι } \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{ΓZ} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{ΓΔ} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AD} + \vec{AE} - \vec{AB} + \vec{AZ} - \vec{ΑΓ} = \vec{AE} + \vec{AZ} - \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{ΑΓ} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}, \text{ που ισχύει.}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν ζητείται να προσδιορίσουμε σημείο το οποίο ικανοποιεί μια διανυσματική ισότητα, τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα που ορίζεται από το ζητούμενο σημείο, κι ένα άλλο σταθερό σημείο, συναρτήσει γνωστών σταθερών διανυσμάτων, δηλαδή διανυσμάτων που δεν περιέχουν το ζητούμενο σημείο. Γι' αυτό θεωρούμε ως διανυσματική αρχή ένα από τα γνωστά σημεία της δοσμένης σχέσης.

Παράδειγμα 1

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιορίσετε σημείο M στο επίπεδο του τριγώνου τέτοιο ώστε να ισχύει: $2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MΓ} = \vec{0}$

Λύση

Θεωρούμε ως αρχή το σημείο A και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της σχέσης ως διαφορές διανυσμάτων με αρχή το σημείο A.

Έχουμε:

$$2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MΓ} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MA} - (\vec{AB} - \vec{AM}) + 3(\vec{AΓ} - \vec{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$4\vec{MA} - \vec{AB} + 3\vec{AG} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{AM} = 3\vec{AG} - \vec{AB} \Leftrightarrow$$

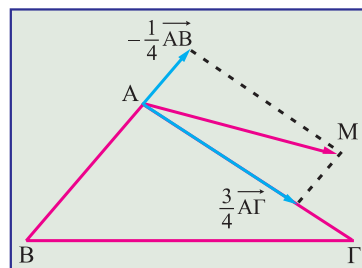
$$\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AG} - \frac{1}{4}\vec{AB}$$

Άρα το $\vec{AM}$ προσδιορίζεται από το άθροισμα των

διανυσμάτων $\frac{3}{4}\vec{AG}$ και $-\frac{1}{4}\vec{AB}$ τα οποία είναι γνω-

στά.

Δηλαδή το σημείο M καθορίζεται ως πέρας γνωστού διανύσματος με γνωστή αρχή.



Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αποδεικνύουμε μια σχέση της μορφής $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή ότι είναι παράλληλα προς τρίτο διάνυσμα.

Παράδειγμα 1

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν $\vec{AD} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{AG}$ (1) και $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{AG}$ (2) να δείξετε

ότι $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$ ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$).

Λύση

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$\vec{AE} - \vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{AG} - \kappa \vec{AB} - \lambda \vec{AG} \Leftrightarrow \vec{DE} = \lambda \left(\vec{AB} - \vec{AG} \right) + \kappa \left(\vec{AG} - \vec{AB} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{DE} = \lambda \vec{GB} + \kappa \vec{BG} \Leftrightarrow \vec{DE} = -\lambda \vec{BG} + \kappa \vec{BG} \Leftrightarrow \vec{DE} = (\kappa - \lambda) \vec{BG}$$

Επομένως $\vec{DE} = \mu \vec{BG}$ με $\mu = \kappa - \lambda$, δηλαδή $\vec{DE} \parallel \vec{BG}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά δείχνουμε ότι δύο από τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BG}, \vec{AG}$ είναι παράλληλα.

Παράδειγμα 1

Αν για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ ισχύει $4\vec{OA} - \vec{OB} - 3\vec{OG} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 4\vec{OA} - \vec{OB} - 3\vec{OG} = \vec{0} &\Leftrightarrow 4\vec{OA} - (\vec{AB} - \vec{AO}) - 3(\vec{AG} - \vec{AO}) = \vec{0} \Leftrightarrow \\ 4\vec{OA} - \vec{AB} + \vec{AO} - 3\vec{AG} + 3\vec{AO} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} = -3\vec{AG} \end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινή αρχή το σημείο A τα σημεία A, B, Γ θα είναι συνευθειακά.

Κατηγορία - Μέθοδος 5

1. Αν δίνονται τα μέτρα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, τότε για να δείξουμε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, είναι ομόρροπα εξετάζουμε αν ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ενώ αν ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.
2. Αν δίνεται μια διανυσματική ισότητα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε: α) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda > 0$ β) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda < 0$

Παράδειγμα 1

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\beta}| = 3|\vec{\gamma}|$ τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{|\vec{\alpha}|}{4} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = |\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|}{3+1} = \frac{|\vec{\beta} + \vec{\gamma}|}{4} \quad (1) \text{ και επειδή } \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -\vec{\beta} - \vec{\gamma},$$

$$\text{οπότε } \frac{|\vec{\alpha}|}{4} = \frac{|-\vec{\beta} - \vec{\gamma}|}{4} = \frac{|\vec{\beta} + \vec{\gamma}|}{4} \stackrel{(1)}{=} \frac{|\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|}{4} \Leftrightarrow |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|, \text{ που σημαίνει ότι } \vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}.$$

Επειδή $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\beta} = \lambda \vec{\gamma}$ με $\lambda > 0$. Τότε:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \lambda \vec{\gamma} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -(\lambda + 1)\vec{\gamma}$$

με $(\lambda + 1) > 0$, άρα $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ και συνεπώς $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Όταν ζητείται να εκφράσουμε ένα διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό μη συγγραμμικών διανυσμάτων έστω $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, τότε:

Εκφράζουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως **γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με δύο τρόπους.**

Επειδή η γραφή ενός διανύσματος ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι μοναδική, από την ισότητα των συντελεστών προκύπτει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1

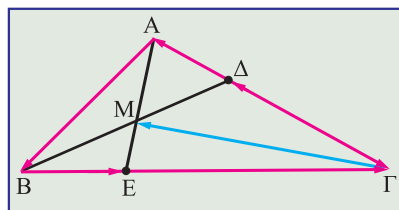
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E πάνω στην $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε να

ισχύουν: $\vec{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}\vec{\Gamma A}$ και $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$. Αν M το σημείο τομής των $B\Delta$ και AE να εκφράσετε το $\vec{GM}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{\beta}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\gamma}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{GM} &= \vec{GA} + \vec{AM} = -\vec{\gamma} + \lambda \vec{AE} = -\vec{\gamma} + \lambda (\vec{BE} - \vec{BA}) = \\ &= -\vec{\gamma} + \lambda \left(\frac{1}{4} \vec{B\Gamma} - \vec{BA} \right) = -\vec{\gamma} + \frac{\lambda}{4} (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) - \lambda (-\vec{\beta}) = \\ &= \left(\lambda - \frac{\lambda}{4} \right) \vec{\beta} + \left(\frac{\lambda}{4} - 1 \right) \vec{\gamma} = \frac{3\lambda}{4} \vec{\beta} + \frac{\lambda - 4}{4} \vec{\gamma}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Επίσης } \vec{GM} &= \vec{BM} - \vec{BG} = \mu \vec{B\Delta} - (\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) = \mu (\vec{BA} + \vec{A\Delta}) - \vec{A\Gamma} + \vec{AB} = \\ &= (1 - \mu) \vec{AB} + \mu \frac{1}{3} \vec{A\Gamma} - \vec{A\Gamma} = (1 - \mu) \vec{\beta} + \left(\frac{\mu}{3} - 1 \right) \vec{\gamma}.\end{aligned}$$

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} \frac{3\lambda}{4} = 1 - \mu \\ \frac{\lambda - 4}{4} = \frac{\mu - 3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda + 4\mu = 4 \\ 3\lambda - 4\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ και } \mu = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } \vec{GM} = \frac{1}{2} \vec{\beta} - \frac{5}{6} \vec{\gamma}.$$

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

1. α. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των άλλων διανυσμάτων στο σχήμα 1.

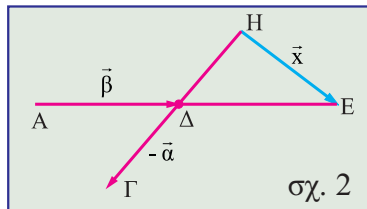
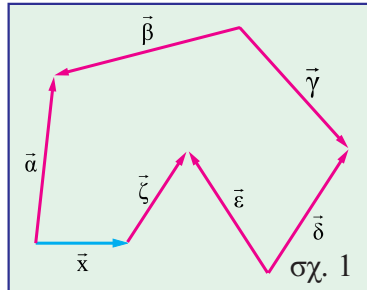
β. Έστω ΑΕ, ΓΗ δύο ευθύγραμμα τμήματα με κοινό μέσον Δ. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{HE}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν $-\vec{\alpha} = \vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\beta} = \vec{\Delta\Delta}$. (σχ. 2)

Λύση

α. Ισχύει: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} - \vec{\zeta} = \vec{x}$

β. Είναι $\vec{x} = \vec{H\Delta} + \vec{\Delta E}$. Επειδή $\vec{H\Delta} = \vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\Delta E} = \vec{\Delta\Delta}$ (Δ το κοινό σημείο των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΕ, ΓΗ) προκύπτει ότι:

$$\vec{x} = \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Delta\Delta} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$$



Άσκηση 2

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ εσωτερικό σημείο του τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}|\overline{AM}| = \frac{1}{5}|\overline{MB}|$.

Αν Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου και $\vec{\alpha} = \vec{\Sigma A}$, $\vec{\beta} = \vec{\Sigma B}$ να δείξετε ότι:

α. $\vec{AM} = \frac{2}{7}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, β. $\vec{BM} = \frac{5}{7}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και γ. $\vec{\Sigma M} = \frac{1}{7}(5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

Λύση

α. Επειδή τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MB}$ είναι ομόρροπα από τη σχέση $\frac{1}{2}|\overline{AM}| = \frac{1}{5}|\overline{MB}|$ παίρνουμε:

$$\vec{AM} = \frac{2}{5}\vec{MB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{2}{5}(\vec{AB} - \vec{AM}) \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{2}{5}\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AM} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{5}\vec{AM} = \frac{2}{5}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{2}{7}\vec{AB} = \frac{2}{7}(\vec{\Sigma B} - \vec{\Sigma A}) = \frac{2}{7}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}).$$

β. $\vec{BM} = \frac{5}{2}\vec{MA} \Leftrightarrow \vec{BM} = \frac{5}{2}(\vec{BA} - \vec{BM}) \Leftrightarrow \vec{BM} = \frac{5}{2}\vec{BA} - \frac{5}{2}\vec{BM} \Leftrightarrow \frac{7}{2}\vec{BM} = \frac{5}{2}\vec{BA} \Leftrightarrow$

$$\vec{BM} = \frac{5}{7}\vec{BA} = \frac{5}{7}(\vec{\Sigma A} - \vec{\Sigma B}) = \frac{5}{7}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}).$$

γ. $\vec{\Sigma M} = \vec{\Sigma A} + \vec{AM} = \vec{\alpha} + \frac{2}{7}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{5}{7}\vec{\alpha} + \frac{2}{7}\vec{\beta} = \frac{1}{7}(5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}).$

Άσκηση 3

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και

για τα διανύσματα $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Λύση

Αν $\vec{u} // \vec{v}$ θα ισχύει: $\vec{u} = \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \Leftrightarrow (5 - \lambda)\vec{\alpha} = (-3 - 2\lambda)\vec{\beta}$.

Αν $5 - \lambda \neq 0$ ή $-3 - 2\lambda \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, άτοπο. Οπότε $5 - \lambda = 0$ και $-3 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$ και $\lambda = \frac{-3}{2}$, που είναι επίσης άτοπο.

Άσκηση 4

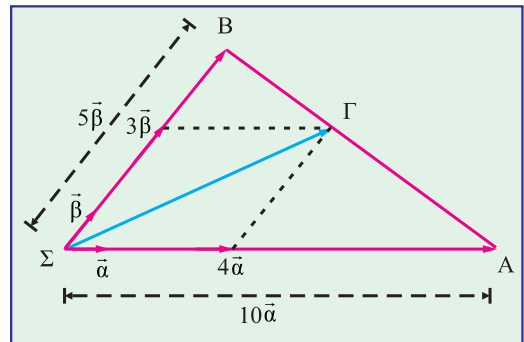
Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (μη παράλληλα) και τα σημεία A, B, Γ τέτοια ώστε $\vec{\Sigma A} = 10\vec{\alpha}$, $\vec{\Sigma B} = 5\vec{\beta}$, $\vec{\Sigma \Gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ όπου Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{AB} = \lambda \vec{B\Gamma}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ διότι τότε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινό σημείο το B, έχουν και τον ίδιο φορέα, οπότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Είναι

$$\vec{AB} = \vec{\Sigma B} - \vec{\Sigma A} = 5\vec{\beta} - 10\vec{\alpha} = 5(\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) \quad (1)$$



$$\vec{B\Gamma} = \vec{\Sigma \Gamma} - \vec{\Sigma B} = (4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) - 5\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = -2(\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{\beta} - 2\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\vec{B\Gamma} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\vec{AB} = -\frac{5}{2}\vec{B\Gamma}$ ή $\vec{AB} // \vec{B\Gamma}$. Άρα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τα σημεία O, A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$, $\vec{OG} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma} - (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}) = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}.$$

$$\text{και } \vec{B\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OB} = \left(-\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \right) - \left(3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma} \right) = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} =$$

$$-2 \left(2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} \right) = -2\vec{AB}.$$

Από τη σχέση $\vec{B\Gamma} = -2\vec{AB}$, προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AB}$ είναι παράλληλα και επειδή έχουν κοινό το σημείο B έχουν τον ίδιο φορέα, άρα τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και ορίζουμε στο επίπεδό του τα σημεία Δ και Ε σύμφωνα με τις σχέσεις $\vec{A\Delta} = 5\vec{AB} + 4\vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma} = 4\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Υπ: Εκφράστε το $\vec{\Delta E}$ με αρχή το σημείο Α).

2. Αν σε τετράπλευρο είναι $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta} = \vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ τότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο.

(Υπ: Δείξτε ότι $\vec{\Gamma\Delta} = -4\vec{AB}$).

3. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Απ: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ και υπολογίστε τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$)

4. Αν για οποιαδήποτε σημεία O, A, B, Γ ισχύει $3\vec{OA} - 2\vec{OB} - \vec{O\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Υπ: Δείξτε ότι $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$)

5. Αν A, B, Δ, E, Z είναι σημεία ενός επιπέδου τέτοια ώστε $\vec{\Delta A} + \vec{BZ} = 2\vec{\Delta B} + 3\vec{BA} + 2\vec{AE}$ να αποδείξετε ότι τα Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

(Υπ: Εκφράστε όλα τα διανύσματα με αρχή το A και δείξτε ότι $\vec{\Delta Z} // \vec{E\Delta}$)

6. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ και τα μέσα M και N των πλευρών AB και ΓΔ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{y} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} + 2\vec{NM}$.

(Απ: $\vec{y} = \vec{0}$)

7. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = |\vec{\gamma}|$ να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

(Υπ: Μέθοδος 5)

8. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = -4\vec{\gamma}$.

i. Να προσδιορίσετε διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει :

$$|\vec{\alpha}|x + |\vec{\gamma}||\vec{\alpha} + \vec{\beta}|\vec{\alpha} + 4\vec{\gamma} = -|\vec{\beta}|\vec{x} + |\vec{\beta}||\vec{\alpha}|\vec{\alpha} + |\vec{\beta}|^2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

ii. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό, την πρόταση: “Το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$ ”

9. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι 2 και το μέτρο του διανύσματος $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ να βρείτε την ακριβή σχέση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

10. Έστω τρίγωνο ABΓ με AM, BE, ΓZ διαμέσους

i. Να δείξετε ότι $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AM}$, $\vec{BA} + \vec{BG} = 2\vec{BE}$, $\vec{GB} + \vec{GA} = 2\vec{GZ}$.

ii. Να προσδιορίσετε σημείο G του επιπέδου του τριγώνου για το οποίο ισχύει $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ υπολογίζοντας τα διανύσματα $\vec{AG}$, $\vec{BG}$, $\vec{CG}$ συναρτήσει των διαμέσων $\vec{AM}$, $\vec{BE}$, $\vec{GZ}$ αντίστοιχα.

iii. Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχει το σημείο G.

iv. Πως χαρακτηρίζεται το σημείο G στην Γεωμετρία.

11. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \neq 0$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \neq 0$. Να αποδειχθεί

$$\text{ότι: } \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} + \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \geq 1.$$

12. Αν $\vec{OG} = \lambda \vec{OA}$ και $\vec{OD} = \mu \vec{OB}$ με $\Gamma\Delta // AB$ να αποδείξετε ότι $\lambda = \mu$. Ποιο αντίστοιχο γεωμετρικό θεώρημα προκύπτει;
13. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \neq \vec{0}$ και ανα δύο μη συγγραμμικά αν $\vec{\alpha} // (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} // (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$ να αποδείξετε και $\vec{\gamma} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός κ τέτοιος ώστε: $\vec{AM} = (1 - \kappa) \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma}$

Ε.**ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ**

Για τα διανύσματα $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_\Gamma$ των ταχυτήτων τριών σωματιδίων A, B, Γ αντίστοιχα, που κινούνται στο επίπεδο, ισχύει η σχέση: $\vec{v}_A + \vec{v}_B - \vec{v}_\Gamma = \vec{0}$

Το μέτρο της ταχύτητας του A είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{10}{3}$ του μέτρου της ταχύτητας του

B και με τα $\frac{10}{7}$ του μέτρου της ταχύτητας του Γ . Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια B, Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

$$(\text{Υπ.: } |\vec{v}_B - \vec{v}_\Gamma| = |\vec{v}_A| \text{ και } |\vec{v}_B| + |\vec{v}_\Gamma| = |\vec{v}_A|)$$

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εσωτερικό γινόμενο

Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \begin{cases} |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) & , \text{ αν } \vec{\alpha} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0} \\ 0 & , \text{ αν } \vec{\alpha} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \end{cases}$$

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Αποδεικνύεται ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Συμβολίζουμε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2$ (εσωτερικό τετράγωνο του $\vec{\alpha}$)

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική).

2. $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

4. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

5. αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

6. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

7. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$).

8. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ (με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$) αν ορίζονται οι $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$.

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

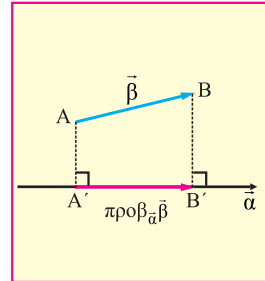
Ονομάζουμε **προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$** (και συμβολίζουμε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$) το διάνυσμα $\vec{A'B'}$ που είναι η ορθή προβολή του ευθύγραμμου τμήματος AB σε ευθεία παράλληλη με τον φορέα του $\vec{\alpha}$.

Είναι δηλαδή $\vec{A'B'} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{AB}$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$$

Σχόλιο: Η παραπάνω σχέση “μεταφέρει” ένα εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που σχηματίζουν μια γωνία φ σε εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία και αντίστροφα.

**Δεν ισχύουν πάντοτε οι παρακάτω σχέσεις:**

1. $\vec{\alpha}(\vec{\beta} \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ (προσεταιριστική ιδιότητα) 2. $\vec{\alpha} \vec{\gamma} = \vec{\beta} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ (ιδιότητα διαγραφής)

(Ισχύει: Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \vec{\gamma} = \vec{\beta} \vec{\gamma}$)

3. $|\vec{\alpha} \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ (Ισχύει: $|\vec{\alpha} \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$) 4. $(\vec{\alpha} \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$ (Ισχύει: $(\vec{\alpha} \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$)

Τις αναφέρουμε γιατί είναι σχέσεις που ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύουν γενικά στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία - Μέθοδος 1**

Για να υπολογίσουμε τη γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ χρησιμοποιούμε

τον τύπο $\cos \varphi = \frac{\vec{\alpha} \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$, όπου φ η γωνία των δυο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (0, 2)$.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha} \vec{\beta} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Άρα

$$\sin \varphi = \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Επομένως } \hat{\varphi} = 45^\circ.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να δείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα, δείχνουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{smallmatrix} \right) \vec{\gamma} - \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\gamma} \end{smallmatrix} \right) \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Λύση

Αρκεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{\alpha}$ να είναι ίσο με μηδέν.

Είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = \left[\left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{smallmatrix} \right) \vec{\gamma} - \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\gamma} \end{smallmatrix} \right) \vec{\beta} \right] \cdot \vec{\alpha} = \left[\left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{smallmatrix} \right) \vec{\gamma} \right] \cdot \vec{\alpha} - \left[\left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\gamma} \end{smallmatrix} \right) \vec{\beta} \right] \cdot \vec{\alpha} = \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \vec{\gamma} & \vec{\alpha} \end{smallmatrix} \right) - \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\gamma} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{smallmatrix} \right) = 0$$

Άρα $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος που δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}}, \widehat{\vec{\beta}} \right) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογισθεί το $|\vec{u}|$.

Λύση

$$\text{Είναι } |\vec{u}|^2 = |5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|^2 = (5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 25\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 30\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} =$$

$$= 25|\vec{\alpha}|^2 + 30|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\left(\widehat{\vec{\alpha}}, \widehat{\vec{\beta}}\right) + 9|\vec{\beta}|^2 = 25 \cdot 4 + 30 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1 = 100 + 30 + 9 = 139.$$

$$\text{Άρα } |\vec{u}| = \sqrt{139}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Για να δείξουμε ισότητες ή ανισότητες με μέτρα διανυσμάτων, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}$ και γνωστές ταυτότητες.

Παράδειγμα 1

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα. Να δείξετε ότι: $|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}| = |4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Λύση

$$|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}| = |4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}| \Leftrightarrow |4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2 = |4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (4\vec{\alpha}-3\vec{\beta})^2 = (4\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\vec{\alpha}^2 - 24\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 16\vec{\alpha}^2 + 24\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 48\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

(διότι $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0$)

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, θέτουμε τις συνιστώσες με άγνωστες συντεταγμένες (παραμετρικές) και δημιουργούμε από τα δεδομένα σχέσεις με τις οποίες υπολογίζουμε τους αγνώστους αυτούς.

Παράδειγμα 1

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta} = (3, -1)$

Λύση

α' τρόπος.

Έστω $\vec{u} = (x_1, y_1)$ και $\vec{v} = (x_2, y_2)$ οι δύο συνιστώσες.

Ισχύει $\vec{u} + \vec{v} = \vec{\alpha}$ και επειδή η σχέση των διανυσμάτων είναι και σχέση συντεταγμένων:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ y_1 + y_2 = -3 & (2) \end{cases}$$

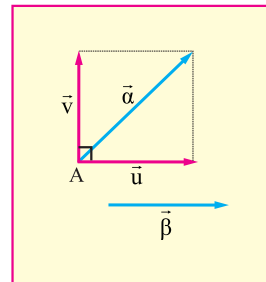
Η μία από τις δύο συνιστώσες, έστω η $\vec{u}$ είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$, άρα σύμφωνα με τη συνθήκη συγγραμμικότητας:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_1 - 3y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3y_1 = 0 \quad (3)$$

Η άλλη συνιστώσα, η $\vec{v}$ είναι κάθετη στο $\vec{\beta}$. Επομένως $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 3x_2 - y_2 = 0 \quad (4)$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2), (3), (4) και βρίσκουμε

$$x_1 = \frac{27}{10}, x_2 = \frac{-7}{10}, y_1 = \frac{-9}{10}, y_2 = \frac{-21}{10}. \text{ Επομένως } \vec{u} = \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10} \right) \text{ και } \vec{v} = \left(\frac{-7}{10}, \frac{-21}{10} \right)$$



β' τρόπος

Έστω $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ (1) $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = \lambda \vec{\beta}$ (2) και $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\beta} = 0$ (3)

Απ' την (1) εάν πολλαπλασιάσουμε με $\vec{\beta}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\beta} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) = \lambda (\sqrt{3^2 + (-1)^2})^2 \Leftrightarrow 6 + 3 = 10\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{9}{10}$$

$$(2) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = \frac{9}{10} \vec{\beta} = \frac{9}{10} (3, -1) = \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10} \right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 = (2, -3) - \left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10} \right) = \left(-\frac{7}{10}, -\frac{21}{10} \right)$$

Βασικοί γεωμετρικοί τύποι (γ.τ.)**Κατηγορία - Μέθοδος 6**

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τύπος σημείων M που ικανοποιούν μια διανυσματική σχέση, κάνουμε πράξεις σ' αυτήν για να καταλήξουμε σε απλούστερη από την οποία θα "φαίνεται" η ιδιότητα των σημείων M .

Έστω A και B σταθερά σημεία και M τυχαίο σημείο του οποίου ζητείται ο τύπος. Αν καταλήξουμε σε σχέση :

1. $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$. Τότε ο γ.τ των σημείων M είναι η μεσοκάθετος του σταθερού ευθ.τμήματος AB .
2. $|\vec{MA}| = \rho$, όπου ρ σταθερό. Τότε ο γ.τ των σημείων M είναι κύκλος κέντρου A και ακτίνας ρ .
3. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Τότε ο γ.τ των σημείων M είναι κύκλος διαμέτρου AB .
4. $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$. Τότε ο γ.τ των σημείων M είναι κάθετη ευθεία στην AB στο σημείο A .

Παράδειγμα 1

Αν A, B είναι σταθερά σημεία του επιπέδου και O το μέσον του AB , να βρείτε το γ.τ των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύουν :

- | | |
|--|---|
| i. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ | ii. $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ |
| iii. $\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ | iv. $\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = \kappa, \kappa > 0$ |

Λύση

1. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, $k \in \mathbb{R}$, αν O το μέσο του AB έχουμε:

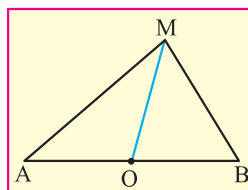
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = k \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = k \Leftrightarrow$$

$$|\overrightarrow{MO}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + k \text{ οπότε :}$$

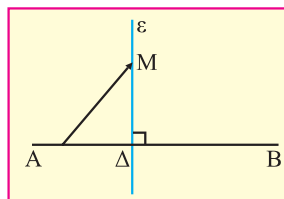
- Αν $|\overrightarrow{OA}|^2 + k < 0$, γεωμετρικός τόπος του M είναι το κενό σύνολο.
- Αν $|\overrightarrow{OA}|^2 + k = 0$, γεωμετρικός τόπος του M είναι το σημείο O .
- Αν $|\overrightarrow{OA}|^2 + k > 0$, γεωμετρικός τόπος του M είναι κύκλος με κέντρο O και ακτίνα

$$\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + k}$$



2. Από τη σχέση $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$, $k \in \mathbb{R}$, αν Δ είναι η προβολή του M στην AB έχουμε: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = k$.

$$\text{Οπότε } |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |k| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}| = \frac{|k|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$



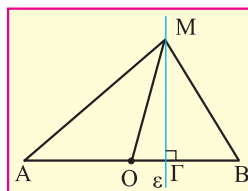
Άρα προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος M είναι η κάθετη ευθεία ϵ στην AB στο σημείο Δ , αφού το Δ απέχει σταθερή απόσταση από το σημείο A .

3. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$, αν Γ η προβολή του M στην AB , έχουμε:

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{O\Gamma}$$

$$\text{Άρα } 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = k. \text{ Οπότε } 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{O\Gamma}| = |k| \Leftrightarrow |\overrightarrow{O\Gamma}| = \frac{|k|}{2|\overrightarrow{AB}|}, \text{ άρα}$$

προκύπτει, ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι ευθεία ϵ , κάθετη στην AB στο σημείο Γ .



4. Από τη σχέση $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k$, αν O το μέσον του AB έχουμε:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 = \frac{2k - \overrightarrow{AB}^2}{4} = \lambda.$$

Οπότε: Αν $\lambda < 0$ ο γ.τ. του M είναι το κενό σύνολο

Αν $\lambda = 0$ το σημείο M ταυτίζεται με το σημείο O .

Αν $\lambda > 0$ ο γ.τ. του M είναι ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\sqrt{\lambda}$.

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{6}$. Να υπολογισθούν τα επόμενα :

$$\alpha. \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad \beta. \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 \quad \gamma. \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 \quad \delta. \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \quad \epsilon. \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \left(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right)$$

Λύση

$$\alpha. \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\beta. \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\gamma. \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$\delta. \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = 1. \text{ Άρα } \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 1$$

$$\epsilon. \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \left(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 =$$

$$2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 4 - 3 - 3 \cdot 3 = -4$$

Άσκηση 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν ισχύει η ισότητα

$\left(\vec{AB} \cdot \vec{AG}\right) \vec{AG} = \left(\vec{AM} \cdot \vec{BG}\right) \vec{AB}$ (1), να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

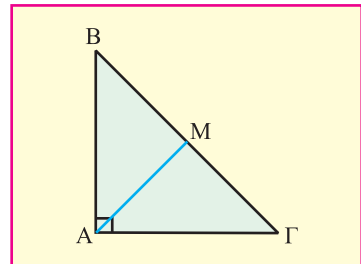
Λύση

Τα διανύσματα $\vec{AG}, \vec{AB}$ δεν είναι συγγραμμικά, αφού σχηματίζουν τρίγωνο. Άρα από την (1) πρέπει αναγκαστικά: $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0$ και $\vec{AM} \cdot \vec{BG} = 0$.

Αλλά $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0$ σημαίνει $\vec{AB} \perp \vec{AG}$, επομένως το

τρίγωνο είναι ορθογώνιο και $\vec{AM} \cdot \vec{BG} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{BG}$

δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου είναι και ύψος, που σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Άσκηση 3

α. Για δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta}$

β. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j}$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$.

γ. Έστω $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

Λύση

α. Το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\beta}$. Σύμφωνα με τη συνθήκη συγγραμμικότητας, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ (1)

$$\text{Όμως } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \left(\lambda \vec{\beta} \right) \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \quad (2)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας την (2) ή (1) γίνεται $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta}$.

β. $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (2, 4)$, $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j} \Leftrightarrow \vec{\beta} = (1, -1)$. Επομένως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 - 4 = -2$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} = \frac{-2}{2} \vec{\beta} = -\vec{\beta} = (-1, 1)$

Τελικά $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

γ. Είναι $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (4, -3)$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{\beta} = (2, 5)$. Επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (6, 2)$

και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = 24 - 6 = 18$ Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \frac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha} = \frac{18}{25} \vec{\alpha} = \frac{18}{25} (4, -3) = \left(\frac{72}{25}, -\frac{54}{25} \right)$$

Άσκηση 4

Ναδειχθεί ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή.

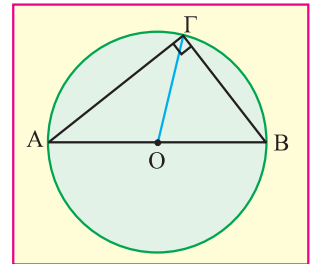
Λύση

Έστω Ο το κέντρο του κύκλου και ΑΒ διάμετρος.

Θα δείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}GB$ είναι ορθή. Αρκεί $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 0$.

$$\text{Είναι } \vec{GA} \cdot \vec{GB} = (\vec{OA} - \vec{OG}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OG}) = (\vec{OA} - \vec{OG}) \cdot (-\vec{OA} - \vec{OG}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\left(\vec{OA} - \vec{OG}\right)\left(\vec{OA} + \vec{OG}\right) = -\left(\vec{OA}^2 - \vec{OG}^2\right) = \\
 &= -\left(\left|\vec{OA}\right|^2 - \left|\vec{OG}\right|^2\right) = -(R^2 - R^2) = 0.
 \end{aligned}$$



Άσκηση 5

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν:

α. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, **β.** $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και **γ.** $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4$. Να υπολογίσετε $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (1). Επίσης, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$
 $\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 = 0$ (2)

Επιπλέον ισχύει $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 16$ (3)

Αφαιρούμε την (2) από την (3) και έχουμε:

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - \vec{\alpha}^2 + 3\vec{\beta}^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{\beta}^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2.$$

Αντικαθιστούμε στην (3) και έχουμε: $\vec{\alpha}^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = 12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Άσκηση 6

Αν για τα τρία διανύσματα του επιπέδου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Λύση

Από τη σχέση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ έχουμε: $|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + |\vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \cos(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 2$

άρα $\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + \cos(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 2$.

Επειδή $|\cos \phi| \leq 1$ για να ισχύει η παραπάνω σχέση πρέπει $\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 1$ και $\cos(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 1$.

Επομένως $\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = 0^\circ$ και $\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}} = 0^\circ$.

Δηλαδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα. Επειδή έχουν και ίσα μέτρα, έχουμε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Άσκηση 7

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ (1) Πότε ισχύει η ισότητα;

β. Να εξετάσετε πότε από την ισότητα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ προκύπτει $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

γ. Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

Λύση

α. Παίρνουμε τη σχέση (1) και εργαζόμαστε με ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| &\Leftrightarrow \left| |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) \right| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \right| \leq 0 \Leftrightarrow \left| |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \left(\left| \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) \right| - 1 \right) \right| \leq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει αφού $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}| \geq 0$ και $\left| \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) \right| \leq 1$. Επομένως ισχύει και η αρχική.

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι θα ισχυε η ισότητα αν $|\vec{\alpha}| = 0$ ή $|\vec{\beta}| = 0$ ή

$$\left| \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) \right| = 1 \text{ δηλαδή } \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) = 0 \text{ ή } \pi, \text{ δηλαδή, όταν τα διανύσματα } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι συγγραμμικά.}$$

β. Εργαζόμαστε πάλι στην δοσμένη σχέση με ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0.$$

Η τελευταία ισότητα όμως μπορεί να ισχύει αν $\vec{\alpha} = 0$ ή $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ ή $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} - \vec{\gamma}$.

Για να ισχύει λοιπόν μόνο το $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ πρέπει $\vec{\alpha} \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ να μην είναι κάθετο στο $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$.

γ. ι. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0$ Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| &\Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \left(|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \right)^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \sin \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left| \vec{\alpha} \right| \left| \vec{\beta} \right| \cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) - \left| \vec{\alpha} \right| \left| \vec{\beta} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \vec{\alpha} \right| \left| \vec{\beta} \right| \left(\cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) - 1 \right) = 0 \stackrel{\left| \vec{\alpha} \right| \left| \vec{\beta} \right| \neq 0}{\Leftrightarrow} \cos \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 1$$

$$\text{Άρα } \widehat{\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right)} = 0^\circ \text{ δηλαδή } \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}.$$

ii. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε προφανώς $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

Άσκηση 8

Αν $\left| \vec{\alpha} \right| = 1, \left| \vec{\beta} \right| = 2, \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (1) να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Λύση

Είναι $\text{προβ}_{\vec{u}} \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (2)$

$$\text{Επίσης } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \text{προβ}_{\vec{u}} \vec{v} \Leftrightarrow \left(2\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta} \right) = \lambda \cdot \vec{u} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \lambda \left| 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 2\left| \vec{\alpha} \right|^2 - \left| \vec{\beta} \right|^2 = \lambda \left(4\left| \vec{\alpha} \right|^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \left| \vec{\beta} \right|^2 \right) \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 - 2^2 = \lambda (4 \cdot 1 + 4) \Leftrightarrow -2 = 8\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$(*) \text{ (διότι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{)}. \text{ Άρα } \text{προβ}_{\vec{u}} \vec{v} = -\frac{1}{4} \vec{u} = -\frac{1}{4} (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

Άσκηση 9

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ μέσο της πλευράς ΒΓ. Είναι $\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3}, \left| \vec{AG} \right| = 2$ και

$$\widehat{\left(\vec{AB}, \vec{AG} \right)} = \frac{\pi}{6}. \text{ Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας } \widehat{\left(\vec{AB}, \vec{AM} \right)}.$$

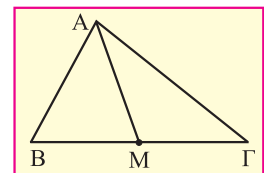
Λύση

$$\text{Το συνημίτονο της γωνίας } \widehat{\left(\vec{AB}, \vec{AM} \right)} \text{ είναι: } \cos \left(\widehat{\left(\vec{AB}, \vec{AM} \right)} \right) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{\left| \vec{AB} \right| \cdot \left| \vec{AM} \right|} \quad (1)$$

Ως γνωστόν για τη διάμεσο ενός τριγώνου ισχύει

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AG}) \quad (2).$$

$$\text{Επομένως } \vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \left[\frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AG}) \right] = \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AG} =$$



$$= \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AG}| \sin \left(\widehat{AB, AG} \right) = \frac{1}{2} 3 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Σύμφωνα με τη μέθοδο 3 και τη σχέση (2) έχουμε } |\vec{AM}|^2 &= \frac{1}{4} |\vec{AB} + \vec{AG}|^2 = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AG})^2 = \\ &= \frac{1}{4} (\vec{AB}^2 + 2 \vec{AB} \cdot \vec{AG} + \vec{AG}^2) = \frac{1}{4} \left(3 + 2\sqrt{3} \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \right) = \frac{13}{4}. \text{ Άρα } |\vec{AM}| = \frac{\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως η σχέση (1) γίνεται: } \sin \left(\widehat{AB, AM} \right) = \frac{3}{\sqrt{3} \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{39}} = \frac{6\sqrt{39}}{39} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Άσκηση 10

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ βρίσκονται σε ευθεία.}$$

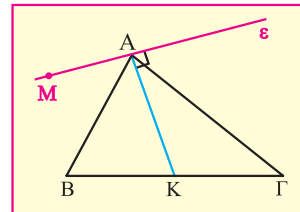
Λύση

Παίρνουμε τη δοσμένη σχέση και τη μετασχηματίζουμε.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{AG}) \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \vec{AK} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ (όπου AK η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ)}$$

$\Leftrightarrow \vec{AK} \cdot \vec{AM} = 0$ οπότε $\vec{AK} \perp \vec{AM}$. Άρα το Μ βρίσκεται επάνω σε ευθεία (ε) που είναι κάθετη στη διάμεσο ΑΚ και διέρχεται από το σημείο Α.



Άσκηση 11

α. Να δείξετε ότι για τέσσερα οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ του επιπέδου ισχύει:

$$\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} + \vec{AG} \cdot \vec{\Delta B} + \vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma} = 0 \text{ (1).}$$

β. Να δείξετε ότι τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

α. Έστω Ο σημείο αναφοράς. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) (\vec{OD} - \vec{OG}) + (\vec{OG} - \vec{OA}) (\vec{OB} - \vec{OD}) + (\vec{OD} - \vec{OA}) (\vec{OG} - \vec{OB}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} \cdot \vec{OD} - \vec{OB} \cdot \vec{OG} - \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OA} \cdot \vec{OG} + \vec{OG} \cdot \vec{OB} -$$

$$\vec{OG} \cdot \vec{OD} - \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OD} \cdot \vec{OG} - \vec{OD} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OG} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει.}$$

β. Ας υποθέσουμε ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ, δύο ύψη του είναι ΑΕ και το ΒΖ τα οποία τέμνονται στο Δ. Θα δείξουμε ότι και το τρίτο ύψος περνά από το Δ.

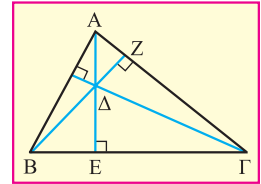
Για τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η σχέση (1).

Επειδή το $A\Delta$ είναι ύψος ισχύει: $\vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ (2)

Επειδή το $B\Delta$ είναι ύψος ισχύει: $\vec{B\Delta} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ (3)

Οπότε η (1) σύμφωνα με τις (2) και (3) γράφεται: $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = 0$,

που σημαίνει ότι $\vec{AB} \perp \vec{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το $\Gamma\Delta$ είναι επίσης ύψος του τριγώνου.



Άσκηση 12

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και το διάνυσμα $\vec{u} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε το $|\vec{u}|$ να είναι ελάχιστο. Για την τιμή του x που θα βρείτε να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Λύση

$$\text{Είναι } |\vec{u}|^2 = (x\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = x^2\vec{\alpha}^2 + 2x\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \quad (1)$$

Η τιμή του x για την οποία είναι το $|\vec{u}|$ ελάχιστο είναι ίδια με αυτήν για την οποία είναι το $|\vec{u}|^2$ ελάχιστο.

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι το $|\vec{u}|^2$ είναι τριώνυμο ως προς x . Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο $kx^2 + \lambda x + \mu$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = -\frac{\lambda}{2k}$, αν $k > 0$.

Άρα το $|\vec{u}|$ γίνεται ελάχιστο όταν:

$$x = -\frac{2\vec{\alpha}\vec{\beta}}{2\vec{\alpha}^2} \Leftrightarrow x = -\frac{2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}{2|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

Για αυτή την τιμή του x το $\vec{u}$ γίνεται: $\vec{u} = -\frac{1}{2}\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Για να δείξουμε ότι $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 0$.

$$\text{Έχουμε: } \vec{u} \cdot \vec{\alpha} = \left[-\frac{1}{2}\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta} \right] \cdot \vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}\vec{\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -2\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + 2\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0. \text{ Άρα } \vec{u} \perp \vec{\alpha}.$$

Άσκηση 13

α. Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου. Να αποδείξετε

ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

β. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2$. Να βρεθεί συναρτήση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ το οποίο ανήκει στο ίδιο επίπεδο με τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και διχοτομεί την γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Λύση

α. Έστω Ο η κοινή αρχή των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{OG} = \vec{\gamma}$.

Από το Γ φέρνουμε $\vec{GA} // \vec{\alpha}$ και $\vec{GB} // \vec{\beta}$.

Είναι $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\alpha}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Άρα $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta}$ (1) δηλαδή το $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Μοναδικότητα: Έστω $\vec{\gamma} = \mu \vec{\alpha} + \nu \vec{\beta}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$ (2)

Από (1), (2) συμπεραίνουμε

$$\lambda \vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta} = \mu \vec{\alpha} + \nu \vec{\beta} \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \vec{\alpha} = (\nu - \kappa) \vec{\beta} \quad (3)$$

Αν $\lambda - \mu \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} = \frac{\nu - \kappa}{\lambda - \mu} \vec{\beta}$ δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ που είναι άτοπο. Ομοίως αν $\nu - \kappa \neq 0$.

Τελικά για να ισχύει η (3) πρέπει $\lambda = \mu$ και $\nu = \kappa$, δηλαδή το $\vec{\gamma}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{u}$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{u} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

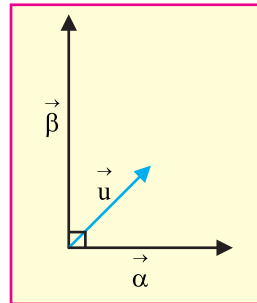
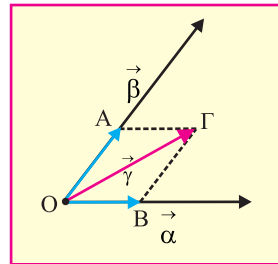
Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και το $\vec{u}$ διχοτομεί την γωνία τους. Άρα σχηματίζει γωνία 45° με κάθε ένα από αυτά.

$$\text{Επιπλέον } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (4)$$

Έχουμε:

$$\cos(\angle(\vec{\alpha}, \vec{u})) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{u}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta})}{\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + \mu \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda \cdot 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$



$$\text{Ακόμα: } \text{syn}(\vec{\beta}, \vec{u}) = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{u}}{|\vec{\beta}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta})}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \mu \vec{\beta}^2}{2} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu \cdot 4}{2} \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Τελικά } \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{\beta}.$$

Άσκηση 14

α. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν $x\vec{\alpha} + \psi\vec{\beta} = \vec{0}$ (1) να δείξετε ότι $x = \psi = 0$.

β. Έστω τρίγωνο ABΓ. Από τυχαίο σημείο Z της AB φέρνουμε παράλληλη προς τη BΓ

που τέμνει την AΓ στο H. Να δείξετε ότι: $\frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AG}|}$.

Λύση

α. Έστω $x \neq 0$. Τότε $x\vec{\alpha} + \psi\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\psi}{x}\vec{\beta}$ που σημαίνει

ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, άτοπο γιατί $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά. Άρα $x = 0$.

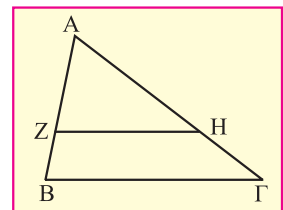
Από την (1) για $x = 0$ έχουμε $0\vec{\alpha} + \psi\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \psi = 0$.

Ομοίως, αν $\psi \neq 0$ καταλήγουμε σε άτοπο.

β. Επειδή A, Z, B συνευθειακά, τα διανύσματα $\vec{AZ}$ και $\vec{AB}$ είναι συγγραμμικά επομένως σύμφωνα με τη γνωστή συνθήκη $\vec{AZ} = \kappa \vec{AB}$ (2) με $\kappa > 0$.

Άρα $\frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AB}|} = \kappa$ (4). Ομοίως $\vec{AH} = \lambda \vec{AG}$ (3) με $\lambda > 0$.

Άρα $\frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AG}|} = \lambda$ (5). Επειδή $\vec{ZH} // \vec{B\Gamma}$ θα είναι $\vec{ZH} = \mu \vec{B\Gamma}$, $\mu > 0$.



Έτσι έχουμε: $\vec{ZH} = \mu \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AH} - \vec{AZ} = \mu (\vec{AG} - \vec{AB}) \stackrel{(2),(3)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda \vec{AG} - \kappa \vec{AB} = \mu \vec{AG} - \mu \vec{AB} \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \vec{AG} = (\kappa - \mu) \vec{AB}$. Επειδή τα $\vec{AG}, \vec{AB}$ δεν είναι συγγραμμικά, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα είναι :

$\lambda - \mu = 0$ και $\kappa - \mu = 0$. Άρα $\lambda = \mu = \kappa$ (6).

Από τις σχέσεις (4), (5), (6) προκύπτει ότι: $\frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AG}|}$.

Άσκηση 15

Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$ και για τα τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει η σχέση $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ (1) να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

Λύση

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\vec{\gamma}$ οπότε

$$\left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right)^2 = 9\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 9\vec{\gamma}^2$$

$$\text{Άρα } 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 9 + 16 - 9 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 4.$$

Ομοίως εργαζόμενοι, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\vec{\gamma}$.

$$\text{Είναι } \vec{\alpha}\vec{\gamma} = \frac{1}{3} \text{ και } \vec{\beta}\vec{\gamma} = -\frac{4}{3}. \text{ Επομένως: } \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

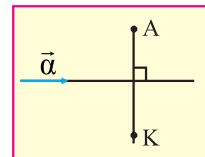
Άσκηση 16

Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και το σταθερό σημείο A. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{AK} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

i. Αν $\lambda = 0$

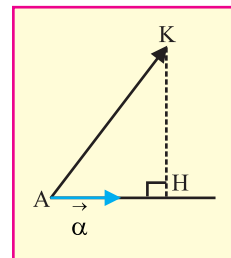
τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{AK} = 0$, δηλαδή: $\vec{\alpha} \perp \vec{AK}$ οπότε το K κινείται σε ευθεία κάθετη στο φορέα του $\vec{\alpha}$ που περνάει από το δοσμένο σημείο A.



ii. Αν $\lambda \neq 0$

και A η αρχή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και H η προβολή του σημείου K στον φορέα του $\vec{\alpha}$, τότε :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{AK} = \lambda \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{AK} = \lambda \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{AH} = \lambda, \text{ οπότε}$$



Άρα το σημείο H βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το σημείο A. Επομένως το K κινείται σε ευθεία κάθετη στο φορέα του $\vec{\alpha}$ που περνάει από το σταθερό σημείο H.

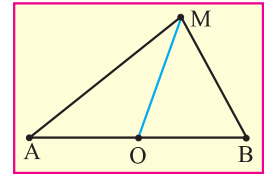
Άσκηση 17

Δίνονται τα σταθερά σημεία A, B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda$, (λ θετικός πραγματικός).

Λύση

Έστω O το μέσο του τμήματος AB .

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda &\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) = \lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OA}) = \lambda \Leftrightarrow \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 = \lambda \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow |\vec{MO}|^2 = \lambda + |\vec{OA}|^2 \Leftrightarrow |\vec{MO}|^2 = \lambda + \left(\frac{|\vec{AB}|}{2}\right)^2 \Leftrightarrow |\vec{MO}|^2 = \lambda + \frac{|\vec{AB}|^2}{4} \Leftrightarrow |\vec{MO}| = \sqrt{\lambda + \frac{|\vec{AB}|^2}{4}}.$$

Άρα το M απέχει από το σταθερό σημείο O σταθερή απόσταση $\sqrt{\lambda + \frac{|\vec{AB}|^2}{4}}$, δηλαδή

κινείται σε κύκλο με κέντρο O (το μέσο του AB) και ακτίνα $R = \sqrt{\lambda + \frac{|\vec{AB}|^2}{4}}$.

Άσκηση 18

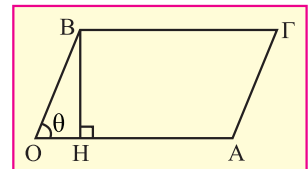
Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν

του παραλληλογράμμου $OAGB$ είναι: $E = \left(\vec{OA} \cdot \vec{OB} \right) \cdot \varepsilon\phi\theta = \sqrt{|\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2 - \left(\vec{OA} \cdot \vec{OB} \right)^2}$.

Λύση

Έστω E το εμβαδόν του $OAGB$. Είναι $E = |\vec{OA}| \cdot |\vec{BH}|$ (1)

Επίσης $\eta\mu\theta = \frac{|\vec{BH}|}{|\vec{OB}|} \Leftrightarrow |\vec{BH}| = |\vec{OB}| \cdot \eta\mu\theta$ (2)



Η (1) γίνεται σύμφωνα με τη (2): $E = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \eta\mu\theta = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

Άρα $E = (\vec{OA} \cdot \vec{OB}) \cdot \varepsilon\phi\theta$

Ακόμα έχουμε: $E = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \eta\mu\theta = \sqrt{|\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2} \cdot \eta\mu^2\theta = \sqrt{|\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2 (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)} =$

$$= \sqrt{|\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sqrt{|\vec{OA}|^2 \cdot |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

Άσκηση 19

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ με $AB \perp A\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να αποδείξετε τις σχέσεις:

$$\alpha. \overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta} \quad \beta. \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}, \text{ όπου } A\Delta \text{ ύψος}$$

$$\gamma. \overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma}^2 \quad (\text{Πυθαγόρειο Θεώρημα}).$$

Λύση

$$\alpha. \text{Είναι } \overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = (\overline{A\Delta} + \overline{\Delta B}) \cdot (\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}) =$$

$$\overline{A\Delta} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta} \cdot \overline{\Gamma B} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{\Gamma B} \stackrel{(\overline{A\Delta} \perp \overline{\Gamma B})}{=} 0 + \overline{A\Delta} \cdot \overline{\Gamma B} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{A\Gamma} =$$

$$= (\overline{A\Delta} + \overline{\Delta B}) \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} = \overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Delta B} \stackrel{\overline{AB} \perp \overline{A\Gamma}}{=} 0 + (-\overline{B\Gamma})(-\overline{B\Delta}) = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$$

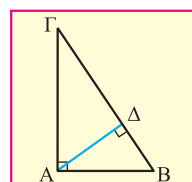
$$\beta. \text{Ομοίως αποδεικνύεται ότι } \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$$

$$\gamma. \text{Είναι } \overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta} = |\overline{B\Gamma}| \cdot |\overline{B\Delta}| = (B\Gamma)(B\Delta) \quad (1) \quad \left(\vec{B\Gamma} \uparrow \vec{B\Delta} \right)$$

$$\overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{A\Delta} = |\overline{B\Gamma}| \cdot |\overline{A\Delta}| = |\overline{B\Gamma}| \cdot |\overline{\Delta\Gamma}| = (B\Gamma)(\Delta\Gamma) \quad (2) \quad \left(\vec{B\Gamma} \uparrow \vec{\Delta\Gamma} \right)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = (B\Gamma)[(B\Delta) + (\Delta\Gamma)] = (B\Gamma) \cdot (B\Gamma) = (B\Gamma)^2 = |\overline{B\Gamma}|^2 = \overline{B\Gamma}^2.$$



Άσκηση 20

Μια ορθή γωνία στρέφεται γύρω από τη κορυφή της $A(1, 2)$. Οι πλευρές της τέμνουν τους άξονες x και y στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και έστω M το μέσο του $B\Gamma$. Να δείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία.

Λύση

Έστω ότι τα σημεία B και Γ έχουν συντεταγμένες $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(0, \gamma)$.

$$\text{Επειδή } \hat{A} = 1^\circ \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{A\Gamma} \text{ οπότε } \vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \vec{AB} = (\beta - 1, -2) \text{ και } \vec{A\Gamma} = (-1, \gamma - 2) \text{ και}$$

$$\text{η (1) γίνεται: } 1 - \beta - 2\gamma + 4 = 0 \Leftrightarrow \beta + 2\gamma = 5 \quad (2)$$

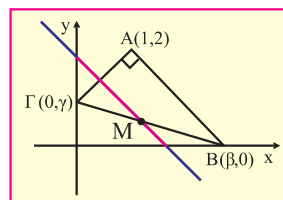
Το μέσο M του τμήματος $B\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{0 + \beta}{2}, \frac{\gamma + 0}{2} \right) = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \right) = (x_M, y_M).$$

$$\text{Διαιρώντας τη σχέση (2) με 2 έχουμε: } \frac{\beta}{2} + 2 \frac{\gamma}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Δηλαδή}$$

$$x_M + 2y_M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x_M + 4y_M = 5.$$

Άρα το M κινείται στην ευθεία $2x + 4y = 5$.



Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος)

α. Δίνονται τα σημεία Α (-5, -2), Β (3, -1), Γ (11, 0), τότε:

i. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

ii. Τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα: $M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$, $N\left(7, -\frac{1}{2}\right)$

iii. $\vec{MN} \cdot \vec{AG} = 0$

β. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = 12\vec{\alpha}$, $\vec{OB} = 6\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = 22\vec{\beta} - 32\vec{\alpha}$.

i. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά ii. $\left|\vec{AB}\right| = \frac{3}{8}\left|\vec{BG}\right|$ iii. $\left(\vec{AB}, \vec{BG}\right) = \pi$

γ. Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right|$, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση.

δ. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα. Τότε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ ή $\vec{\alpha}(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0$

ε. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = 2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2\right)$

στ. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει: $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$, τότε:

i. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{0}$

ii. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

iii. $\vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$

ζ. Αν $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, τότε:

i. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ii. $\left|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|$

iii. $\text{syn}\left(\left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right), \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)\right) = 0$

η. $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα

θ. Αν $\vec{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$, τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^\circ$

ι. Θεωρούμε δυο ίσα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε:

i. $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$

ii. $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$

iii. $\vec{\alpha} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$

κ. Αν $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3\vec{\beta}^2$

λ. Αν $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3\vec{\beta}^2$, τότε: $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$

μ. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει: $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 3\vec{\beta}^2$

ν. Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι κάθετα. Τότε: $(\vec{x} + \vec{y})\vec{x} = \vec{x}^2$

2. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta}(\sqrt{3}, 3)$

3. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$

4. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\theta} = (\vec{a}, \vec{\beta})$ να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2 \left| \eta\mu \frac{\theta}{2} \right|$

(Υπ: Να υπολογίσετε το $|\vec{a} - \vec{\beta}|^2$)

5. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ να δείξετε ότι $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$.

(Υπ: Υψώστε τις δοσμένες σχέσεις στο τετράγωνο)

6. Να δείξετε ότι οι φορείς των διανυσμάτων $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{\beta} = -6\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{\gamma} = -4\vec{i} + 7\vec{j}$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(Απ: Είναι $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$)

7. Έστω $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\overline{AB} \perp \overline{A\Gamma}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ είναι το ύψος του. Αποδείξτε ότι $(A\Delta)^2 = (\Delta B) \cdot (\Delta \Gamma)$.

(Υπ: $(A\Delta)^2 = |\overline{A\Delta}|^2 = \overline{A\Delta}^2 = \overline{A\Delta} \cdot \overline{A\Delta} = \dots$)

Ε. ΤΟ ΕΞΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε: $\text{προβ.}_{\vec{\beta}} \vec{a} = 4\vec{\beta}$ και $4 \cdot \text{προβ.}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \vec{a}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2\beta^2$ β. Να βρείτε το λογο: $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$

γ. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$ δ. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα

$\vec{u}_1 = \vec{a} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u}_2 = \vec{a} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

(Απ.: β. 4, γ. $\frac{\pi}{3}$, δ. $\lambda = -\frac{1}{25}$)

Μύθημα 2

Συντεταγμένες στο επίπεδο

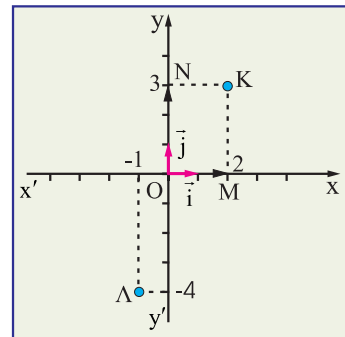
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Σύστημα συντεταγμένων

Ένα σύστημα δυο κάθετων αξόνων με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα, $\vec{i}$ και $\vec{j}$ λέμε ότι αποτελεί ένα **καρτεσιανό σύστημα αξόνων** (ορθοκανονικό όταν τα μοναδιαία είναι ισομήκη).

Ο οριζόντιος άξονας $x'x$ ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος άξονας $y'y$ ονομάζεται **άξονας των τεταγμένων**.

Οι προβολές τυχαίου σημείου, έστω K , του επιπέδου ορίζουν στους δύο άξονες $x'x$, $y'y$ τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ αντίστοιχα.



Τα διανύσματα αυτά είναι συγγραμμικά προς τα μοναδιαία $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{ON} = y \cdot \vec{j}$$

Ο αριθμός x ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου K και ο αριθμός y ονομάζεται **τεταγμένη** του σημείου K . Η τετμημένη και η τεταγμένη ονομάζονται **συντεταγμένες** του K .

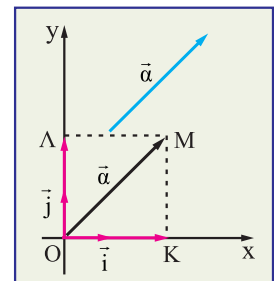
Γραμμικός συνδυασμός

Οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός

συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και μάλι-

στα με μοναδικό τρόπο. Για το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του διπλανού

σχήματος ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$

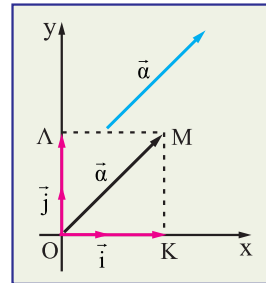


Συντεταγμένες διανύσματος

Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}$ και $y \cdot \vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του $\vec{OM}$ και οι πραγματικοί αριθμοί x και y λέγονται **συντεταγμένες** του

$\vec{OM}$ και γράφουμε: $\vec{OM} = \vec{\alpha} = (x, y)$.

Επομένως, **το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες ίσες με τις συντεταγμένες του τέλους του.**



Ισότητα διανυσμάτων

Δύο διανύσματα είναι ίσα, αν και μόνο αν, έχουν ίσες τις ομώνυμες συντεταγμένες τους.

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανύσματος

Για τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

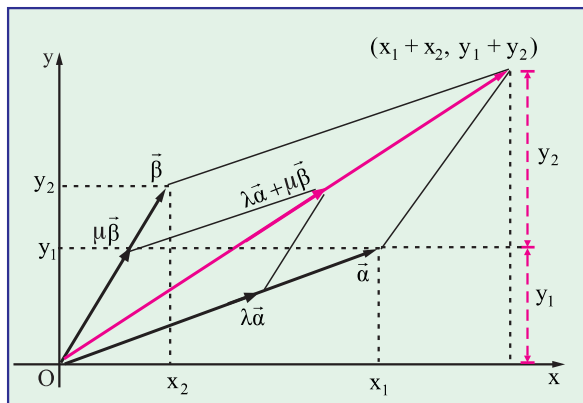
ισχύουν:

$$\bullet \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\bullet \lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.



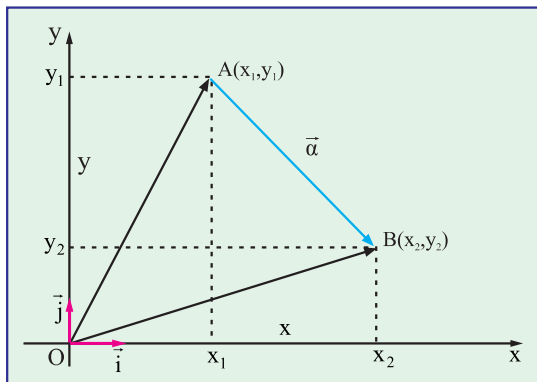
Συντεταγμένες διανύσματος συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του

Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{AB} = (x, y)$ με

$A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε ισχύει:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Δηλαδή, **κάθε μια απο τις συντεταγμένες ενός διανύσματος είναι ίση με τη διαφορά των ομώνυμων συντεταγμένων των άκρων (τέλους - αρχής).**

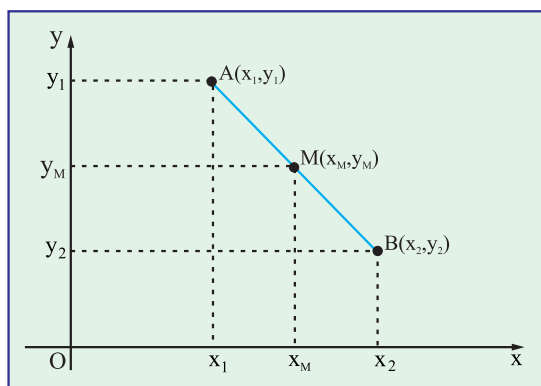


Συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του.

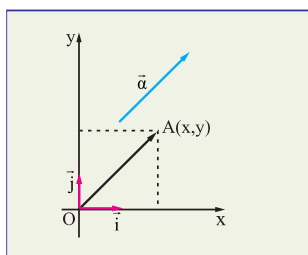
Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου και $M(x_M, y_M)$ το μέσον του.

Αποδεικνύεται ότι:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

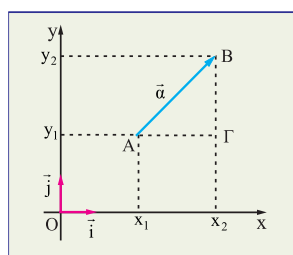


Μέτρο διανύσματος



Το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$

έχει μέτρο $|\vec{a}| = |\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ έχει μέτρο

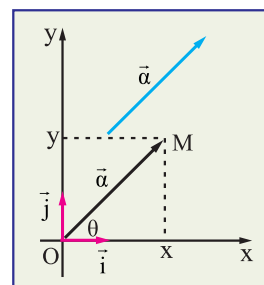
$$|\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος ονομάζουμε το πηλίκο της τεταγμένης y προς την τεταγμένη x και γράφουμε:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \tan \theta, \quad \text{αν } x \neq 0$$

Για τα διανύσματα τα παράλληλα στον άξονα $y'y$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.



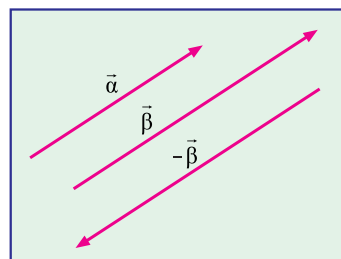
Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ του επιπέδου ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Αν τα διανύσματα έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_α ,

λ_β τότε: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_\alpha = \lambda_\beta$.



B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων γίνεται και γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των συντεταγμένων τους. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες παραμέτρους, που μας δίνονται με τα διανύσματα. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και όταν μας ζητούν να γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό γνωστών διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4\lambda + 3, \lambda^2 - 3\lambda)$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες είναι:

α. $\vec{\alpha} = \vec{0}$

β. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // \vec{x}'\vec{x}$

γ. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // \vec{y}'\vec{y}$

Λύση

α. Είναι το διάνυσμα μηδενικό, αν και μόνο αν κάθε μία από τις συντεταγμένες του είναι ίση με το 0. Δηλαδή,

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3 \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // \vec{x}'\vec{x} \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 \neq 0$ και $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq 3)$ και $(\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 3) \Leftrightarrow \lambda = 0$

γ. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // \vec{y}'\vec{y} \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ και $\lambda^2 - 3\lambda \neq 0$ και $\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda = 3)$ και $(\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 3) \Leftrightarrow \lambda = 1$

Παράδειγμα 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = 10\vec{i} + 4\vec{j}$. Να γράψετε το διάνυσμα αυτό ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, όπου $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ και $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$

Λύση

Θα προσδιορίσουμε πραγματικούς αριθμούς λ και κ τέτοιους ώστε να ισχύει: $\vec{\alpha} = \lambda\vec{u} + \kappa\vec{v}$
Είναι:

$$\vec{\alpha} = \lambda\vec{u} + \kappa\vec{v} \Leftrightarrow 10\vec{i} + 4\vec{j} = \lambda(2\vec{i} - \vec{j}) + \kappa(\vec{i} + 4\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \kappa = 10 \\ -\lambda + 4\kappa = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ και } \lambda = 4$$

Επομένως, $\vec{\alpha} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$.

Παράδειγμα 3

Δίνονται τα σημεία A(0,3), B(1, -4) και Γ(2,5). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες σημείου M του επιπέδου για το οποίο ισχύει: $\vec{AB} = -2\vec{MG}$

Λύση

Έστω $M(x,y)$, τότε είναι $\vec{AB} = (1, -7)$ και $\vec{MG} = (2-x, 5-y)$, οπότε

$$\vec{AB} = -2\vec{MG} \Leftrightarrow (1, -7) = (2x-4, 2y-10) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=1 \\ 2y-10=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Επομένως, $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν μας δίνεται παραλληλία διανυσμάτων ή όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι κάποια έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ διανύσματα είναι παράλληλα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

- i. $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- ii. $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
- iii. $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$, όπου $\lambda_{\vec{\alpha}}, \lambda_{\vec{\beta}}$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, x)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι: i. ομόρροπα ii. αντίρροπα.

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \text{ με } \lambda > 0 \text{ και } \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \text{ με } \lambda < 0$$

i. Αν $x = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (4, 2) = 2(2, 1) = 2\vec{\beta}$. Άρα $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ii. Αν $x = -2$ τότε $\vec{\alpha} = (4, -2) = -2\vec{\beta}$. Άρα $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Στις ασκήσεις που αναφέρονται σε συνευθειακά σημεία, θεωρούμε δύο από τα έξι διανύσματα που ορίζουν τα σημεία αυτά και χρησιμοποιούμε τη συνθήκη παραλληλίας, ή ότι η ορίζουσα των συντεταγμένων τους είναι ίση με το μηδέν.

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τα διανύσματα:

$$\vec{OA} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{OB} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \text{ και } \vec{OG} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

Για τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{BG}$ έχουμε: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$$\text{και } \vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta} - (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\vec{BG} = -3(-\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -3\vec{AB}$ που σημαίνει ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. (Οι φορείς τους είναι παράλληλες ευθείες με κοινό σημείο)

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Στο επόμενο σχήμα να γράψετε τους συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων: $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{E\Gamma}$

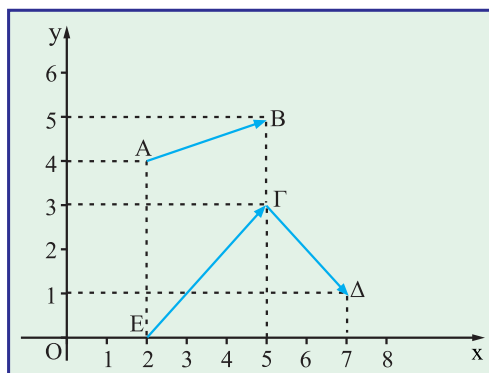
Λύση

Είναι A (2, 4), B (5, 5), Γ (5, 3), Δ (7, 1) και E (2, 0) οπότε

$$\vec{AB} = (3, 1), \vec{\Gamma\Delta} = (2, -2), \vec{E\Gamma} = (3, 3) \text{ και}$$

οι συντελεστές διεύθυνσης είναι:

$$\lambda_{\vec{AB}} = \frac{1}{3}, \lambda_{\vec{\Gamma\Delta}} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ και } \lambda_{\vec{E\Gamma}} = \frac{3}{3} = 1$$

**Άσκηση 2**

Δίνονται τα σημεία A (2, 0), B (-1, 2) και Γ (-3, -3). Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών και το μήκος της διαμέσου που άγεται από την κορυφή A του τριγώνου ABΓ.

Λύση

Στο σχήμα που ακολουθεί παραστήσαμε τα σημεία A, B και Γ. Είναι:

$$\vec{AB} = (-1 - 2, 2 - 0) = (-3, 2)$$

$$\vec{B\Gamma} = (-3 + 1, -3 - 2) = (-2, -5)$$

$$\vec{A\Gamma} = (-3 - 2, -3 - 0) = (-5, -3)$$

Οπότε τα αντίστοιχα μήκη είναι:

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$B\Gamma = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

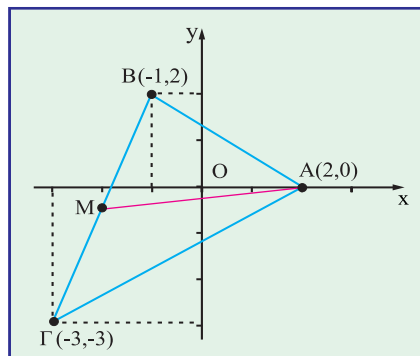
$$AG = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς

$$BG \text{ είναι: } M\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$$

Άρα, $\vec{AM} = \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ και το μήκος του είναι:

$$|\vec{AM}| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$



Άσκηση 3

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο M τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB}, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του M συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων A και B.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε είναι: $\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ και

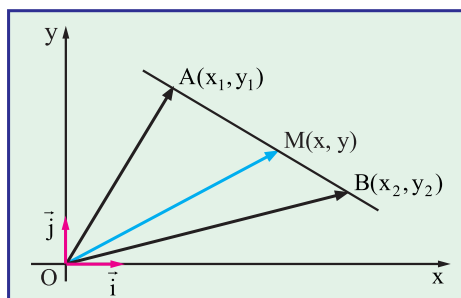
$$\vec{MB} = (x_2 - x, y_2 - y) \text{ οπότε: } \vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB} \Leftrightarrow$$

$$(x - x_1, y - y_1) = \lambda \cdot (x_2 - x, y_2 - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x) \text{ και } y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ και } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \text{ με } \lambda \neq -1$$

Σχόλιο: Για $\lambda = 1$ παίρνουμε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB.



Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να προσδιορίσετε διάνυσμα που να έχει μέτρο 125 και να είναι

- i. αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ ii. ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{\beta} = (4, 3)$

(Υπ: Έστω $\vec{u} = (x, y)$ το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε $\vec{u} \uparrow \downarrow \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$ με $\lambda < 0$

και $\vec{u} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ με $\lambda > 0$ i. $\vec{u} = (-75, 100)$ ii. $\vec{u} = (100, 75)$)

2. Σ' ένα σύστημα συντεταγμένων, οι τετμημένες των σημείων A και B είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 6\lambda + 11) \cdot x - 2002 = 0$. Να βρείτε το λ , ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη ίση με 3.

(Υπ: Χρησιμοποιήστε τον τύπο που δίνει το άθροισμα των ριζών τριωνόμου. Είναι $\lambda = 5$ ή $\lambda = 1$)

3. Δίνονται τα σημεία $A(3,0)$ και $B(4,2)$. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ του παραλληλογράμμου $OAB\Gamma$ όπου O το σημείο $O(0,0)$.

(Απ: $\Gamma(1,2)$)

4. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(-1,3)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-3,5)$ είναι συνευθειακά.

(Υπ: Δείξτε $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$)

5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 3)$ και $\vec{\beta} = (3, x)$ να είναι ομόρροπα.

(Απ: $x = 3$)

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με: $A(0,4)$, $B(-2,0)$, $\Gamma(5,0)$ και σημείο Σ της $B\Gamma$ είναι τέτοιο ώστε $3\vec{B\Sigma} - 4\vec{\Sigma\Gamma} = \vec{0}$.

α. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{A\Sigma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{A\Sigma}$

(Απ: α. $\vec{A\Sigma} = \frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{A\Gamma}$ β. $x = \frac{-38}{21}$, $y = \frac{-328}{21}$)

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

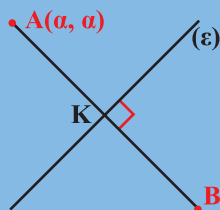
α. Να προσδιορίσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, \mu + 1)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda, -3\mu + 2)$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά προς τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (-2, 4)$ και $\vec{\delta} = (1, 5)$ αντίστοιχα.

β. Διάνυσμα με αρχή την αρχή των συντεταγμένων, έχει τετμημένη -3 και συντελεστή διεύθυνσης -1 . Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει το πέρας του.

(Υπ.: α. Χρησιμοποιείτε τη συνθήκη παραλληλίας, β. Πρέπει να έχει ετερόσημες συντεταγμένες)

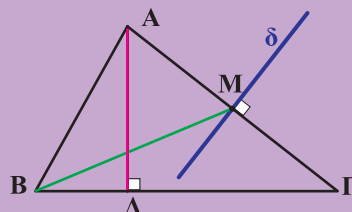
5^ο μάθημα

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας



4^ο μάθημα

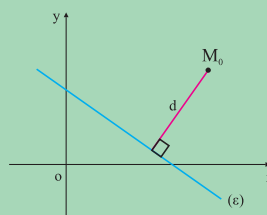
Η ευθεία στο επίπεδο



2^ο Κεφάλαιο

6^ο μάθημα

Απόσταση σημείου από ευθεία



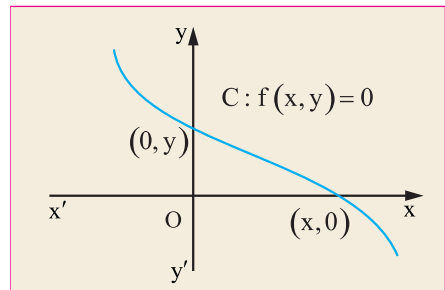
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Μια εξίσωση $f(x, y) = 0$ με δύο αγνώστους x, y λέγεται **εξίσωση μιας γραμμής C** όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνον αυτές την επαληθεύουν. Τότε γράφουμε $C : f(x, y) = 0$.

Παρατηρήσεις

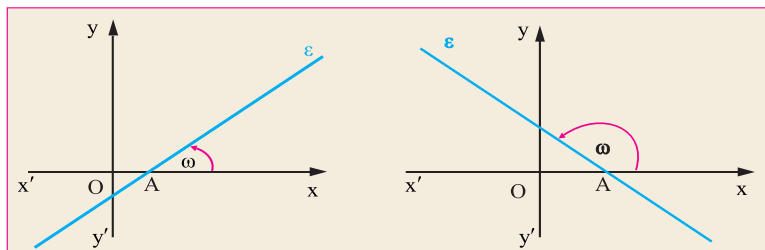
1. Το σημείο $P(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραμμή C ή ισοδύναμα η γραμμή C διέρχεται από το σημείο $P(\alpha, \beta)$, αν και μόνο αν, τα α, β επαληθεύουν την εξίσωση C , δηλ. $f(\alpha, \beta) = 0$.
2. Η γραμμή C τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ σε σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι λύσεις των εξισώσεων $f(x, 0) = 0$ και $f(0, y) = 0$ αντίστοιχα.
Με άλλα λόγια, για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $x'x$ μια γραμμή, θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$ και λύνουμε ως προς το x , ενώ για να βρούμε που τέμνει τον $y'y$ θέτουμε $x = 0$ στον τύπο της και λύνουμε ως προς το y .



3. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής δύο γραμμών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

Ορισμός

Έστω Oxy σύστημα συντεταγμένων και (ε) μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει με την ευθεία (ε) τη λέμε γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

Ορίζουμε ως **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας** (ε) την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

Παρατηρήσεις

1. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda = \varepsilon\theta = 0$.
2. Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον $y'y$, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) δεν ορίζεται.
3. Σε κάθε περίπτωση για την γωνία ω ισχύει $0 \leq \omega < \pi$.

4. Όταν μια ευθεία (ε) και ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_A, y_A)$ και

$B(x_B, y_B)$ με $x_A \neq x_B$ είναι $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ενώ αν $x_A = x_B$ ο συντελεστής διεύθυνσης λ δεν ορίζεται.

6. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τότε:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Εξίσωση ευθείας

α. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή

διεύθυνσης λ είναι:

$$\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

β. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$

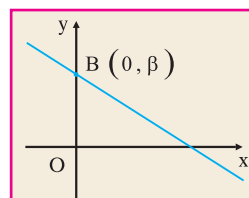
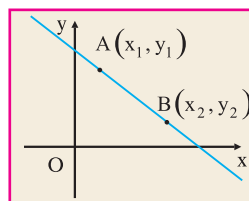
και $B(x_2, y_2)$ με $A \neq B$.

Αν $x_1 \neq x_2$ ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ οπότε είναι:

$$\varepsilon: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο

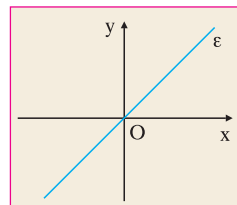
$(0, \beta)$ είναι $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$



όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε)

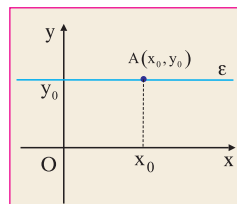
- δ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ και δεν είναι ο άξονας $y'y$ είναι:

$$\varepsilon: y = \lambda x$$



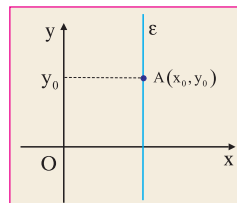
- ε. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι:

$$\varepsilon: y = y_0$$



- στ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ είναι:

$$\varepsilon: x = x_0$$



B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης ευθείας χρειαζόμαστε:

- τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$ ή
- δύο σημεία της ευθείας ή
- παράλληλία ή καθετότητα της ευθείας με μια άλλη ευθεία.

Αν γνωρίζουμε την εξίσωση μιας ευθείας, ο συντελεστής διεύθυνσης λ είναι ο συντελεστής του x , όταν η εξίσωση είναι λυμένη ως προς y , για παράδειγμα η ευθεία

$$3x + 2y = 5 \text{ γίνεται: } y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \text{ και έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης ευθείας (ε) η οποία:

- Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$.
- Διέρχεται από τα σημεία: $A(3, 1)$, $B(6, 5)$
- Διέρχεται από τα σημεία: $A(5, 1)$, $B(-3, 1)$
- Διέρχεται από τα σημεία: $A(6, 1)$, $B(6, -4)$
- Είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $y = 2x + 1$.
- Είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $2x + y = 4$

Λύση

α. Προφανώς $\lambda = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$.

β. Αφού γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας με διαφορετικές τετμημένες χρησιμοποιούμε

$$\text{τον τύπο: } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε: } \lambda_\varepsilon = \frac{5-1}{6-3} = \frac{4}{3}.$$

γ. Είναι $\lambda = \frac{-1-1}{-3-5} = 0$. Δηλαδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον $x'x$.

δ. Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, αφού $x_A = 6$ και $x_B = 6$.

ε. Η ευθεία (ζ) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = 2$.

$$\text{Επειδή } (\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$$

στ. Είναι $\lambda_\eta = -2$. Επομένως $\lambda_\varepsilon = -2$, αφού είναι παράλληλες.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (ε) χρειαζόμαστε:

α. Τις συντεταγμένες ενός σημείου της και το συντελεστή διεύθυνσής της ή

β. Τις συντεταγμένες δύο σημείων της.

Οι συντεταγμένες σημείου που ανήκει σε δύο ευθείες προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών.

Παράδειγμα 1

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία στις παρακάτω περιπτώσεις

i. A (1, 2) και B (1, -3)

ii. A (1, 2), B (-3, 2)

iii. A (1, 2) και B (-2, 4)

Λύση

i. Τα σημεία A, B έχουν ίδια τετμημένη $x = 1$ οπότε η εξίσωση της ευθείας AB είναι $x = 1$.

ii. Τα σημεία A, B έχουν ίδια τεταγμένη $y = 2$ οπότε η εξίσωση της ευθείας AB είναι $y = 2$.

iii. Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{-2-1} = -\frac{2}{3}$ οπότε η εξίσωση της ευθείας AB είναι $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

Παράδειγμα 2

Οι κορυφές του τριγώνου ABΓ είναι A (-1, 2), B (3, 4), Γ (-5, 6). Να βρεθούν:

α. Η εξίσωση του ύψους v_a .

β. Η εξίσωση της διαμέσου μ_a .

γ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου δ της πλευράς BG του τριγώνου.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι το ύψος v_a διέρχεται από το σημείο A (-1, 2) και μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσής του λ_{v_a} αφού $BG \perp v_a$.

Είναι $\lambda_{BG} = \frac{6-4}{-5-3} = -\frac{1}{4}$ και $\lambda_{BG} \cdot \lambda_{v_a} = -1$ οπότε

$\lambda_{v_a} = 4$. Έτσι η εξίσωση του v_a είναι:

$$y - 2 = 4(x + 1) \Leftrightarrow y = 4x + 6$$

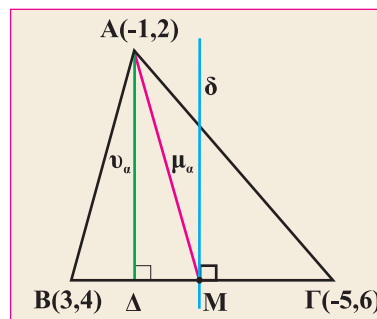
β. Η διάμεσος μ_a διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα δεύτερο σημείο της το μέσο M του $B\Gamma$.

$$\text{Είναι } M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right) = (-1, 5)$$

Τα σημεία $A(-1, 2)$ και $M(-1, 5)$ έχουν ίδια τετμημένη $x = -1$, οπότε η εξίσωση της μ_a είναι: $x = -1$.

γ. Η μεσοκάθετος δ του $B\Gamma$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 5)$ και μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ_δ αυτής, αφού $\delta \perp v_a$.

Είναι $\lambda_{v_a} = 4 = \lambda_\delta$. Έτσι η εξίσωση της δ είναι: $y - 5 = 4(x + 1) \Leftrightarrow y = 4x + 9$



Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (ϵ) που διέρχεται από γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ και έχει μία επιπλέον ιδιότητα, γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $P(x_0, y_0)$:

$$\delta: x = x_0 \text{ και } \eta: y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

i. Εξετάζουμε αν η γνωστή ευθεία $\delta: x = x_0$ έχει ή όχι την αναφερόμενη ιδιότητα.

ii. Απαιτούμε οι ευθείες (η) να έχουν την ιδιότητα και έτσι προσδιορίζουμε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $M(1, 4)$ τέμνει τις ευθείες $\delta_1: y = -x + 4$, $\delta_2: y = 2x + 3$ στα A, B αντίστοιχα έτσι ώστε το M να είναι μέσο του AB .

Λύση

Οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $M(1, 4)$ είναι οι:

$$\delta: x = 1 \text{ ή } \eta: y - 4 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow y = \lambda x + 4 - \lambda$$

$$\text{Έστω } A \text{ το σημείο τομής των: } \begin{cases} \delta: x = 1 \\ \delta_1: y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ Τότε } A(1, 3)$$

Έστω B το σημείο τομής των: $\begin{cases} \delta: x=1 \\ \delta_2: y=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$, τότε B (1, 5)

Ισχύει $2x_M = x_A + x_B$ και $2y_M = y_A + y_B$ οπότε M μέσον του AB και η ευθεία $\delta: x=1$ είναι λύση του προβλήματος.

Έστω A το σημείο τομής των η και δ_1 :

$$\begin{cases} \eta: y = \lambda x + 4 - \lambda \\ \delta_1: y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x + 4 - \lambda = -x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \lambda \neq -1 \\ y = -x + 4 \end{cases} \text{ Άρα } x_A = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \lambda \neq -1$$

Έστω B το σημείο τομής των :

$$\begin{cases} \eta: y = \lambda x + 4 - \lambda \\ \delta_2: y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x + 4 - \lambda = 2x + 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}, \lambda \neq 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \text{ Άρα } x_B = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}, \lambda \neq 2$$

Αφού το M είναι μέσον του AB πρέπει να ισχύει :

$$2x_M = x_A + x_B \Leftrightarrow 2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2} \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow -4 = -1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Αν $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$ θα είναι $\eta // \delta_1$ ή $\eta // \delta_2$ και δεν υπάρχουν σημεία τομής.

Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι $x = 1$.

Παρατήρηση :

Αφού βρήκαμε την ευθεία $x = 1$ μπορούσαμε να αποκλείσουμε την ύπαρξη άλλης ευθείας διότι, αν υπήρχε κι άλλη ευθεία που θα έτεμνε τις δ_1, δ_2 σε σημεία Γ, Δ με M μέσο του $\Gamma\Delta$ το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα ήταν παραλληλόγραμμο. Πράγμα που δεν γίνεται αφού οι δ_1, δ_2 δεν είναι παράλληλες. Η παραπάνω απόδειξη έγινε για διδακτικούς λόγους.

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η κάθεμία από τις παρακάτω ευθείες:

α. Η ευθεία που περνά από τα σημεία A(-3, 2), B(-7, 6).

β. Η ευθεία που περνά από τα σημεία A(10, 1), B(-10, 1).

γ. Η ευθεία που είναι κάθετη προς την ευθεία (ζ): $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 1$.

δ. Η ευθεία που περνά από τα σημεία A(7, 3), B(7, 1).

ε. Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο A(-2, -2).

Λύση

α. $\lambda = \frac{6-2}{-7+3} = \frac{4}{-4} = -1$. Η ζητούμενη γωνία είναι $\hat{\varphi} = \frac{3\pi}{4}$, αφού $\varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -1$.

β. Είναι $\lambda = \frac{1-1}{-10-10} = 0$. Επομένως $\hat{\phi} = 0^\circ$ αφού $\epsilon\phi 0^\circ = 0$.

γ. $\lambda_\zeta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή $(\epsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\epsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\epsilon \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_\epsilon = \sqrt{3}$. Άρα $\hat{\phi} = 60^\circ$.

δ. Παρατηρούμε ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία (ϵ) . Επομένως είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και η γωνία που μας ζητείται είναι: $\hat{\phi} = 90^\circ$

ε. Είναι $\lambda = \frac{-2-0}{-2-0} = 1$. Επομένως: $\hat{\phi} = 45^\circ$ αφού $\epsilon\phi 45^\circ = 1$

Άσκηση 2.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και:

α. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, 2)$

β. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (0, 6)$

γ. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α. Το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\frac{2}{5}$. Επομένως: $\lambda_\epsilon = \frac{2}{5}$.

Η ευθεία (ϵ) διέρχεται από το γνωστό σημείο $A(1, 3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\epsilon = \frac{2}{5}$.

Άρα έχει εξίσωση $(\epsilon): y - 3 = \frac{2}{5}(x - 1)$.

β. Είναι: $\vec{\beta} // y'y$. Επομένως $(\epsilon) // y'y$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ έχει εξίσωση: $x = 1$.

γ. Αφού η (ϵ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής: $y = \lambda x$. Επίσης διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, επομένως οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.

Έτσι: $3 = \lambda \cdot 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Άρα $(\epsilon): y = 3x$.

Άσκηση 3.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -1)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(2, 7)$.

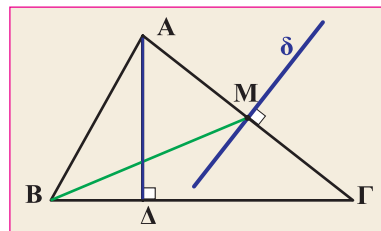
Να βρείτε τις εξισώσεις:

α. Της πλευράς $B\Gamma$.

β. Του ύψους $A\Delta$

γ. Της διαμέσου BM

δ. Της μεσοκαθέτου της πλευράς $A\Gamma$



Λύση

α. Γνωρίζουμε δύο σημεία της $B\Gamma$. Βρίσκουμε το $\lambda_{B\Gamma}$ από τον τύπο: $\lambda = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}$ και από

τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, την εξίσωσή της.

Είναι: $\lambda_{BG} = \frac{7-1}{2-4} = -3$. Επομένως BG: $y - 1 = -3(x - 4)$.

β. Γνωρίζουμε ένα σημείο του ύψους ΑΔ το Α και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης λ διότι $AD \perp BG$. Είναι: $\lambda_{BG} = -3$.

$$AD \perp BG \Leftrightarrow \lambda_{AD} \cdot \lambda_{BG} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AD} \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AD} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως AD: $y + 1 = \frac{1}{3} \cdot (x - 2)$.

γ. Γνωρίζουμε το σημείο της Β της διαμέσου και μπορούμε να υπολογίσουμε το Μ ως μέσον της ΑΓ.

$$\text{Είναι: } M\left(\frac{x_A + x_G}{2}, \frac{y_A + y_G}{2}\right) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (2, 3).$$

Επομένως, $\lambda_{BM} = \frac{3-1}{2-4} = -1$ και η εξίσωση της BM είναι: $y - 1 = -1(x - 4)$.

δ. Γνωρίζουμε το σημείο Μ της μεσοκαθέτου και υπολογίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ_δ από την καθετότητά της με την ΑΓ.

Παρατηρούμε ότι για την ΑΓ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, δηλαδή $AG \parallel y'$.

Επειδή $\delta \perp AG$ θα είναι $\delta \parallel x'$ και αφού περνά από το σημείο $M(2, 3)$ έχει εξίσωση: $y = 3$.

Άσκηση 4.

Να δείξετε ότι τα σημεία $A(-1, -2)$, $B(3, -1)$, $\Gamma(4, 2)$, $\Delta(0, 1)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του Κ.

Λύση

$$\text{Είναι } \lambda_{AB} = \frac{-1+2}{3+1} = \frac{1}{4} \text{ και } \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1-2}{0-4} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως $AB \parallel \Gamma\Delta$.

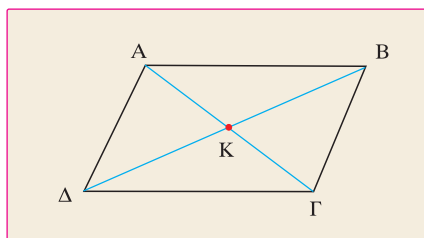
$$\text{Ακόμα } (AB) = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{17} \text{ και}$$

$$(\Gamma\Delta) = \sqrt{(0-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επομένως είναι παραλληλόγραμμο. Το κέντρο του Κ είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.

Άρα:

$$K\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$



Άσκηση 5.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $\Gamma(-5, -15)$ είναι συνευθειακά.

β. Το ίδιο για τα σημεία $A(5, -4)$, $B(-2, 3)$, $\Gamma(t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

γ. Το ίδιο για τα σημεία $A(1, 3)$, $B(1, -2)$, $\Gamma(1, 1)$.

Λύση

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε:

i. $\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{B\Gamma}$ ή $\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB}$ (αν ορίζονται οι αντίστοιχοι συντελεστές).

ii. Ένα από τα τρία σημεία ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο.

iii. Δύο από τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{B\Gamma}$ είναι συγγραμμικά.

α. $\lambda_{AB} = 3$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{-18}{-6} = 3$. Άρα $AB \parallel A\Gamma$ και αφού έχουν κοινό το σημείο A , ταυτίζονται.

Συνεπώς τα A, B, Γ συνευθειακά.

β. Επειδή $\lambda_{AB} = \frac{-7}{7} = -1$ η AB έχει εξίσωση: $y + 4 = -1(x - 5) \Leftrightarrow y = -x + 1$.

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Γ στην εξίσωση της AB και παρατηρούμε ότι την επαληθεύουν, αφού: $1 - t = -t + 1$. Επομένως το Γ ανήκει στην ευθεία AB .

γ. Τα τρία σημεία έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα βρίσκονται επάνω στην ευθεία $x = 1$.

Άσκηση 6.

Δίνεται η ευθεία (ε) : $y = x + 1$ και το σημείο $A(3, 1)$. Να βρείτε:

α. Την προβολή του A πάνω στην (ε) .

β. Το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε) .

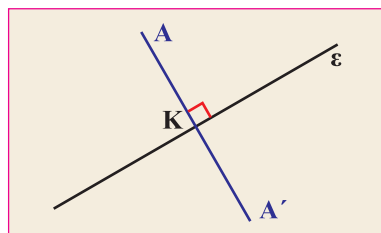
Λύση

α. Είναι $\lambda_{\varepsilon} = 1$. Επειδή $AK \perp \varepsilon$ θα είναι $\lambda_{AK} = -1$.

Επομένως AK : $y - 1 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 4$.

Το σημείο K είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και AK και το βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = -x + 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \text{ και } x = \frac{3}{2}. \text{ Άρα: } K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



β. Το K είναι μέσο του AA' . Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} x_K = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_{A'} = 2x_K - x_A \\ y_{A'} = 2y_K - y_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_{A'} = 0 \text{ και } y_{A'} = 4. \text{ Άρα } A'(0, 4).$$

Άσκηση 7

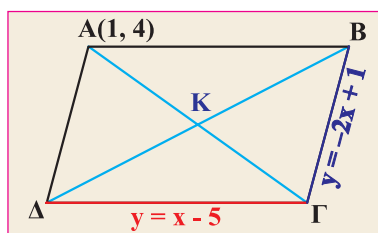
Δίνονται οι εξισώσεις δύο πλευρών παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, $(\varepsilon_1): y = x - 5$ και $(\varepsilon_2): y = -2x + 1$, καθώς και οι συντεταγμένες μίας κορυφής του $(1, 4)$. Να βρείτε:

α. Τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών.

β. Τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου $(1, 4)$, δεν επαληθεύουν καμμία από τις εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2) , δηλαδή το σημείο $(1, 4)$ δεν ανήκει σε αυτές τις ευθείες. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το δοσμένο σημείο είναι το Α και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι οι ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα.



Λύνουμε το σύστημά τους για να βρούμε το Γ:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = -3, \text{ άρα } \Gamma(2, -3).$$

Γνωρίζουμε το σημείο Α της ΑΒ και το συντελεστή διεύθυνσής της $\lambda = 1$ (αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\lambda_{\Gamma\Delta} = 1$). Άρα

$$AB: y - 4 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 3.$$

Λύνουμε το σύστημα των ΑΒ και ΒΓ και βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Β:

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = x + 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ και } y = \frac{7}{3}. \text{ Άρα } B\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Γνωρίζουμε το σημείο Α $(1, 4)$ της ΑΔ και το συντελεστή διεύθυνσής της $\lambda = -2$. Επομένως:

$$AD: y - 4 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 6.$$

Το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου είναι το μέσον του ΑΓ, άρα: $K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Το Κ είναι επίσης μέσο του ΒΔ, άρα:

$$\begin{aligned} x_K &= \frac{x_B + x_A}{2} \Leftrightarrow x_A = 2x_K - x_B = 2 \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{3} \\ y_K &= \frac{y_B + y_A}{2} \Leftrightarrow y_A = 2y_K - y_B = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}. \text{ Άρα } A\left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που περνούν από το σημείο $M(2, 3)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{1}{2}$.

Λύση

Όλες οι ευθείες που περνούν από το $M(2, 3)$ έχουν εξισώσεις:

$$y - 3 = \lambda(x - 2), \lambda \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Η ευθεία $x = 2$ δεν είναι λύση της άσκησης, αφού είναι κάθετη στον $x'x$ και δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

Έτσι χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1). Η ευθείες που αυτή παριστάνει, τέμνουν τους άξονες στα σημεία A και B.

Για $y = 0$ παίρνουμε από την (1) :

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{2\lambda - 3}{\lambda} \quad \lambda \neq 0, \quad \text{επομένως } A\left(\frac{2\lambda - 3}{\lambda}, 0\right)$$

(Για $\lambda = 0$ η ευθεία είναι παράλληλη στον $x'x$).

Για $x = 0$ παίρνουμε από την (1) :

$$(1) \Leftrightarrow y = -2\lambda + 3, \quad \text{επομένως } B(0, -2\lambda + 3)$$

Το τρίγωνο BOA είναι ορθογώνιο και το εμβαδόν του ισούται με το ημιγινόμενο των

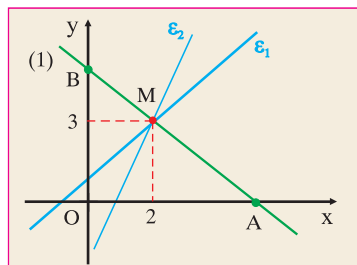
καθέτων πλευρών. Άρα $(BOA) = \frac{1}{2} (OA) \cdot (OB)$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{|2\lambda - 3|}{|\lambda|} |-2\lambda + 3| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2\lambda - 3|^2 = |\lambda| \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = \lambda \\ \text{ή} \\ 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 - 13\lambda + 9 = 0 \quad (2) \\ \text{ή} \\ 4\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Η εξίσωση (2) έχει λύσεις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 9/4$ και η (3) είναι αδύνατη.

Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι

$$(\varepsilon_1): y - 3 = 1(x - 2) \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y - 3 = \frac{9}{4}(x - 2)$$



Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα σημεία A $(2\alpha - 1, 3)$ και B $(5, -2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB, όταν $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{A\pi:}) \text{ Αν } \alpha \neq 3 \text{ είναι } \lambda_{AB} = \frac{5}{2\alpha - 6} \text{ και } AB: y + 2 = \frac{5}{2\alpha - 6}(x - 5). \text{ Αν } \alpha = 3 \text{ τότε } AB: x = 5$$

2. Δίνονται τα σημεία $P\left(\kappa, \frac{1}{\kappa}\right)$ και $Q\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}\right)$ με $\kappa, \lambda \neq 0$ και $\kappa \neq \lambda$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας PQ.

ii. Αν η ευθεία PQ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα να δείξετε ότι $AP = BQ$.

$$(\mathbf{A\pi:}) \text{ i. } \lambda_{PQ} = \frac{-1}{\kappa\lambda} \text{ και } PQ: y - \frac{1}{\kappa} = \frac{-1}{\kappa\lambda}(x - \kappa) \text{ ii. } A\left(\kappa + \lambda, 0\right) \quad B\left(0, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa}\right)$$

$$(AP) = (BQ) = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\kappa^2}}$$

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = -x + 2$ εξισώσεις δύο εκ των υψών του και A (1, 4).

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του καθώς και οι κορυφές του B και Γ.

$$(\text{Απ: } \text{ΑΓ: } y = -2x + 6, \text{ ΒΓ: } y = -\frac{2}{7}(x+3), \text{ AB: } y = x + 3, \text{ B } (-3, 0), \text{ Γ } (4, -2))$$

4. Στο τρίγωνο ABΓ είναι A (-8, 2) και B (7, 4) οι δύο κορυφές του ενώ H (5, 2) το ορθόκεντρό του. Βρείτε: i. την εξίσωση της ΒΓ ii. τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

$$(\text{Απ: i. AH: } y = 2 \text{ όπου ΒΓ: } x = 7 \text{ ii. Γ } (7, -13))$$

5. Δίνεται η ευθεία ε: $y = 1 - x$. Να βρεθεί το συμμετρικό του P (2, 3) ως προς την ευθεία ε.

$$(\text{Απ: M } (-2, -1))$$

6. Δίνονται τα σημεία A (4, 2), B (3, -1) και η ευθεία (ε): $y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας (ε) ώστε το ABΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή του B.

$$(\text{Απ: } \Gamma (\alpha, -3\alpha) \text{ (BA) = (BG)} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = \frac{6}{5} \text{ άρα } \Gamma (0, 0) \text{ ή } \Gamma \left(\frac{6}{5}, -\frac{18}{5}\right))$$

7. Δίνονται τα σημεία A (8, 0) και B (0, 4)

i. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΟΔ με Ο την αρχή των αξόνων Δ μέσο του ΑΒ.

ii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη στην ΟΔ στο Δ.

iii. Αν Μ τυχαίο σημείο της (ε) δείξτε ότι $\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = 2\vec{OM}^2$

$$(\text{Απ: i. } \Delta (4, 2) \text{ ΟΔ: } y = \frac{1}{2}x \text{ ii. } y = -2x + 10 \text{ iii. Αν } M (\alpha, -2\alpha + 10) \text{ τότε } \vec{MA} = (8 - \alpha, 2\alpha - 10),$$

$$\vec{MB} = (-\alpha, 2\alpha - 6) \quad \vec{OM} = (\alpha, -2\alpha + 10) \quad \text{και} \quad 2\left|\vec{OM}\right|^2 = 10\alpha^2 - 80\alpha + 200 = \left|\vec{MA}\right|^2 + \left|\vec{MB}\right|^2$$

8. Έστω το τετράγωνο ABΓΔ με κορυφή του Α(1,5). Η μία διαγώνιος βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = 2x$. Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του τετραγώνου.

$$(\text{Υπ: } B\left(\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right), \Gamma\left(\frac{17}{5}, \frac{19}{5}\right), \Delta\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right))$$

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α (συνθ, ημθ) και Β (ημθ, συνθ)

αν $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. Για ποια τιμή του θ η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

$$(\text{Απ: } y = -x + (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ (σχ. 7 βιβλίου, σελ. 64)})$$

10. Δίνονται τα σημεία A (λ , 0), B (2λ , 3λ) με $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο A τέμνει την $x = -2\lambda$ στο Γ να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το A.

(Υπ: $(AB) = \sqrt{10\lambda^2}$, $\Gamma(-2\lambda, y_\Gamma)$ $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$, $3 \cdot \frac{y_\Gamma}{-3\lambda} = -1 \Leftrightarrow y_\Gamma = \lambda$. Άρα $\Gamma(-2\lambda, \lambda)$

και $(A\Gamma) = \sqrt{10\lambda^2} = (AB)$).

Ε.

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω ABΓ το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες με εξισώσεις :

$$y = \lambda_1 x + \frac{\alpha}{\lambda_1}, y = \lambda_2 x + \frac{\alpha}{\lambda_2}, y = \lambda_3 x + \frac{\alpha}{\lambda_3}$$

Δείξτε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία.

(Υπ.: Βρείτε τα σημεία τομής δύο ευθειών και το σημείο τομής δύο υψών.
Η ζητούμενη ευθεία είναι η $x + \alpha = 0$)

Μάθημα 5

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

A. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα

Κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Παρατηρήσεις :

Αν $B \neq 0$ τότε:

α. Η ευθεία με εξίσωση (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$

β. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι κάθετη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{k} = (A, B)$.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να δείξουμε ότι μία εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου τα A, B, Γ δίνονται συναρτήσει μιας παραμέτρου, παριστάνει ευθεία, πρέπει να δείξουμε ότι τα A και B δε μηδενίζονται ταυτόχρονα (για την ίδια τιμή της παραμέτρου).

Παράδειγμα 1

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (\mu + 1)y + (\mu^2 - 3\mu + 2) = 0$ $\mu \in \mathbb{R}$ (1). Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η (1) παριστάνει ευθεία. Πότε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, πότε στον $y'y$ και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow \mu = \pm 1 \\ \mu + 1 = 0 &\Leftrightarrow \mu = -1 \end{aligned} \right\} \text{Επομένως για } \mu = -1 \text{ η (1) δεν παριστάνει ευθεία.}$$

Για να είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu^2 - 1 = 0 \text{ και } \mu \neq -1, \text{ δηλαδή } \mu = 1.$$

Για να είναι ευθεία παράλληλη στον $y'y$ πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu + 1 = 0 \text{ και } \mu \neq -1, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα η (1) δεν γίνεται παράλληλη στον $y'y$ για καμία τιμή του μ .

Για να περνά από την αρχή Ο πρέπει να ισχύουν συγχρόνως :

$$\mu^2 - 3\mu + 2 = 0 \text{ και } \mu \neq -1$$

δηλαδή $\mu = 1$ ή $\mu = 2$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο ευθειών της μορφής: $\varepsilon_1 + \lambda \cdot \varepsilon_2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο:

1ος τρόπος

Δίνουμε αυθαίρετα δύο τιμές στην παράμετρο λ και προκύπτουν έτσι οι εξισώσεις δύο ευθειών. Βρίσκουμε το σημείο τομής αυτών των δύο ευθειών, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους και εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την αρχική εξίσωση (1). Αν την επαληθεύουν, τότε όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) θα διέρχονται από το σημείο αυτό.

2ος τρόπος

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση που δίνεται σε πολυωνυμική εξίσωση ως προς λ (αν δεν δίνεται έτσι). Για να είναι το πολυώνυμο ως προς λ , του 1^{ου} μέλους, της εξίσωσης ίσο με μηδέν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , πρέπει οι συντελεστές του να είναι ίσοι με μηδέν.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η εξίσωση: $-x - 2 + \lambda(2x + 3y - 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α. Να αποδειχθεί ότι:

- i. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- ii. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία (η): $y = \frac{1}{2}x + 3$;

Λύση

α. i. Η (1) γράφεται ισοδύναμα: $(2\lambda - 1)x + 3\lambda y - \lambda - 2 = 0$.

$$\text{Επειδή το σύστημα } \begin{cases} 2\lambda - 1 = 0 \\ 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

είναι αδύνατο, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές του x και του y . Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. 1ος τρόπος

Για $\lambda = 0$ και $\lambda = \frac{1}{2}$, παίρνουμε τις ευθείες: $-x - 2 = 0$ και $y - \frac{5}{3} = 0$.

Αυτές τέμνονται στο σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$ και έχουμε: $(2\lambda - 1) \cdot (-2) + 3\lambda \left(\frac{5}{3}\right) - \lambda - 2 = 0$.

Άρα, όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

2ος τρόπος

Έστω ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο (x_0, y_0) , τότε:

$$(2\lambda - 1)x_0 + 3\lambda y_0 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x_0 + 3y_0 - 1)\lambda - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -2, y_0 = \frac{5}{3}.$$

Άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

Η εξίσωση (1) αποτελεί μία δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$.

β. Έστω (ε) μία ευθεία της οικογένειας των ευθειών (1).

$$\text{Πρέπει } \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda \neq 0}{3\lambda} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = -6\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Για $\lambda = -\frac{1}{4}$ παίρνουμε από την (1) την ευθεία: $-\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 6x + 3y = -7$.

Για $\lambda = 0$ είναι $-x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ η οποία δεν είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{2}x + 3$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Αν το σύνολο των ευθειών (1) της προηγούμενης μεθόδου μας δοθεί ή το βρούμε με δύο παραμέτρους, απαλείφουμε τη μία από τις δύο με κάποια σχέση που δίνεται ή προκύπτει από τα δεδομένα.

Παράδειγμα 1

Δύο σημεία Α και Β κινούνται επάνω στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων Οxy, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = 1 \quad (1). \text{ Να δείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.}$$

Λύση

Έστω Α(α,0) και Β(0,β) με $\alpha, \beta \neq 0$. Βρίσκουμε την εξίσωση της ΑΒ. Είναι $\lambda_{AB} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Επομένως η εξίσωση της AB είναι: $y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha)$. Η ευθεία AB λοιπόν είναι μία μεταβλητή ευθεία, αφού στην εξίσωσή της έχει δύο παραμέτρους. Πρέπει να απαλείψουμε την μία παράμετρο.

$$\text{Από τη σχέση (1) έχουμε: } \alpha = \alpha\beta - \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta(\alpha - 1) \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad (2)$$

(είναι $\alpha \neq 1$ γιατί αν $\alpha = 1$ δε θα μπορούσε να ισχύει η (1)).

$$\text{Έτσι η εξίσωση της AB γίνεται λόγω της σχέσης (2): } y = -\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha-1}(x - \alpha),$$

που είναι εξίσωση ευθείας με μία όμως παράμετρο και τη γράφουμε με μορφή πολωνύμου ως προς την παράμετρο. Έτσι

$$\text{έχουμε: } (\alpha - 1)y = -x + \alpha \Leftrightarrow \alpha y - y + x - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(y - 1) + x - y = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του λ , αν και μόνον αν, ισχύουν :

$$\text{και } \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1. \text{ Επομένως η AB διέρχεται από το σταθερό σημείο } (1, 1).$$

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Πως υπολογίζουμε την οξεία γωνία δυο ευθειών.

Έστω ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα.

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ τέτοια ώστε: $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$

Υπολογίζουμε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ από τον τύπο:

$$\text{συν}\phi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|}$$

Τότε η οξεία γωνία θ των ευθειών θα είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας ϕ των δύο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1): -x + 2y = 3 \text{ και } (\varepsilon_2): 4x + 3y = 5$$

Λύση

Θα υπολογίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων παραλλήλων προς τις προηγούμενες ευθείες. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ και } \lambda_2 = -\frac{4}{3}.$$

Άρα είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta_1} = (2, 1)$ και $\vec{\delta_2} = (3, -4)$.

Επομένως, η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$. Από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου, έχουμε :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| \cdot |\vec{\delta_2}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}, \text{ οπότε } \theta \cong 79,7^\circ \text{ αφού } \cos \varphi > 0.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Z = 0$ παριστάνει δύο ευθείες, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος. Αυτό γίνεται εύκολα, αν θεωρήσουμε το πρώτο μέλος τριώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς x ή ως προς y . (Πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι θετική).

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι: α. η εξίσωση $6x^2 - xy - y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.

β. Η οξεία γωνία που σχηματίζουν είναι 45° .

Λύση

α. Θεωρούμε το πρώτο μέλος ως τριώνυμο 2^{ου} βαθμού του y .

Τότε η διακρίνουσα του είναι: $\Delta = (-x)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6x^2 = 25x^2$.

Οι ρίζες του δίνονται από τον τύπο:

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{25x^2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -3x \end{cases} \text{ οπότε } 6x^2 - xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2x)(y + 3x) = 0.$$

Επομένως, οι ευθείες που παριστάνει η $6x^2 - xy - y^2 = 0$ έχουν εξισώσεις:

$$y = 2x \text{ και } y = -3x$$

β. Οι ευθείες $y = 2x$ και $y = -3x$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -3$ αντιστοίχως.

Άρα, είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta_1} = (1, 2)$ και $\vec{\delta_2} = (1, -3)$. Επομένως, η οξεία γωνία θ των ευθειών είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των διανυσμάτων-

$$\vec{\delta_1} \text{ και } \vec{\delta_2}. \text{ Είναι } \cos \varphi = \frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| \cdot |\vec{\delta_2}|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ δηλαδή } \varphi = 135^\circ.$$

Επομένως $\theta = 45^\circ$.

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο ευθειών επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

Αν οι εξισώσεις των ευθειών έχουν κάποια παράμετρο, κάνουμε διερεύνηση του συστήματος, συνήθως με ορίζουσες.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $(\varepsilon_1): \mu x - y = \mu + 1$ και $(\varepsilon_2): x - y = 2, \mu \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} \mu x - y = \mu + 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} \mu & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mu + 1, \quad D_x = \begin{vmatrix} \mu + 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mu - 1 + 2 = -\mu + 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mu & \mu + 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\mu - \mu - 1 = \mu - 1$$

α. Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1$ το (Σ) έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D} = 1$ και $\frac{D_y}{D} = -1$, άρα οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(1, -1)$.

β. Αν $D = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ το (Σ) γίνεται $(\varepsilon_1): x - y = 2$ και $(\varepsilon_2): x - y = 2$. Δηλαδή οι ευθείες ταυτίζονται.

Κατηγορία - Μέθοδος 7**Εύρεση γεωμετρικού τόπου:**

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείου $M(x, y)$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι εκφρασμένες συναρτήσει μίας παραμέτρου κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου και βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και y του σημείου M .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινείται το σημείο $M(3\lambda + 1, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\text{Είναι } \left. \begin{matrix} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x = 3\frac{y}{2} + 1 \\ \lambda = \frac{y}{2} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow 2x - 3y - 2 = 0$$

Άρα το M κινείται επάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x - 3y - 2 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 8

Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείου M και δεν δίνονται οι συντεταγμένες του, προσπαθούμε από τα δεδομένα της άσκησης να τις εκφράσουμε συναρτήσει μίας παραμέτρου και στη συνέχεια να κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$, για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ευκολά διαπιστώνουμε, ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα προσδιορίσουμε τα σημεία τομής των ευθειών συναρτήσει της παραμέτρου λ .

Το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1 \end{cases}$$
 έχει πάντα λύση αφού η ορίζουσα του συστήματος

$$\text{είναι: } D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ 2\lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda - \lambda + 1 = \lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ \lambda + 1 & 2\lambda + 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda$$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών είναι το σημείο $M(\lambda + 1, -\lambda)$.

Θέτουμε $x = \lambda + 1$, $y = -\lambda$. Με απαλοιφή του λ παίρνουμε $x + y = 1$ που είναι η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

Κατηγορία - Μέθοδος 9

Όταν μας ζητούν ή προκύπτει από την άσκηση, γεωμετρικός τόπος σημείου που δίνεται με δύο παραμέτρους, απαλείφουμε διαδοχικά τις δύο παραμέτρους.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο.γ.τ. του $M(2\alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha + \beta = 1$.

Λύση

Είναι $\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$. Οπότε το σημείο M γίνεται $M(2\alpha + 1 - \alpha, 3\alpha + 5(1 - \alpha))$

δηλαδή $M(\alpha + 1, -2\alpha + 5)$ και έτσι απαλείψαμε τη μία παράμετρο.

$$\text{Έστω } \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = -2(x - 1) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 5 \Leftrightarrow y = -2x + 7.$$

Επομένως το M κινείται στην ευθεία $y = -2x + 7$.

Μέθοδος 10

Όταν σε μία ευθεία γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ , τη γράφουμε στη μορφή: $y = \lambda x + \beta$ και υπολογίζουμε το β από τα υπόλοιπα δεδομένα της άσκησης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε): $9x + y - 1 = 0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 2 m^2 .

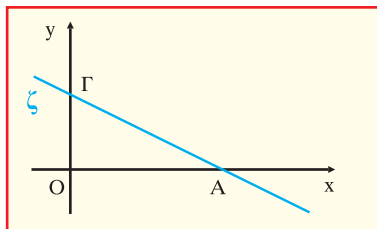
Λύση

Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -9$ οπότε η ζητούμενη ευθεία (ζ) θα έχει τον ίδιο συντελεστή $\lambda_z = -9$. Άρα (ζ): $y = -9x + \beta$.

Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η (ζ) τέμνει τους άξονες.

Θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$ και έχουμε: $x = \beta/9$. Επομένως $A(\beta/9, 0)$.

Θέτουμε στην εξίσωση της $x = 0$ και έχουμε: $y = \beta$. Επομένως $\Gamma(0, \beta)$.



Το εμβαδόν του τριγώνου OAG είναι:

$$(OAG) = \frac{1}{2} \left| \frac{\beta}{9} \right| |\beta| \quad \text{Άρα} \quad \frac{1}{2} \left| \frac{\beta}{9} \right| |\beta| = 2 \Leftrightarrow |\beta|^2 = 36 \Leftrightarrow \beta = \pm 6.$$

αλλά $(OAG) = 2$

Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι οι: $(\zeta_1): y = -9x + 6$ και $(\zeta_2): y = -9x - 6$

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Δίνεται η εξίσωση (ε): $(2\lambda^2 - \lambda - 1)x - (\lambda^2 - 3\lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι:

α. Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες για κάθε πραγματική τιμή του λ .

β. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση, διέρχονται από το ίδιο σημείο για κάθε τιμή του λ .

Λύση

α. Η εξίσωση (ε) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ η οποία παριστάνει ευθεία όταν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

$$\text{Επειδή το σύστημα} \begin{cases} 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{είναι αδύνατο, δεν υπάρχει}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές του x και του y . Άρα η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για $\lambda = 0$ προκύπτει η ευθεία με εξίσωση: $x + y - 2 = 0$ (1)

Για $\lambda = 1$ προκύπτει η ευθεία με εξίσωση: $y - 1 = 0$ (2)

Απο τη λύση του συστήματος : $\{ x + y - 2 = 0 \text{ και } y - 1 = 0 \}$ παίρνουμε $x = 1$ και $y = 1$.
Άρα οι ευθείες (1) και (2) τέμνονται στο σημείο $P(1, 1)$.

Οι συντεταγμένες του P επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε) για κάθε λ πραγματικό, αφού: $(2\lambda^2 - \lambda - 1) \cdot 1 - (\lambda^2 - 3\lambda + 1) \cdot 1 - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$

Άρα όλες οι ευθείες που παριστάνει η (ε), διέρχονται απο το σταθερό σημείο $P(1,1)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση (σ) : $(\lambda^2 - 1)x + (2\lambda^2 + \lambda - 3)y - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία;
- ii. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία
 - α. παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - β. παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Λύση

- i. Η (σ) παριστάνει ευθεία για τις τιμές του λ , για τις οποίες δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές των x και y .

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ 2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } \lambda = 1.$$

Άρα η (σ) παριστάνει ευθεία, όταν και μόνο όταν, $\lambda \neq 1$.

- ii. α. Η (σ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ 2\lambda^2 + \lambda - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1 \\ \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } \lambda = -1$$

Επομένως, είναι η ευθεία με εξίσωση: $2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$

- β. Η (σ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} \lambda^2 - 1 \neq 0 \\ 2\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1 \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } \lambda = -\frac{3}{2}$$

Επομένως, είναι η ευθεία με εξίσωση : $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Άσκηση 3

Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις:

$(\varepsilon_1): y = \mu x$ και $(\varepsilon_2): (\mu + 1)x = (1 - \mu)y$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θα υπολογίσουμε τη γωνία δύο διανυσμάτων παράλληλων προς τις προηγούμενες ευθεί-

εξ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$, $\vec{\delta}_2 = (1 - \mu, 1 + \mu)$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \cos(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) &= \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot (1 + \mu)}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2}} = \\ &= \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{1^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Επομένως, η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση με τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$, που είναι 45° .

Σχόλιο : Η αμβλεία γωνία των ευθειών, είναι 135° .

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ζεύγη καθέτων μεταξύ τους ευθειών.
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των άπειρων αυτών ζευγών καθέτων ευθειών.

Λύση

α. Είναι: $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0$

Η παραπάνω είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x με διακρίνουσα:

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(-y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2) = 4(2\lambda + y)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \text{ πραγματικό.}$$

Επομένως έχει ρίζες:

$$x = \frac{2\lambda - \sqrt{4(2\lambda + y)^2}}{2} = -\lambda - y, \quad x = \frac{2\lambda + \sqrt{4(2\lambda + y)^2}}{2} = 3\lambda + y$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει τις κάθετες ευθείες με εξισώσεις $y = -x - \lambda$ και $y = x - 3\lambda$.

β. Απο τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = -x - \lambda \\ y = x - 3\lambda \end{cases}$ προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των ευθειών.

Έχουμε: $x - 3\lambda = -x - \lambda \Leftrightarrow 2x = 2\lambda \Leftrightarrow x = \lambda$, οπότε $y = \lambda - 3\lambda \Leftrightarrow y = -2\lambda$

Με απαλοιφή του λ απο τις $\{x = \lambda, y = -2\lambda\}$ παίρνουμε: $y = -2x$

που είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων τομής των καθέτων μεταξύ τους ευθειών.

Άσκηση 5

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , η εξίσωση ευθείας:

$$(2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0 \text{ όπου } \lambda \in A = \{0, 1, 2, \dots, 19\}$$

παριστάνει τις πορείες 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.

α. Να βρεθεί η θέση του λιμανιού.

β. Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο $(1, 2)$ υπάρχει φάρος που δε λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση, κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με τον φάρο.

γ. Εξετάστε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση $11x - 3y - 22 = 0$.

Λύση

α. Το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες με εξισώσεις:

$$(2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0 \quad (1) \text{ για οποιαδήποτε τιμή του } \lambda \in A.$$

Θέτουμε δύο τιμές στο λ και βρίσκουμε έτσι τις εξισώσεις δύο ευθειών από τις (1).

π.χ. για $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$ βρίσκουμε τις ευθείες: $x - y = 0$ και $4x - y - 3 = 0$.

Οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

που φανερά είναι το σημείο $(1, 1)$. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού επαληθεύουν την εξίσωση (1) για κάθε λ πραγματικό, αφού ισχύει:

$$(2\lambda^2 + \lambda + 1) \cdot 1 - (\lambda^2 - \lambda + 1) \cdot 1 - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda^2 + \lambda - 1 - \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα το σημείο $(1, 1)$ ανήκει σε όλες τις ευθείες (1) και συνεπώς το λιμάνι βρίσκεται στη θέση $(1, 1)$.

β. Για να συγκρουστεί κάποιο πλοίο με τον φάρο πρέπει να υπάρχει $\lambda \in \{0, 1, 2, \dots, 19\}$ τέτοιο ώστε η ευθεία που θα προκύψει να διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$.

$$\text{Όμως: } (2\lambda^2 + \lambda + 1)1 - (\lambda^2 - \lambda + 1)2 - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Η τελευταία είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς λ με αρνητική διακρίνουσα, οπότε είναι αδύνατη. Έτσι καμία από τις ευθείες (1), δεν διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και επομένως δεν υπάρχει περίπτωση κάποιο πλοίο να συγκρουστεί με τον φάρο.

γ. Θα προσδιορίσουμε το λ ώστε κάποια από τις ευθείες (1) να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{11}{3}$.

$$\text{Πρέπει: } \frac{2\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda^2 - \lambda + 1} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 14\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{4}{5}. \text{ Η } \lambda = \frac{4}{5} \text{ απορρίπτεται.}$$

Για $\lambda = 2$, παίρνουμε την εξίσωση $11x - 3y - 8 = 0$ (2).

Άρα, υπάρχει πλοίο, αυτό που η πορεία του καθορίζεται από την εξίσωση (2), που κινείται παράλληλα προς το μικρό σκάφος.

Παρατήρηση:

Για $\lambda = \frac{4}{5}$ προφανώς θα πάρουμε την ίδια εξίσωση, αφού από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μόνο μία παράλληλη προς γνωστή ευθεία.

Άσκηση 6

Τί γραμμές παριστάνουν οι εξισώσεις:

α. $(x+y+2)^2 - 4 = 0$ (1)

β. $|x| - |y| = 0$ (2)

γ. $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6 = 0$ (3)

Λύση

α. Μετασχηματίζουμε την (1) και έχουμε:

$$(x+y+2-2)(x+y+2+2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+4) = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \text{ ή } x+y+4=0.$$

Επομένως η (1) παριστάνει τις δύο παραπάνω ευθείες.

β. $|x| - |y| = 0 \Leftrightarrow x \pm y = 0$. Επομένως η (2) παριστάνει δύο ευθείες $y = x$ και $y = -x$ (είναι οι διχοτόμοι των γωνιών xOy και $x'Oy$).

γ. Από την (3) $\Leftrightarrow (x-y)^2 - 5(x-y) + 6 = 0$. Θέτουμε $x-y = t$ και έχουμε: $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Η τελευταία σχέση είναι τριώνυμο προς t και έχει ρίζες $t_1 = 2$ και $t_2 = 3$.

Επομένως: $x-y=2$ ή $x-y=3$

Η (3) παριστάνει αυτές τις δύο ευθείες.

Άσκηση 7

Δίνεται η “οικογένεια των ευθειών” με εξίσωση $(x-y-5) + \lambda(x-6y-5) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon): x + 2002y = 5$ ανήκει σε αυτή την “οικογένεια ευθειών”.

Λύση

Βρίσκουμε το σημείο από το οποίο περνούν όλες οι ευθείες της δοσμένης οικογένειας, (το κέντρο της δέσμης όπως λέγεται), λύνοντας το σύστημα τους.

$$\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-6y-5=0 \end{cases} \Rightarrow x=5 \text{ και } y=0.$$

Επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $K(5, 0)$.

Η ευθεία (ε) ανήκει σε αυτή την οικογένεια ευθειών, αφού διέρχεται και αυτή από το σημείο K . (Οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωσή της).

Άσκηση 8

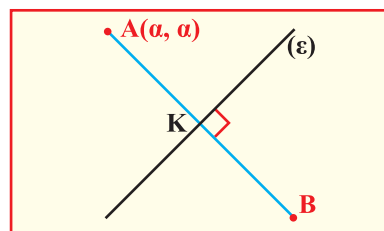
Το σημείο A κινείται επάνω στην ευθεία $y = x$. Να δείξετε ότι το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x + 2y + 1 = 0$ κινείται επάνω στην ευθεία με εξίσωση:

$$y = 7x + 2.$$

Λύση

Επειδή το σημείο A κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$, έχει συντεταγμένες $A(a, a)$.

Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$. Επειδή $AK \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{AK} = 2$



Επομένως η εξίσωση της ΑΚ είναι: $y - \alpha = 2(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha = 2x - 2\alpha \Leftrightarrow y = 2x - \alpha$.

Λύνουμε το σύστημα των (ε) και ΑΚ για να βρούμε το σημείο Κ:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y = 2x - \alpha \end{cases}$$

$$\text{Είναι: } x + 2(2x - \alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 4x - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha - 1}{5}$$

$$y = 2x - \alpha \Leftrightarrow y = 2 \frac{2\alpha - 1}{5} - \alpha \Leftrightarrow y = \frac{4\alpha - 2 - 5\alpha}{5} \Leftrightarrow y = \frac{-\alpha - 2}{5}$$

Άρα το σημείο Κ έχει συντεταγμένες: $K\left(\frac{2\alpha - 1}{5}, \frac{-\alpha - 2}{5}\right)$

Το σημείο Κ είναι μέσο του ΑΒ. Από τον τύπο που μας δίνει το μέσο ευθυγράμμου τμήματος, γνωρίζοντας το Α και το Κ μπορούμε να υπολογίσουμε το Β. Έτσι έχουμε:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_K \Leftrightarrow \frac{\alpha + x_B}{2} = \frac{2\alpha - 1}{5} \Leftrightarrow 5\alpha + 5x_B = 4\alpha - 2 \Leftrightarrow x_B = \frac{-\alpha - 2}{5}$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = y_K \Leftrightarrow \frac{\alpha + y_B}{2} = \frac{-\alpha - 2}{5} \Leftrightarrow 5\alpha + 5y_B = -2\alpha - 4 \Leftrightarrow y_B = \frac{-7\alpha - 4}{5}$$

Επομένως: $B\left(\frac{-\alpha - 2}{5}, \frac{-7\alpha - 4}{5}\right)$

Έχουμε λοιπόν το σημείο $B\left(\frac{-\alpha - 2}{5}, \frac{-7\alpha - 4}{5}\right)$ με μια παράμετρο α και θέλουμε να βρούμε την ευθεία στην οποία κινείται.

Θέτουμε: $x = \frac{-\alpha - 2}{5}$ (1) και $y = \frac{-7\alpha - 4}{5}$ (2) και απαλείφουμε την παράμετρο α .

Απο (1) προκύπτει $\alpha = -5x - 2$ και αντικαθιστώντας στη (2):

$$y = \frac{-7(-5x - 2) - 4}{5} \Leftrightarrow 5y = 35x + 14 - 4 \Leftrightarrow 35x - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 7x + 2$$

Παρατήρηση :

Εδώ επειδή δίνεται η ευθεία στην οποία κινείται το Β θα μπορούσαμε απλώς να εξετάσουμε αν η δοσμένη ευθεία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του.

Άσκηση 9

Να υπολογισθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία (ζ): $-\kappa x + y - 3 = 0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών (ε₁): $2x + 5y = 12$ και (ε₂): $x - y + 1 = 0$.

Λύση

Βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών λύνοντας το σύστημά τους:

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): 2x + 5y = 12 \\ (\varepsilon_2): x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 2. \text{ Δηλαδή οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο } A(1, 2).$$

Για να περνάει η (ζ) από το Α πρέπει να επαληθεύεται η εξίσωσή της από τις συντεταγμένες του Α. Επομένως: $-\kappa \cdot 1 + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1$

Άσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση της ευθείας (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

Να δείξετε ότι:

α. Τέμνει τους άξονες στα σημεία $K\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ και $\Lambda\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$

β. Αν ονομάσουμε τις συντεταγμένες $-\frac{\Gamma}{A} = \alpha$ και $-\frac{\Gamma}{B} = \beta$, η εξίσωση (ε) παίρνει

τη μορφή $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Λύση

α. Για να βρούμε τα σημεία στα οποία μία ευθεία τέμνει τους άξονες θέτουμε στην εξίσωσή της διαδοχικά $x = 0$ και $y = 0$.

Έτσι έχουμε:

Για $y = 0$: $Ax + \Gamma = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$, $A \neq 0$, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον $x'x$ στο σημείο

$$K\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$$

Για $x = 0$: $By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\Gamma}{B}$, $B \neq 0$, δηλαδή η ευθεία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο

$$\Lambda\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right).$$

ii. $Ax + By + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -\Gamma \Leftrightarrow \frac{Ax}{-\Gamma} + \frac{By}{-\Gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{\Gamma}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Gamma}{B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$

Παρατήρηση:

(Οι αριθμοί $\alpha = -\frac{\Gamma}{A}$ και $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$ λέγονται **συντεταγμένες επί την αρχή** της ευθείας (ε)).

Δ.**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ η εξίσωση: $(\mu^2 - \mu)x + (\mu^2 - 1)y + \mu + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή;

Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$;

Πότε είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$;

Πότε περνάει από την αρχή των αξόνων;

(Υπ.: Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο 1)

(Απ.: Για να είναι ευθεία πρέπει: $\mu \neq 1$. Για να είναι παράλληλη στον $y'y$ πρέπει $\mu = -1$. Για να είναι παράλληλη στον $x'x$ πρέπει $\mu = 0$. Για να περνάει από το O πρέπει $\mu = -3$)

2. Δείξτε ότι η εξίσωση: $\left(\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2}\right)x + \left(\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}\right)y + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\theta \in [0, \pi]$. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που περιγράφονται με την παραπάνω εξίσωση διέρχονται απο σταθερό σημείο.

(Απ.: Η $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ευθεία όταν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (Μέθοδος 1).

Για το β' ερώτημα χρησιμοποιήστε τη μέθοδο 2). Είναι $(0, 2)$

3. Θεωρούμε την εξίσωση: $(2\alpha^2 + \alpha + 1)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y - \alpha^2 - 2\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i. Για ποιες τιμές του α η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία;

ii. Για τις τιμές του α που θα βρείτε να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες ευθείες διέρχονται απο το ίδιο σημείο.

(Απ.: [i. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ / ii. το $(1, -1)$]. (Όπως η άσκηση 2))

4. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση (ε) : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται απο το σημείο (x_1, y_1) και είναι παράλληλη στην (ε) έχει εξίσωση: $\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0$.

(Απ.: Από τη ζητούμενη ευθεία γνωρίζουμε ένα σημείο και το συντελεστή διεύθυνσης.

Ελέγξτε την περίπτωση $\beta = 0$)

5. Αν $3x + y - 5 = 0$ και $x - 3y + 5 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και Κ $(2, 4)$ είναι το κέντρο του, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

(Υπ.: Δείξτε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

και στη συνέχεια, ότι $(AB) = (BG)$)

6. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: (ε_1) : $2x - 3y = 0$ και (ε_2) : $-x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο

$A(-1, 2)$. Να βρείτε σημείο Μ της ε_2 τέτοιο ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην ε_1 .

(Απ.: $M\left(\frac{23}{5}, \frac{2}{5}\right)$)

7. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $A(-1, 9)$ και διαγωνίους δ_1 : $2x - y + 1 = 0$ και δ_2 : $3x + y - 6 = 0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του ορθογωνίου.

(Απ.: $(\Gamma(3, -3), B(1 + \sqrt{2}), \Delta(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}))$)

8. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$, με $\alpha\beta \neq 0$ και $\alpha \neq \pm\beta$

- i. Να βρείτε το κοινό τους σημείο, έστω M.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OM, όπου O η αρχή των αξόνων.
- iii. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας AM με $A(\alpha, \beta)$.

$$(A\pi.: i. M\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) ii. OM: y = x, iii. AM: y - \beta = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x - \alpha))$$

9. Ορθή γωνία BΑΓ στρέφεται γύρω από την κορυφή της A(4,6) και οι πλευρές της τέμνουν τους θετικούς ημιάξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

$$(A\pi.: 2x + 3y = 13, 0 \leq x \leq \frac{13}{2}.)$$

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

- Ορθή γωνία BΑΓ στρέφεται γύρω από την κορυφή της A(1,1) και οι πλευρές της τέμνουν τους θετικούς ημιάξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής M του A πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

$$(A\pi.: x + 2y = 2, 0 \leq x \leq 2)$$

Απόσταση σημείου από ευθεία Εμβαδόν τριγώνου

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

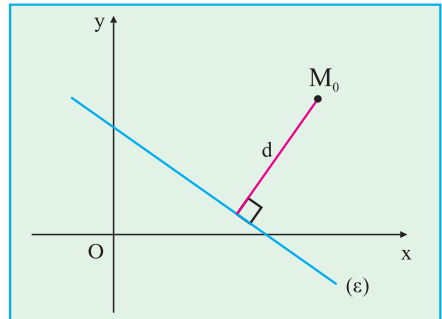
Απόσταση σημείου από ευθεία

1. Η απόσταση d ενός σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από μία ευθεία με εξίσωση:

$$Ax + By + \Gamma = 0, \quad |A| + |B| \neq 0$$

δίνεται από τον τύπο:

$$d = d(M_0, \epsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



π.χ. Η απόσταση του σημείου $M(2, -3)$ από την ευθεία $(\epsilon): 3x + 4y - 9 = 0$ είναι ίση με:

$$d = d(M, \epsilon) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

Εμβαδόν τριγώνου

2. Αν είναι γνωστές οι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$, το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right|$$

όπου $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$ είναι η ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

$$\text{Ισοδύναμα ισχύει } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{BA}, \vec{B\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma B}) \right|.$$

π.χ. Αν $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ και $\Gamma(2, 6)$ είναι οι κορυφές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τότε: $\vec{AB} = (2, 2)$

και $\vec{A\Gamma} = (3, 4)$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο

$$\text{είναι: } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ τ.μ}$$

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Όταν ζητείται να βρεθεί το σύνολο των σημείων M που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα ή να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M , τότε: θεωρούμε $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο του τόπου και από τα δεδομένα της άσκησης προσπαθούμε να βρούμε μία εξίσωση μεταξύ των συντεταγμένων x και y .

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(4, 6)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 2 τ.μ.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει $(MAB) = 2$. Το εμβαδόν του τριγώνου (MAB) είναι ίσο με:

$$(MAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{MA} & \vec{MB} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2-x & 1-y \\ 4-x & 6-y \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(2+x)(y-6) - (4-x)(1-y)| =$$

$$= \frac{1}{2} |2y - 12 + xy - 6x - 4 + 4y + x - xy| = \frac{1}{2} |-5x + 6y - 16|.$$

$$(MAB) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |-5x + 6y - 16| = 2 \Leftrightarrow |-5x + 6y - 16| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 16 = 4 \\ \text{ή} \\ -5x + 6y - 16 = -4 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο σύνολο των σημείων M , είναι τα σημεία των ευθειών:

$$-5x + 6y - 20 = 0 \quad \text{και} \quad -5x + 6y - 12 = 0.$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών με εξισώσεις

$$(ε_1): 3x + 4y + 12 = 0 \quad \text{και} \quad (ε_2): 3x + 4y + 22 = 0.$$

Λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της μεσοπαράλληλης $(ε)$. Τότε:

$$d(M, ε_1) = d(M, ε_2) \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y + 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow |3x + 4y + 12| = |3x + 4y + 22| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 12 = 3x + 4y + 22 & (\text{αδύνατη}) \\ 3x + 4y + 12 = -3x - 4y - 22 \end{cases} \Leftrightarrow 6x + 8y + 34 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 17 = 0$$

Επομένως η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι $3x + 4y + 17 = 0$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Η εύρεση των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες, ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου των σημείων, που ισαπέχουν από τις δύο ευθείες, αφού η διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις: $x + y - 2 = 0$ και $3x - 3y - 1 = 0$.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της διχοτόμου. Τότε: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3x - 3y - 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2}} \Leftrightarrow 3 \cdot |x + y - 2| = |3x - 3y - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y - 6 = 3x - 3y - 1 \\ 3x + 3y - 6 = -3x + 3y + 1 \end{cases}$$

Προκύπτουν επομένως οι εξισώσεις των ευθειών: $y = \frac{5}{6}$ και $x = \frac{7}{6}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Πολλές φορές δεν είναι προφανής η ιδιότητα που ικανοποιούν τα σημεία M των οποίων ζητείται ο γεωμετρικός τόπος. Γι' αυτό θέτουμε παραμέτρους στα μεταβλητά σημεία του σχήματος. Αν χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μία παραμέτρους, τότε για να μπορέσουμε να κάνουμε την απαλοιφή αυτών, πρέπει να βρίσκουμε μία εξίσωση επιπλέον από τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε.

Παράδειγμα 1

Ορθή γωνία στρέφεται γύρω από το σημείο $A(2, 1)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία B, Γ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του $B\Gamma$.

Λύση

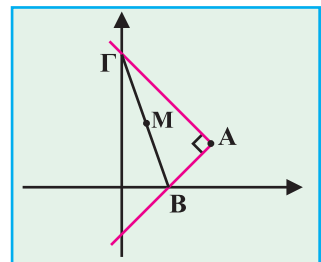
Έστω $M(x, y)$ σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Έστω $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(0, \gamma)$ τα σημεία τομής με τους άξονες. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει να βρούμε τρεις εξισώσεις για να μπορέσουμε να κάνουμε την απαλοιφή των παραμέτρων β και γ . Επειδή το M είναι μέσο του $B\Gamma$ έχουμε:

$$\frac{\beta + 0}{2} = x \quad \text{και} \quad \frac{\gamma + 0}{2} = y, \quad \text{άρα} \quad \beta = 2x \quad \text{και} \quad \gamma = 2y \quad (1)$$

Ακόμη είναι:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0 \Leftrightarrow (\beta - 2) \cdot (-2) + (-1) \cdot (\gamma - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = 5 \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $2 \cdot (2x) + 2y = 5 \Leftrightarrow 4x + 2y = 5$ που είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου M . Επειδή το M βρίσκεται πάντα στο 1° τεταρτημόριο, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M , θα είναι το τμήμα της ευθείας $4x + 2y = 5$, που βρίσκεται στο



τεταρτημόριο αυτό. Είναι λοιπόν, ο γεωμετρικός τόπος του Μ το τμήμα της ευθείας:

$$4x + 2y = 5 \text{ με } 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \text{ και } 0 \leq y \leq \frac{5}{2}.$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και απέχουν από το σημείο Α (2, 1) απόσταση ίση με 1.

Λύση

$$\text{Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή } O(0, 0) \text{ έχουν εξισώσεις: } \begin{cases} y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{ή} \\ x = 0 \end{cases}$$

Η $x = 0$ δεν είναι δεκτή, διότι η απόσταση του σημείου Α (2, 1) από την $x = 0$ (δηλ. τον άξονα $y'y$) είναι 2.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: $d(A, \varepsilon) = 1$.

$$\text{Έχουμε: } d(A, \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = \frac{4}{3}$$

Για $\lambda = 0$, παίρνουμε την ευθεία $y = 0$ και για $\lambda = \frac{4}{3}$, παίρνουμε την ευθεία $y = \frac{4}{3}x$, οι οποίες είναι οι εξισώσεις των ζητούμενων ευθειών.

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες: $(\varepsilon_1): 3x + 4y + 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x + 3y - 3 = 0$.

Λύση

Έστω Μ(x, y) σημείο τέτοιο ώστε: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$ (1). Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y - 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5 = 4x + 3y - 3 \\ 3x + 4y + 5 = -(4x + 3y - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ 7x + 7y + 2 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, τα σημεία Μ που ικανοποιούν την (1) βρίσκονται στις παραπάνω ευθείες.

Παρατήρηση:

Οι ευθείες που δόθηκαν δεν είναι παράλληλες, άρα τέμνονται και είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, ότι τα σημεία του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι τα σημεία της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας.

Άσκηση 3

Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $x + y - 1 = 0$ που απέχουν από την ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 3x + 4y - 2 = 0$ απόσταση ίση με 2.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ σημείο της ευθείας $x + y - 1 = 0$ (1)

$$\text{Πρέπει: } d(M, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Leftrightarrow |3x + 4y - 2| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ \text{ή} \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$$

Από τα συστήματα: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$ (2) και $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 4y = -8 \end{cases}$ (3) προσδιορίζουμε τα ζητούμενα

σημεία

Από (2) $\Leftrightarrow x = -8, y = 9$ και από (3) $\Leftrightarrow x = 12, y = -11$.

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα: $(-8, 9)$ και $(12, -11)$.

Άσκηση 4

Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, του οποίου οι τρεις κορυφές είναι:

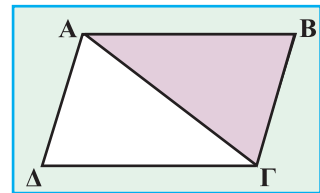
$A(-3, 1), B(4, -5), \Gamma(-2, 3)$

Λύση

Είναι $\vec{AB} = (7, -6), \vec{AG} = (1, 2)$.

Έστω E το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, τότε:

$$E = 2 \cdot (AB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AG}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 20 \text{ τ.μ.}$$

**Άσκηση 5**

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας ε των ευθειών με εξισώσεις:

$$\eta_1 : 3x + 4y - 7 = 0 \text{ και } \eta_2 : 3x + 4y - 16 = 0.$$

Λύση

Το σημείο $M(x, y)$ θα είναι σημείο της ευθείας ε , αν και μόνον αν, ισαπέχει από τις ευθείες η_1 και η_2 , δηλαδή αν και μόνον αν ισχύει: $d(M, \eta_1) = d(M, \eta_2)$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } d(M, \eta_1) &= d(M, \eta_2) \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 7 = 3x + 4y - 16, \text{ αδύνατη} \\ \text{ή} \\ 3x + 4y - 7 = -(3x + 4y - 16) \Leftrightarrow 6x + 8y - 23 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

η οποία είναι η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των η_1 και η_2 .

Άσκηση 6

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: 3x + 2y - 1 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

Λύση

Η ζητούμενη ευθεία ε ως παράλληλη προς την ευθεία

$$\eta: 3x + 2y - 1 = 0 \text{ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = -\frac{3}{2}.$$

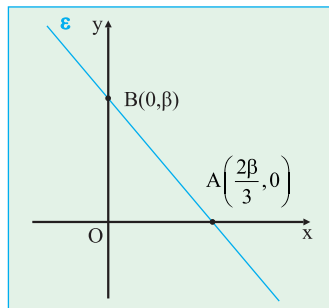
$$\text{Άρα η εξίσωσή της θα είναι της μορφής: } y = -\frac{3}{2}x + \beta.$$

Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x' x και y' y στα σημεία

$A\left(\frac{2\beta}{3}, 0\right)$ και $B(0, \beta)$ αντίστοιχα. Έτσι σχηματίζεται το τρίγωνο OAB με $O(0,0)$ το οποίο έχει εμβαδόν $(AOB) = 12$ τ.μ.

$$\text{Είναι: } (AOB) = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OA} \\ \vec{OB} \end{pmatrix} \right| = 12 \Leftrightarrow \left| \frac{2\beta}{3} \cdot \beta \right| = 24 \Leftrightarrow \beta^2 = 36 \Leftrightarrow \beta = 6 \text{ ή } \beta = -6$$

$$\text{Άρα υπάρχουν δύο ευθείες, με εξισώσεις: } y = -\frac{3}{2}x + 6 \text{ και } y = -\frac{3}{2}x - 6$$

**Άσκηση 7**

Θεωρούμε τα σημεία $A(-4, 0)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(-1, 4)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $(MB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma)$.

Λύση

$$\text{Το εμβαδόν του τριγώνου } AB\Gamma \text{ είναι ίσο με: } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = 12 \text{ και του}$$

$$\text{τριγώνου } MB\Gamma \text{ είναι: } (MB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{MB} \\ \vec{M\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2-x & -y \\ -1-x & 4-y \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-4x - 3y + 8|.$$

Οπότε, το σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{1}{2} |-4x + 3y - 8| = \frac{1}{2} \cdot 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 8 = 12 \\ \text{ή} \\ 4x + 3y - 8 = -12 \end{cases}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα σημεία των ευθειών με εξισώσεις:

$$4x + 3y + 4 = 0 \text{ και } 4x + 3y - 20 = 0.$$

Άσκηση 8

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x + \mu y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x + 2y + \lambda = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ, μ ώστε να είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η απόστασή τους να είναι $2\sqrt{2}$.

Λύση

Αν $\mu = 0$ οι ευθείες είναι κάθετες. Επειδή θέλουμε οι ευθείες να είναι παράλληλες πρέπει

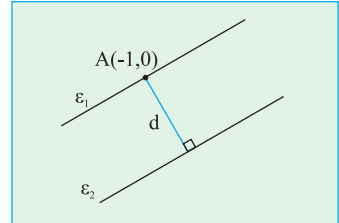
$\mu \neq 0$. Τότε ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών που είναι: $\lambda_1 = \frac{-1}{\mu}, \lambda_2 = -\mu$

Είναι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \frac{-1}{\mu} = -\mu \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1$

Η απόσταση των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι ίση με την απόσταση τυχαίου σημείου έστω $A(-1, 0)$ της ε_1 από την ε_2 .

Είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2\mu(-1) + 2 \cdot 0 + \lambda|}{\sqrt{(2\mu)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$



$$|-2\mu + \lambda| = 2\sqrt{2}\sqrt{(2\mu)^2 + 2^2} \Leftrightarrow (\lambda - 2\mu)^2 = 32(\mu^2 + 1)$$

Με $\mu = 1$ παίρνουμε από την παραπάνω εξίσωση:

$$(\lambda - 2)^2 = 32(1^2 + 1) \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 8 \\ \lambda - 2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 10 \\ \lambda = -6 \end{cases}$$

και με $\mu = -1$ παίρνουμε:

$$(\lambda + 2)^2 = 32((-1)^2 + 1) \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 8 \\ \lambda + 2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές των λ και μ είναι:

$$(\lambda, \mu) = (-6, 1), (\lambda, \mu) = (6, -1), (\lambda, \mu) = (10, 1), (\lambda, \mu) = (-10, -1)$$

Άσκηση 9

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: ax - y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x + ay - a = 0, a > 0$

α. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ο άξονας $y'y$ σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο για κάθε $a > 0$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του τριγώνου που σχηματίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται στο πρώτο ερώτημα.

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $E(a) \leq E(1)$.

Λύση

α. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα τότε έχουμε

$$\lambda_1 = a \text{ και } \lambda_2 = -\frac{1}{a}, \text{ οπότε } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

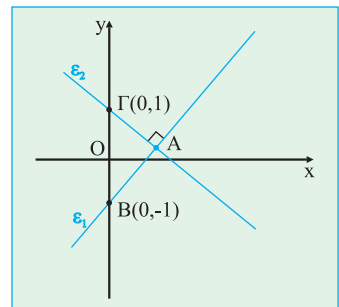
Άρα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους και σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με τον άξονα $y'y$.

β. Η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -1)$.

Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, 1)$.

Το σημείο τομής A των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ προσδιορίζεται από τη

$$\text{λύση του συστήματος: } \begin{cases} ax - y = 1 \\ x + ay = a \end{cases}$$



Είναι: $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha$, $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$

Αφού $D \neq 0$ για κάθε α , το σύστημα έχει πάντα λύση, που σημαίνει ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

τέμνονται για κάθε τιμή του α . Το σημείο τομής τους είναι: $A \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right)$

Η απόσταση d του A από τον άξονα $y'y$ είναι $d = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου

είναι: $E(\alpha) = \frac{1}{2}d(B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cdot 2 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ (1), με $\alpha > 0$.

γ. Από την (1) έχουμε: $E(1) = 1$. Έστω ότι ισχύει $E(\alpha) \leq E(1)$

$$\text{Τότε } E(\alpha) \leq E(1) \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε α .

Άσκηση 10

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός αεροδρομίου προσδιορίζεται από το σημείο $\Delta(2, 4)$ και η προβολή της θέσης ενός αεροπλάνου πάνω στο καρτεσιανό σύστημα δίνεται από το σημείο $K(t+1, t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

α. Να εξετάσετε αν το αεροπλάνο θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο όταν κινείται ευθύγραμμα.

β. Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση του αεροπλάνου από το αεροδρόμιο αν κινείται ευθύγραμμα σε σταθερό ύψος 2 km.

Λύση

α. Η προβολή K του αεροπλάνου βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση: $x - y - 3 = 0$ που προκύπτει με απαλοιφή του t από τις σχέσεις:

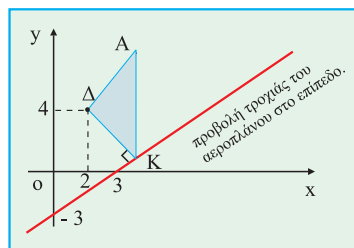
$$x = t + 1, \quad y = t - 2.$$

Παρατηρούμε, ότι το σημείο Δ δεν ανήκει σε αυτήν την ευθεία, άρα το αεροπλάνο δε θα περάσει πάνω από το αεροδρόμιο.

β. Αφού $AK = 2$ km η απόσταση $A\Delta$ γίνεται ελάχιστη όταν γίνει ελάχιστη η ΔK . Η ΔK γίνεται ελάχιστη όταν είναι κάθετη στην (ε) και είναι:

$$\Delta K_{\min} = d(\Delta, K) = \frac{|2 - 4 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Τότε } A\Delta_{\min} = \sqrt{AK^2 + \Delta K^2} = \sqrt{2^2 + \frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{66}}{2} \text{ km}.$$



Άσκηση 11

Ανοικτά κάποιου λιμανιού υπάρχουν τρεις σηματοδότες $\Sigma_i, i = 1, 2, 3$ που οριοθετούν μία τριγωνική περιοχή στην οποία απαγορεύονται οι καταδύσεις. Ο υπεύθυνος λιμενάρχης, ο οποίος βρίσκεται σε ένα πλοίο κάπου μέσα στην τριγωνική περιοχή, στέλνει τρεις βάρκες με δύο ναύτες στην καθεμία να μετρήσουν τις αποστάσεις των $\Sigma_i, i = 1, 2, 3$ από το πλοίο.

Η πρώτη βάρκα πλέει 2 ναυτικά μίλια δυτικά και 1 μίλι βόρεια και εκεί συναντά την πρώτη σηματοδούρα. Η δεύτερη βάρκα πλέει 2 μίλια νότια και 2 ανατολικά και εκεί συναντά τη δεύτερη σηματοδούρα. Η τρίτη βάρκα πλέει 3 μίλια βόρεια και 1 μίλι ανατολικά και συναντά την τρίτη σηματοδούρα. Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογίσετε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής.

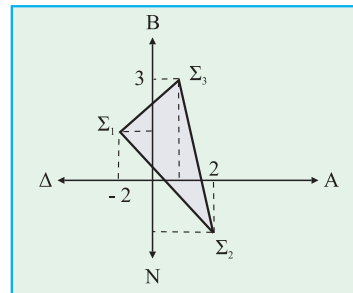
Λύση

Θεωρώντας ως αρχή των συντεταγμένων τη θέση του πλοίου έχουμε το διπλανό σχήμα, όπου: $\Sigma_1(-2, 1)$, $\Sigma_2(2, -2)$, $\Sigma_3(1, 3)$.

Είναι: $\vec{\Sigma_1\Sigma_2} = (4, -3)$ και $\vec{\Sigma_1\Sigma_3} = (3, 2)$.

Οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ είναι :

$$E = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{\Sigma_1\Sigma_2} & \vec{\Sigma_1\Sigma_3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{17}{2} \text{ τετρ. μίλια.}$$

**Δ.****ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Το εμβαδόν παραλληλογράμμου ABΓΔ με A (0, 0), B (3, 1) και Γ (5, 3) είναι ίσο με:

A: 1 B: 8 Γ: 4 Δ: 5 E: 2.

2. Η απόσταση του σημείου M (4, 3) από τον άξονα $y'y$ είναι:

A: 4 B: 3 Γ: 7 Δ: 5 E: 2.

3. Η μεσοπαράλληλη ευθεία των ευθειών: $x = -2$, $x = 4$ είναι η:

A: $x = 1$ B: $x = 3$ Γ: $x = 2$ Δ: $x = 0$ E: $y = 1$.

4. Η $y = x$ είναι μεσοπαράλληλη της $x - y = 2$ και της ευθείας:

A: $x + y = 2$ B: $x - y = -2$ Γ: $-x + y = -2$
Δ: $x + y = -2$ E: $x - y = 2$.

5. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1): $3x - 4y + 10 = 0$ και (ϵ_2): $3x - 4y + 20 = 0$.

i. Να δείξετε ότι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.

ii. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής O από τις ϵ_1 και ϵ_2 .

iii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ϵ_1 και ϵ_2 .

(Απ.: ii. $d(O, \epsilon_1) = 2$, $d(O, \epsilon_2) = 4$ iii. $d(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$)

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 10$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες μήκους.

$$(Απ.: y = -3x + 5\sqrt{10} \text{ ή } y = -3x - 5\sqrt{10})$$

7. Δίνονται τα σημεία A (1, 3) και B (-2, 4). Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 8 τ.μ. .

$$(Απ.: M(-6,0) \text{ ή } M(26,0))$$

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το σημείο M (2, 2) και σχηματίζουν με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 8$ τ.μ. .

$$(Απ.: y = -x + 4)$$

9. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου A (1, 1), B (2, 2) και Γ είναι σημείο της ευθείας $y = x + 1$.

$$(Απ.: E = \frac{1}{2})$$

10. α. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών: $2x + y = 4$ και $4x + 2y = 2$.
β. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης αυτών.

$$(Απ.: \text{i. } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ ii. } (\varepsilon): 4x + 2y = 5)$$

11. Δίνονται τα σημεία A (-3, -4) και B (2, 1). Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MAB) = 5$ τ.μ. .

$$(Απ.: \text{Είναι οι ευθείες } x - y = 3 \text{ ή } x - y = -1)$$

12. Σε ένα χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοίο ξεκινά από κάποιο λιμάνι Λ και κατευθύνεται προς το λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης του πλοίου δίνει για κάθε χρονική στιγμή συντεταγμένες: $\Pi_1(t - 40, t - 10)$, $t \geq 0$.

α. Πού βρίσκεται το λιμάνι Λ στον χάρτη;

β. Πόσο απέχει το λιμάνι Λ από το λιμάνι Ο;

γ. Βρίσκεται το πλοίο στη σωστή πορεία για το λιμάνι Ο;

δ. Αν η θέση ενός άλλου πλοίου προσδιορίζεται από το σημείο $\Pi_2(t + 10, t - 30)$, $t \geq 0$ υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συναντηθούν;

ε. Ποια είναι η απόστασή τους τη χρονική στιγμή $t = 10$;

$$(Απ.: \text{i. } \Lambda(-40, -10), \text{ ii. } (\Lambda\text{O}) = 10\sqrt{17}, \text{ iii. Όχι, iv. Όχι, v. } d = 10\sqrt{29})$$

13. Ανοικτά κάποιου λιμανιού υπάρχουν τρεις σηματοδούρες που οριοθετούν μία τριγωνική περιοχή στην οποία απαγορεύονται οι καταδύσεις. Ο υπεύθυνος λιμενάρχης, ο οποίος βρίσκεται σε ένα πλοίο, στέλνει τρεις βάρκες με δύο ναύτες στην καθεμία να μετρήσουν τις αποστάσεις των σηματοδούρων από το πλοίο. Η πρώτη βάρκα κινείται με 4 ναυτικά μίλια

δυτικά και 2 μίλια βόρεια και εκεί συναντά την πρώτη σηματοδούρα. Η δεύτερη βάρκα πλέει 4 μίλια νότια και 4 ανατολικά και εκεί συναντά τη δεύτερη σηματοδούρα. Η τρίτη βάρκα πλέει 6 μίλια βόρεια και 2 μίλια ανατολικά και συναντά την τρίτη σηματοδούρα. Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογίσετε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής.

(Απ.: $E = 34$)

14. Η ευθεία $3x - 5y = 2$ χωρίζει το επίπεδο xOy σε δύο ημιεπίπεδα I και II. Τα σημεία $(1, -2)$ και $(-2, 1)$ βρίσκονται:

Α. και τα δύο στο ίδιο ημιεπίπεδο;
 Β. σε διαφορετικά ημιεπίπεδα;
 Γ. το ένα βρίσκεται στο I και το άλλο πάνω στην ευθεία;
 Δ. και τα δύο βρίσκονται πάνω στην ευθεία;
 Ε. κανένα από τα παραπάνω;

15. Αν η απόσταση του σημείου $(a, 2a)$, όπου $a > 1$, από την ευθεία $13x + y = 5$ είναι $\sqrt{170}$, τότε το a είναι ίσον με:

Α. $\frac{5}{11}$ Β. 7 Γ. $\frac{66}{7}$ Δ. 5 Ε. 3.

16. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,6)$.

(Απ.: $y = 3x$ ή $y = -3x$)

17. Να βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y - 24 = 0$.

(Απ.: $M(-12,0)$ ή $M(3,0)$)

18. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(4, -5)$, $\Gamma(-3, 1)$.

(Απ.: $E = 20$)

19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την τομή των ευθειών $\varepsilon_1 : x + y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1.

(Υπ. Βρίσκουμε την τομή των δύο ευθειών και από τη δοσμένη απόσταση βρίσκουμε το λ .

Είναι $\zeta : x = 1$ ή $\zeta : y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$)

20. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\varepsilon : x + y - 1 = 0$ που απέχουν από την ευθεία $\zeta : 3x + 4y - 2 = 0$ απόσταση ίση με 2.

(Απ.: Έστω $M(\mu, \nu)$ τα ζητούμενα σημεία και βρίσκουμε δύο σχέσεις με μ, ν . $M(-8, 9)$ ή

$M(12, -11)$)

21. Έστω τα σημεία A (1, 1) και B (5, 5) και η ευθεία $x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να είναι ίσο με 4 τ.μ. .

(Απ.: Γ(-5, -3) ή Γ(3, 1))

22. i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παραλλήλων ευθειών:

$$\varepsilon_1: ax + by + \gamma_1 = 0 \text{ και } \varepsilon_2: ax + by + \gamma_2 = 0, \text{ είναι ίση με } \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ii. Να δείξετε ότι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $ax + by + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται στις ευθείες: $\zeta_1: 5x - 12y - 65 = 0$ και $\zeta_2: 5x - 12y + 26 = 0$.

(Απ.: i. Παίρνουμε σημείο στην ε_1 και βρίσκουμε την απόστασή του από την ε_2 . ii. $E = 49$)

23. Η ευθεία με εξίσωση $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, με λ πραγματικό περιγράφει την φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Φ

ii. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία K(2, 2) Λ(-1, 5) και M(1, 3). Βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα K, Λ, M.

iii. Βρείτε ποιο από τα πλοία K, Λ βρίσκεται πλησιέστερα στην φωτεινή ακτίνα που περνάει από το M.

iv. Βρείτε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M.

(Απ.: i. (Η δοσμένη εξίσωση είναι δέσμη ευθειών) $\Phi(-1, 2)$ ii. $\Phi K : y = 2$, $\Phi \Lambda : x = -1$,

$\Phi M : y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$, iii. Βρίσκουμε τις αποστάσεις των K, Λ από την ευθεία ΦM.

iv. $(\Phi \Lambda M) = 3$)

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δύο πλοία αναχωρούν από τα λιμάνια του Πειραιά και της Ραφήνας την 6^η πρωινή ώρα κινούμενα ευθύγραμμα. Οι συντεταγμένες των πλοίων στο ραντάρ του κέντρου επιχειρήσεων από το οποίο παρακολουθούνται είναι A (t + 1, t-1) και B (20 - t, t +20) αντίστοιχα, όπου t ο χρόνος, σε ώρες που έχει περάσει από την στιγμή της αναχώρησής τους. Αν ο Πειραιάς βρίσκεται στη θέση Π(1, -1) και η Ραφήνα στη θέση Ρ(20, 20) τότε:

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα πλοία.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης των δύο πλοίων .

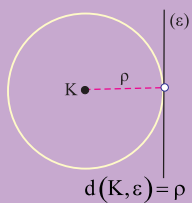
γ. Να βρείτε ποιο από τα δύο πλοία έχει διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση μέχρι το μεσημέρι στις 12.

δ. Να βρείτε ποιο πλοίο θα διέλθει πιο κοντά από τη βραχονησίδα Ι (2002, 2002).

ε. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα δύο πλοία έχει τη δυνατότητα χωρίς να εκτραπεί από την πορεία του να περισυλλέξει ναυαγούς που βρίσκονται στη θέση Ν(2040, -2000).

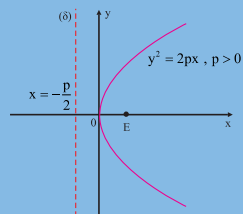
7^ο μάθημα

Κύκλος



8^ο μάθημα

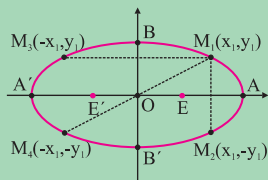
Παραβολή



3^ο Κεφάλαιο

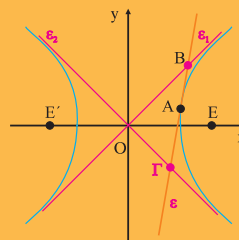
9^ο μάθημα

Έλλειψη



10^ο μάθημα

Υπερβολή

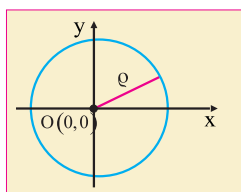




Ο κύκλος

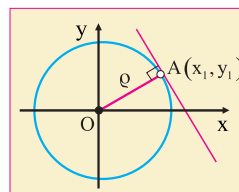
Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



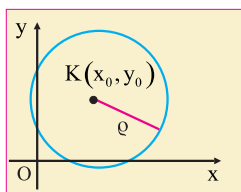
Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ :

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ στο σημείο $A(x_1, y_1)$:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$\text{Η εξίσωση } x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad (1), \quad A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$$

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με

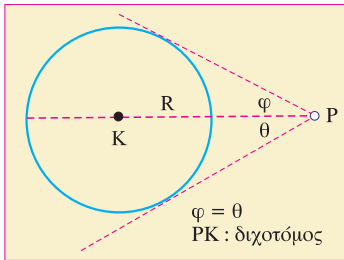
κέντρο το σημείο: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

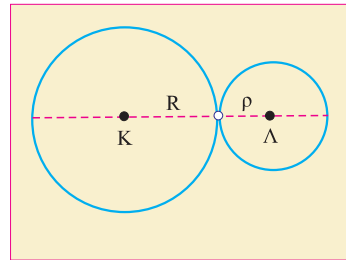
Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Βασικά στοιχεία από την Ευκλείδεια Γεωμετρία

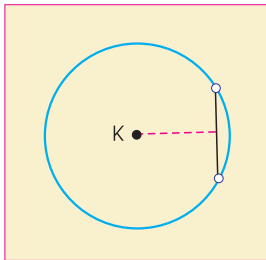
Για την επίλυση των ασκήσεων στον κύκλο είναι χρήσιμες οι παρακάτω προτάσεις:



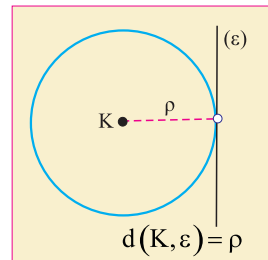
1. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο P προς έναν κύκλο, είναι ίσα και η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία τους.



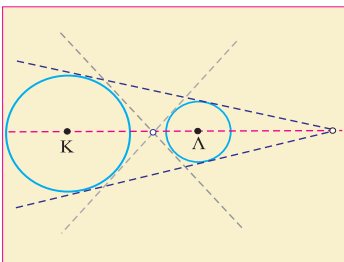
2. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά σημεία.



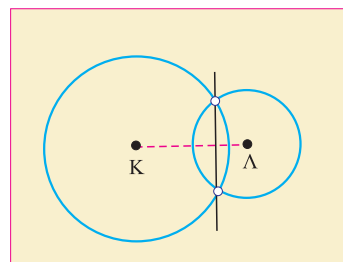
3. Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής στην οποία αντιστοιχεί.



4. Μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, αν και μόνο αν, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία αυτή είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

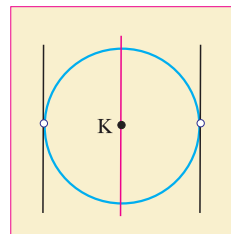


5. Οι κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων τέμνονται πάνω στην ευθεία της διαμέτρου τους.



6. Η διάκεντρος δύο κύκλων, που τέμνονται είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

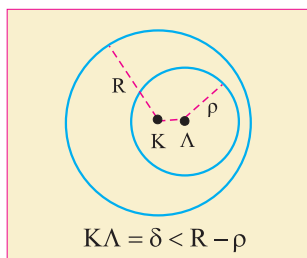
7. Όταν ένας κύκλος εφάπτεται σε δύο παράλληλες ευθείες, τότε το κέντρο του βρίσκεται στη μεσοπαράλληλο των δύο ευθειών.



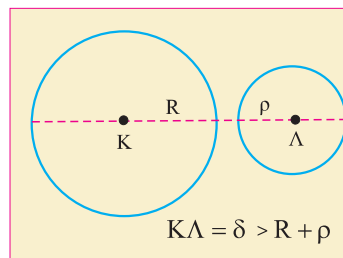
Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων (Λ, ρ) και (K, R) εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου δ (του ευθυγράμμου τμήματος, που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων) με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

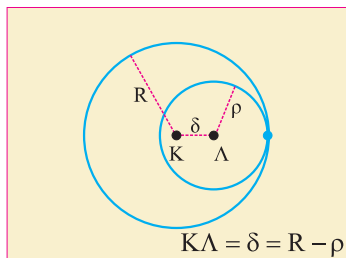


α. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta < R - \rho$

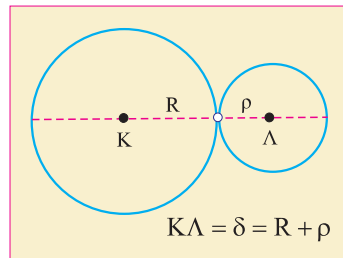


β. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εξωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta > R + \rho$

2. Εφαπτόμενοι κύκλοι



α. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής). Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (K, R) , αν και μόνον αν $\delta = R - \rho$

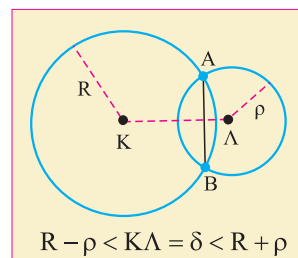


β. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνον αν $\delta = R + \rho$.

3. Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι τέμνονται δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνον αν $R - \rho < \delta < R + \rho$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία των δύο κύκλων, λέγεται **κοινή χορδή** των κύκλων.



Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$. Εργαζόμαστε ως εξής:

α. Γράφουμε την εξίσωση του κύκλου: $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1)

β. Επειδή $x^2 = x \cdot x$ και $y^2 = y \cdot y$ η (1) γράφεται: $x \cdot x + y \cdot y = \rho^2$

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα οπότε παίρνουμε:

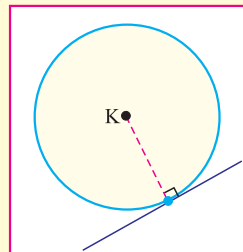
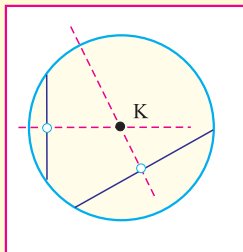
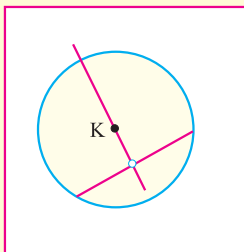
$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση κύκλου πρέπει να βρούμε το κέντρο του, έστω $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα του έστω R. Τότε η εξίσωση του είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Το κέντρο αν δεν δίνεται μπορούμε να το προσδιορίσουμε, αν αναγνωρίσουμε δύο ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκεται. Τότε το προσδιορίζουμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών των ευθειών. Η ακτίνα του κύκλου στη συνέχεια προσδιορίζεται ως η απόσταση του κέντρου K από ένα σημείο του κύκλου ή ως η απόσταση του K από μια ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο.



1. Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
2. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο, μη παράλληλων, χορδών του είναι το κέντρο του κύκλου.
3. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

- α. Έχει κέντρο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$
- β. Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.
- γ. Έχει κέντρο το σημείο $(-2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2, 3)$.
- δ. Έχει κέντρο $\Lambda(4, 2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\epsilon): 3x + 4y - 1 = 0$.
- ε. Διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$, $B(0, 0)$ $\Gamma(3, 0)$.
- στ. Όταν έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία με εξίσωση $(\epsilon): y = 3x - 7$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, -1)$.

Λύση

α. Αφού έχει κέντρο $O(0, 0)$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Το σημείο A επαληθεύει την εξίσωση

του κύκλου. Έτσι έχουμε $1^2 + 2^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 5$. Οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: x^2 + y^2 = 5.$$

β. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου το μέσο του θα ταυτίζεται με το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

$$\text{Εστω } K(x_0, y_0) \text{ το μέσο του } AB, \text{ τότε: } \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

Οπότε το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(-1, 4)$.

Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μισό της διαμέτρου, δηλαδή το μισό της απόστασης AB . Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \frac{1}{2}(AB) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2 + (5-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

Άρα, ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $C: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

γ. Όταν γνωρίζουμε το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ένα σημείο του τότε η μεταξύ τους απόσταση ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή:

$$\rho = (LA) = \sqrt{(-2+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

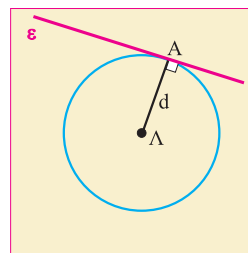
Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι 2 και η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2.$$

δ. Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2 + (y-2)^2 = \rho^2$.

Επειδή εφάπτεται στην (ϵ) πρέπει: $d(A, \epsilon) = \rho$.

$$\text{Έτσι: } \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{19}{5}. \text{ Άρα } C: (x-4)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{19}{5}\right)^2$$



ε. α' τρόπος

Οι μεσοκάθετοι των χορδών AB και BΓ τέμνονται στο κέντρο του κύκλου. Βρίσκουμε αυτές τις μεσοκαθέτους (δ), (ε).

Έστω M μέσο του AB. Τότε $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Επειδή $\lambda_{AB} = 1$ είναι $\lambda_\delta = -1$

$$\text{Άρα } \delta: y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = 1$$

Έστω N μέσο BΓ. Τότε $N\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ και επειδή $(\epsilon) \perp x'x$ είναι: $x = \frac{3}{2}$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των (δ), (ε) για να βρούμε το κέντρο του κύκλου.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Επιπλέον έχουμε } R = KB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι: } C: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

β' τρόπος

$$\text{Η εξίσωση του κύκλου είναι } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (1).$$

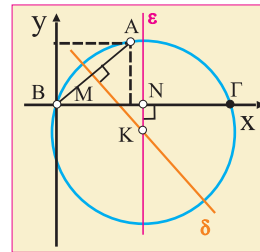
Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των τριών σημείων στην (1) διαδοχικά. Προκύπτει έτσι ένα σύστημα 3x3 (τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_0, y_0, R).

$$(1 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \quad (2)$$

$$(0 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = R^2 \quad (3)$$

$$(3 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = R^2 \quad (4)$$

$$\text{Από την (4) έχουμε } 9 - 6x_0 + x_0^2 + y_0^2 = R^2 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$



Αντικαθιστούμε το x_0 στις (2) και (4) και έχουμε:

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + y_0^2 = R^2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{4} + 1 - 2y_0 + y_0^2 - \frac{9}{4} - y_0^2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{\frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{4}}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε τα x_0, y_0 στην (4) και βρίσκουμε το R .

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{5}{2}$$

Επομένως ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

στ. Το κέντρο $K(\alpha, \beta)$ του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής της (ε) και της μεσοκάθετης (η) στο AB . Η ακτίνα του είναι: $R = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2}$ (1)

Μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο: $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι: $\lambda_{AB} = \frac{1+1}{1-2} = -2$,
οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

(η) : $\lambda_{\eta} = \frac{1}{2}$ (αφού $(\eta) \perp AB$).

Από την ευθεία (η) γνωρίζουμε το σημείο M και το συντελεστή διεύθυνσης λ_{η} . Οπότε η

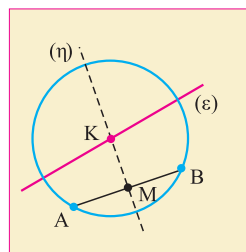
εξίσωση της (η) είναι $\eta: y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ (2)

Η εξίσωση της (ε) είναι $\varepsilon: y = 3x - 7$ (3)

Από τη λύση του συστήματος των (2) και (3) βρίσκουμε: $x = \frac{5}{2}$ και $y = \frac{1}{2}$.

Άρα είναι $K\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $R = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ (λόγω της (1)).

και η εξίσωση του κύκλου είναι: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.



Παράδειγμα 2

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 5 = 0$ στο σημείο της $A(6, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(6, 1)$.

Λύση

Θα βρούμε το κέντρο του κύκλου ως σημείο τομής δύο ευθειών. Της κάθετης στην εφαπτομένη, έστω δ , στο σημείο A και της μεσοκάθετης (η) της χορδής AB .

Είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 1$. Επομένως $\delta: y + 1 = x - 6 \Leftrightarrow x - y = 7$.

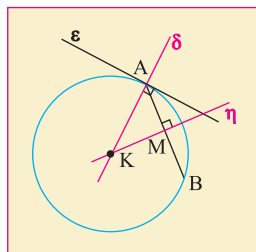
Θα βρούμε τώρα τη μεσοκάθετο (η) του ευθύγραμμου τμήματος AB . Έστω M μέσο AB τότε $M(6, 0)$.

Παρατηρούμε ότι $AB \parallel y'x$, επομένως η μεσοκάθετος (η) της AB , είναι παράλληλη στον $x'x$. Αφού διέρχεται από το σημείο $M(6, 0)$ έχει εξίσωση $y = 0$ (είναι ο άξονας $x'x$).

Λύνουμε το σύστημα των (δ) και (η):
$$\left. \begin{array}{l} x - y = 7 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 0 \end{array} . \text{ Επομένως } K(7, 0)$$

Η ακτίνα R είναι ίση με $R = (KA) = \sqrt{(7-6)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$.

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-7)^2 + y^2 = 2$.

**Κατηγορία - Μέθοδος 2**

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho^2$

1ος τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο του κύκλου έστω (x_1, y_1)

που είναι: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ (1)

Για να προσδιορίσουμε τα (x_1, y_1) (αν δεν δίνονται) πρέπει να φτιάξουμε σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x_1, y_1 . Η μια εξίσωση είναι πάντοτε $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$ αφού το σημείο (x_1, y_1) είναι το σημείο επαφής και η δεύτερη προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης.

2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $y = \lambda x + \beta$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση $d(O, \varepsilon) = \rho$, όπου $O(0,0)$ και ρ η ακτίνα του κύκλου. Παίρνουμε έτσι μια εξίσωση με αγνώστους τα λ, β . (Συχνά ο συντελεστής λ προσδιορίζεται εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης και έτσι από της παραπάνω εξίσωση προσδιορίζουμε το β).

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ αν :

α. Το σημείο επαφής είναι το $A(1, \sqrt{3})$.

β. Είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

γ. Είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = \frac{1}{2}x + 1$.

δ. Διέρχεται από το σημείο $B(0, 4)$.

Λύση

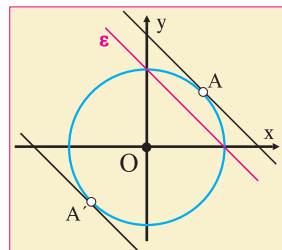
α. Αφού μας δίνεται το σημείο επαφής, έχουμε $1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 4$.

1ος τρόπος

β. Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη του κύκλου στο A έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = 4$ επομένως έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\phi} = -\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή είναι παράλληλη στην (ε) θα

είναι $\lambda_{\varepsilon\phi} = \lambda_{\varepsilon} = -1$. Άρα $-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ (1)



Το σημείο $A(x_1, y_1)$ ανήκει στο κύκλο, δηλαδή ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = 4$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $2x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}$ και $y_1 = \pm\sqrt{2}$

Άρα $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $A(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ οπότε :

$$\text{εφα}_A : \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 4 \quad \text{και} \quad \text{εφα}_{A'} : -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4.$$

2ος τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι της μορφής: $y = -x + \beta \Leftrightarrow x + y - \beta = 0$ (1). Εφάπτεται η (1) στον κύκλο, αν και μόνο αν:

$$d(O, (1)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|0+0-\beta|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2 \Leftrightarrow |\beta| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta = \pm 2\sqrt{2}.$$

οπότε υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς την (ε), οι ευθείες:

$$x + y - 2\sqrt{2} = 0 \quad \text{και} \quad x + y + 2\sqrt{2} = 0$$

γ. Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$\lambda_{\varepsilon\phi} = -\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στη (ζ) έχουμε: $\lambda_{\varepsilon\phi} \cdot \lambda_{\zeta} = -1$

Είναι $\lambda_{\zeta} = \frac{1}{2}$, επομένως $\lambda_{\varepsilon\phi} = -2$. Άρα $-\frac{x_1}{y_1} = -2 \Leftrightarrow x_1 = 2y_1$ (1)

Αφού το A ανήκει στον κύκλο ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 4$ (2)

$$\text{Από (1), (2) έχουμε } 4y_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 5y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{ή } y_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ τότε είναι αντίστοιχα και } x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ ή } x_1 = \frac{-4}{\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{5}.$$

Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής και επειδή x_1, y_1 ομόσημοι λόγω της (1) είναι τα:

$$A\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{και} \quad A'\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων σ' αυτά τα σημεία είναι:

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4 \quad \text{και} \quad \frac{-4\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4.$$

δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $xx_1 + yy_1 = 4$, όπου $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

$$\text{Αφού διέρχεται από το } B(0,4) \text{ ισχύει: } 0 \cdot x_1 + 4y_1 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή το } A \text{ ανήκει στον κύκλο, ισχύει: } x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}$ ή $x_1 = -\sqrt{3}$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής

τα $A(\sqrt{3}, 1)$ και $A(-\sqrt{3}, 1)$ οι εξισώσεις των εφαπτομένων σ' αυτά είναι:

$$\sqrt{3}x + y = 4 \quad \text{και} \quad -\sqrt{3}x + y = 4 \text{ αντίστοιχα.}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Πως βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, όταν το κέντρο του είναι το $K(x_0, y_0) \neq (0,0)$ σε γνωστό σημείο του έστω (x_1, y_1)

1ος τρόπος

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης.

Τότε επειδή $\overline{KA} \perp \overline{AM}$, $\overline{KA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ και

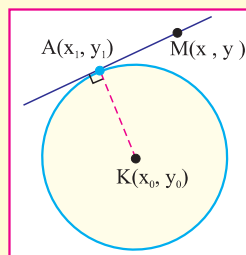
$$\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1) \text{ έχουμε:}$$

$$\overline{KA} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0 \text{ που}$$

είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

2ος τρόπος

Επειδή γνωρίζουμε τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $K(x_0, y_0)$ γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης της AK άρα και της εφαπτομένης, (αφού είναι κάθετη στην AK). Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - y_1 = \lambda_{AM}(x - x_1)$. Αν δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της AK η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y = y_1$.



Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης

α. του κύκλου $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ στο σημείο του $A(4, 2)$

β. του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ στο σημείο του $A(1, 3 + \sqrt{3})$

Λύση

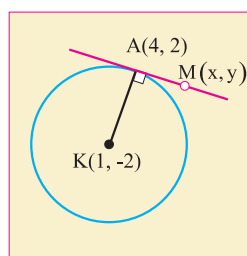
α. α' τρόπος

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης. Είναι $MA \perp AK$ οπότε

$$\lambda_{AK} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda_{MA} = -\frac{3}{4}$$

Γνωρίζουμε ένα σημείο της εφαπτομένης και το συντελεστή διεύθυνσης αυτής, επομένως η εξίσωση της είναι:

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow 3x + 4y = 20.$$



β' τρόπος

Για το σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{KA} \cdot \overline{AM} &= 0 \Leftrightarrow (4-1)(x-4) + (2-(-2))(y-2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3(x-4) + 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y = 20 \end{aligned}$$

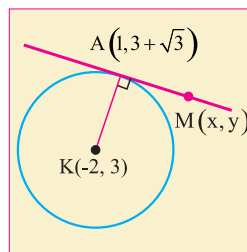
που είναι η ζητούμενη εξίσωση.

β. Ο κύκλος έχει κέντρο $K(-2, 3)$ οπότε

$$\lambda_{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overset{AM \perp AK}{\Leftrightarrow} \lambda_{AM} = -\sqrt{3}$$

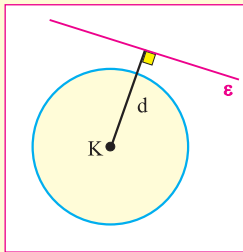
Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - (3 + \sqrt{3}) = -\sqrt{3}(x - 1)$$

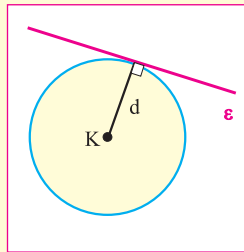
**Κατηγορία - Μέθοδος 4**

Για να δείξουμε ότι δοσμένη ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, δείχνουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν την ευθεία, ισούται με την ακτίνα. Με τη βοήθεια της απόστασης του κέντρου από την ευθεία προσδιορίζουμε και τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου.

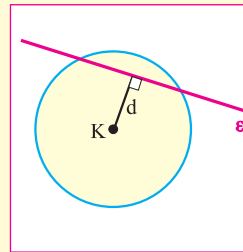
Συγκεκριμένα ισχύουν:



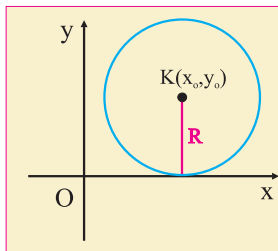
• αν $d(K, \varepsilon) > R$ η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



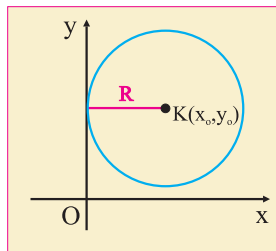
• αν $d(K, \varepsilon) = R$ η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.



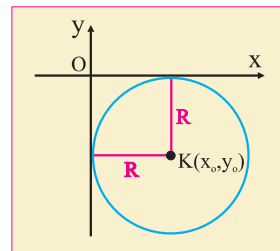
• αν $d(K, \varepsilon) < R$ η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα x ισχύει $|y_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα y ισχύει $|x_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται και στους δύο άξονες τότε $|x_0| = |y_0| = R$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $(x+1)^2 + y^2 = 9$ και της ευθείας $(\varepsilon): 2x - y - 3 = 0$.

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το $K(-1, 0)$ και η ακτίνα του $R = 3$. Οπότε

$$d(K, (\varepsilon)) = \frac{|2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 3 = R$$

Άρα η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται σε δύο σημεία.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το $K(4, 0)$ και η ακτίνα του $R = \frac{\sqrt{64 - 32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Είναι } d(K, \varepsilon) = \frac{|4 - 0|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = R$$

Δηλαδή $d(K, \varepsilon) = R$, επομένως η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο.

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μήκος της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτινών τους. Στη σελίδα 99 αναφέρονται οι διάφορες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 σε καθεμία από τις :

α. $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ και $C_2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

β. $C_1 : (x+3)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + (y+6)^2 = 1$

Λύση

α. Ο C_1 έχει κέντρο $K_1(0,0)$ και ακτίνα $R_1 = 3$ και ο

C_2 έχει κέντρο $K_2(-2,1)$ και ακτίνα $R_2 = 2$.

Η απόσταση των δύο κέντρων είναι

$$d(K_1K_2) = \sqrt{5}. \text{ Οπότε}$$

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

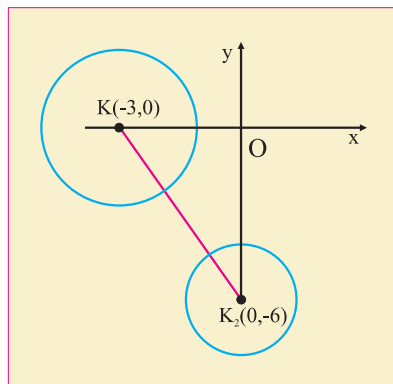
δηλαδή οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

β. Είναι $K_1(-3,0)$ $R_1 = 2$, $K_2(0,-6)$ $R_2 = 1$

(βλέπε σχήμα)

$$\text{Επομένως } d(K_1K_2) = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \text{ και}$$

$R_1 + R_2 = 3$. Οπότε $d > R_1 + R_2$ και οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία (είναι ξένοι μεταξύ τους).

**Κατηγορία - Μέθοδος 6**

Παραμετρική εξίσωση κύκλου.

Για να δείξουμε ότι μια “οικογένεια” κύκλων διέρχεται από το ίδιο σημείο μετατρέπουμε την εξίσωση σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο και εξισώνουμε τους συντελεστές με το μηδέν.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ (1)

Να δείξετε ότι:

- α. Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του
- β. Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;
- γ. Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ στο σημείο Α.

(Θέμα Πανελληνίων).

Λύση

α. Μετασχηματίζουμε τη σχέση (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2nx + 2ny - 2n \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2nx - 2ny + 2n + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x(-2 - 2n) + (-2n)y + 2n + 1 = 0$$

Η τελευταία σχέση είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ η οποία παριστάνει κύκλο

όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Έχουμε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2 - 2n)^2 + (-2n)^2 - 4(2n + 1) =$

$$4 + 8n + 4n^2 + 4n^2 - 8n - 4 = 8n^2 > 0$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(1 + n, n)$ και ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \text{ δηλαδή } R = \frac{\sqrt{8n^2}}{2} = \sqrt{2}n \quad (2)$$

β. Η (1) παριστάνει 1999 κύκλους αφού $n = 1, 2, \dots, 1999$ και θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

i. Μετασχηματίζουμε την (1) σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο.

$$\text{Έχουμε } (1) \Leftrightarrow 2n(x + y - 1) - (x - 1)^2 - y^2 = 0$$

ii. Εξισώνουμε τους συντελεστές με το 0 και υπολογίζουμε τα x, y :

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ \text{και} \\ (x - 1)^2 + y^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 1, y = 0$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλους που διέρχονται όλοι από το $A(1, 0)$ για κάθε τιμή του n .

γ. Για να δείξουμε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται σε όλους τους κύκλους, αρκεί να δείξουμε ότι το κέντρο οποιουδήποτε κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα

του κύκλου, δηλαδή $d(K, \varepsilon) = R$. Αλλά $d(K, \varepsilon) = \frac{|1+n+n-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}n$

και $R = \sqrt{2}n$ (λόγω της (2))

Επομένως όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ευθεία $x + y - 1 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 7

Πώς βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ενός κύκλου (c) με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ που διέρχονται από σημείο $P(x_1, y_1)$

Γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(x_1, y_1)$ που είναι:

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1), \lambda \in \mathbb{R} \quad (\varepsilon) \quad \text{και} \quad x = x_1 \quad (\kappa)$$

Πρώτον εξετάζουμε αν η $x = x_1$ εφάπτεται στον κύκλο (c), δηλαδή αν το σύστημα των (c) και (κ) έχει διπλή λύση.

Δεύτερον απαιτούμε οι ευθείες (ε) να εφάπτονται στον (c), δηλαδή να ισχύει: $d(K, \varepsilon) = \rho$ (απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε)), οπότε προσδιορίζουμε το λ , και επομένως τις εφαπτόμενες (ε) .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.

Λύση

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + k$ η ζητούμενη ευθεία, τότε επειδή το $A \in (\varepsilon)$, θα ισχύει: $\sqrt{3} = \lambda + k$ (1)

Πρέπει:

$$d(O, \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow k^2 = 1 + \lambda^2 \quad (2)$$

Η (2) γράφεται, (λόγω της (1)):

$$(\sqrt{3} - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \cdot \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Τότε είναι: $k = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου είναι η:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Η κάθετη ευθεία $(\eta): x = 1$ που διέρχεται από το A και δεν περιγράφεται από την εξίσωση

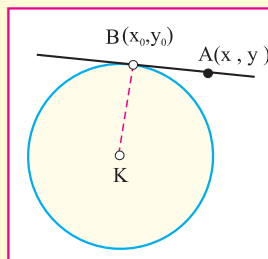
$y = \lambda x + k$ πρέπει να εξετάζεται, μήπως είναι εφαπτομένη του κύκλου. Εδώ προφανώς η ευθεία $x = 1$ είναι εφαπτομένη, αφού η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

Κατηγορία - Μέθοδος 8

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, που διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x, y)$ είναι ο εξής:

Προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $B(x_0, y_0)$ και στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση της AB . Για να προσδιορίσουμε τα x_0, y_0 χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Η πρώτη προκύπτει αμέσως, αφού το B ανήκει στον κύκλο (c), άρα τα x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου (c). Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{KB} \cdot \vec{AB} = 0, \text{ αφού είναι } \vec{KB} \perp \vec{AB}.$$



Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, που διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.

Λύση

Για το σημείο επαφής $B(x_0, y_0)$ ισχύει: $x_0^2 + y_0^2 = 1$ (1)

Είναι $\vec{KB} = (x_0, y_0)$ και $\vec{AB} = (x_0 - 1, y_0 - \sqrt{3})$

Επειδή $\vec{KB} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{KB} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot (x_0 - 1) + y_0 \cdot (y_0 - \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - x_0 - \sqrt{3}y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0\sqrt{3} = 1 \quad (2) \quad (x_0^2 + y_0^2 = 1).$$

Με αντικατάσταση του x_0 από την (1) στην (2) παίρνουμε:

$$(1 - y_0\sqrt{3})^2 + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow 4y_0^2 - 2\sqrt{3}y_0 = 0 \Leftrightarrow 2y_0(2y_0 - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0 \text{ ή } y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Για $y_0 = 0$ είναι $x_0 = 1$ και για $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Έχουμε επομένως δύο σημεία επαφής, τα: $B(1, 0)$ και $B'(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που έχουν εξισώσεις:

$$AB: x = 1 \text{ και } AB': y - \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - 1}(x - 1) \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0.$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο.

Λύση

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

Έχουμε:

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2.$$

Άρα το κέντρο του κύκλου C είναι το $K(2, 0)$ και η ακτίνα του $\rho = \sqrt{3}$.

Για να τέμνει η ευθεία τον κύκλο θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία να είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ .

$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή: } d(K, \varepsilon) < \rho &\Leftrightarrow \frac{|2\lambda - 0|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{4\lambda^2}{\lambda^2 + 1} < 3 \Leftrightarrow 4\lambda^2 < 3\lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 < 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\lambda| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3} \end{aligned}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές για το λ είναι $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x + y = 1$.

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο του την αρχή των αξόνων, οπότε θα είναι της μορφής: $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Για να εφάπτεται η ευθεία ε στον κύκλο πρέπει η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή:

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων $C_A: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ και

$$C_B: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Λύση

Έστω $M(x, y)$ ένα κοινό σημείο των κύκλων με εξίσωση C_A και C_B . Αφού το M είναι

κοινό σημείο των δύο κύκλων, είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τις εξισώσεις και των δύο κύκλων. Δηλαδή :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \quad \text{και} \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - (x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) &= 4 - 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 2y - 1 &= 4 - 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x - 4y + 5 = 2 \Leftrightarrow 2x - 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Η σχέση όμως στην οποία καταλήξαμε παριστάνει ευθεία και επιπλέον επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο κύκλων. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της κοινής χορδής των δύο κύκλων είναι η ευθεία $2x - 4y + 3 = 0$.

Άσκηση 4

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παρακάτω κύκλου: $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$.

Λύση

Θα λύσουμε την άσκηση με δύο τρόπους:

α' τρόπος: (με εφαρμογή των σχετικών τύπων)

Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(2, -3)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad \rho = 1.$$

β' τρόπος: (με συμπλήρωση τετραγώνων)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = -12 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + (y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2) &= -12 + 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 1^2 \end{aligned}$$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Άσκηση 5

Δείξτε ότι ο κύκλος $(c_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου

$(c_2): x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$ και βρείτε το σημείο επαφής.

Λύση

Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$. Ο κύκλος (c_2) έχει κέντρο $\Lambda(4, 6)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$.

Είναι $|\overline{ΚΛ}| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ και $\rho_1 + \rho_2 = 2 + 3 = 5$, δηλαδή $|\overline{ΚΛ}| = \rho_1 + \rho_2$

που σημαίνει ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, έστω Α, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0 & (2) \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) παίρνουμε: $6x + 8y - 52 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 26 = 0$ (3)

Η ευθεία με εξίσωση $3x + 4y - 26 = 0$ είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Είναι $y = \frac{-3x + 26}{4}$, οπότε από την (1) έχουμε:

$$x^2 + \left(\frac{-3x + 26}{4}\right)^2 - 2x - 4\left(\frac{-3x + 26}{4}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{14}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}.$$

Για $x = \frac{14}{5}$ προκύπτει $y = \frac{22}{5}$. Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(\frac{14}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα R. Έστω $A(x_1, y_1)$ σημείο του κύκλου. Να δείξετε, ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου σε σημείο του Α είναι:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = R^2$$

Λύση

Έστω (ε) η εφαπτομένη στο Α και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της.

Είναι $\overline{KA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ και $\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1)$

Επειδή $\overline{KA} \perp \overline{AM}$ ισχύει: $\overline{KA} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x - x_0) - (x_1 - x_0)](x_1 - x_0) + [(y - y_0) - (y_1 - y_0)](y_1 - y_0) = 0$$

(προσθέσαμε και αφαιρέσαμε στην πρώτη παρένθεση το x_0 και στην τρίτη παρένθεση το y_0).

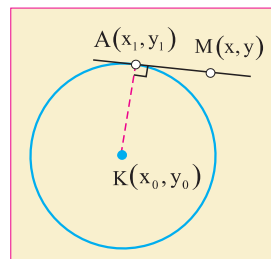
$$\Leftrightarrow (x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \quad (1).$$

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Επειδή το Α είναι σημείο του κύκλου, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση του.

$$\text{Έτσι } (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \quad (3)$$



Η (2) με βάση την (3) γράφεται:

$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = R^2$, που είναι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(x_1, y_1)$.

Άσκηση 7

Με πλευρές τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $ΑΓΖΗ$. Να δείξετε ότι:

α. Τα σημεία A, Δ, Z είναι συνευθειακά

β. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχεται από το μέσον της ΔZ .

Λύση

Όταν έχουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο δε μας δίνονται συντεταγμένες σημείων, ούτε εξισώσεις ευθειών ή άλλων γραμμών, συνηθίζουμε να εργαζόμαστε ως εξής:

I. Εκλέγουμε σύστημα αξόνων θεωρώντας ως αρχή ένα σημείο του σχήματος μας.

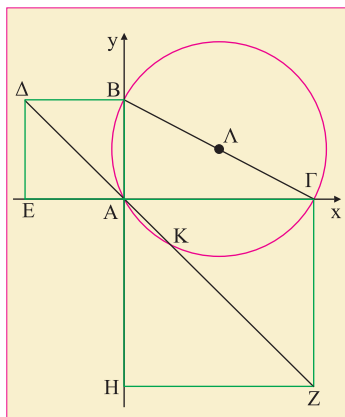
II. Θέτουμε συντεταγμένες στα σημεία του σχήματος

III. Τα δεδομένα της άσκησης καθώς και τα ζητούμενα τα εκφράζουμε συναρτήσει αυτών των συντεταγμένων.

Έτσι στο συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέγουμε οι άξονες να περιέχουν τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και η αρχή των αξόνων να είναι η κορυφή A . (όπως στο σχήμα).

Στο σημείο Γ δίνουμε συντεταγμένες $(\gamma, 0)$, αφού ανήκει στον άξονα x' . Δεδομένου ότι το $ΑΓΖΗ$ είναι τετράγωνο, τα σημεία Z και H έχουν συντεταγμένες $(\gamma, -\gamma)$ και $(0, -\gamma)$ αντίστοιχα.

Με την ίδια λογική εργαζόμενοι, δίνουμε συντεταγμένες και στα σημεία B, Δ, E και έχουμε $B(0, \beta)$, $E(-\beta, 0)$ και $\Delta(-\beta, \beta)$.



α. Τα σημεία Z και Δ ανήκουν στην ευθεία $y = -x$ (αφού επαληθεύουν την εξίσωσή της).

Αυτή ως γνωστόν διέρχεται από την αρχή A των αξόνων. Επομένως τα σημεία Z, A και Δ είναι συνευθειακά.

β. Το K είναι μέσον του ΔZ , επομένως έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\gamma - \beta}{2}, \frac{\beta - \gamma}{2}\right)$.

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει κέντρο Λ το μέσο της υποτεινούσας $B\Gamma$ (αφού η γωνία A είναι ορθή και είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, γνωρίζουμε ότι βαίνει σε ημικύκλιο).

Έχουμε $\Lambda\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

Η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι $R = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{2}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι: $C: \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4}$

Θα εξετάσουμε αν το μέσον της ΔΖ, το Κ, επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου.

Έχουμε: $\left(\frac{\gamma - \beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4}$ που ισχύει.

Επομένως ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον της ΔΖ.

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σταθερά σημεία Α(2,0) και Β(-2,0) είναι C (σταθερός) και διάφορος της μονάδας.

Λύση

Εστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

$$\text{Είναι } \frac{d(M, A)}{d(M, B)} = C \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = C \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = C^2 [(x+2)^2 + y^2] \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = C^2 x^2 + 4C^2 x + 4C^2 + C^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$C^2 x^2 - x^2 + C^2 y^2 - y^2 + 4C^2 x + 4x + 4C^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(C^2 - 1)x^2 + (C^2 - 1)y^2 + (4C^2 + 4)x + 4C^2 - 4 = 0.$$

Επειδή $C^2 - 1 \neq 0$ ($C \neq 1$), διαιρούμε και τα δύο μέλη με $C^2 - 1$ και έχουμε:

$$x^2 + y^2 + \frac{4C^2 + 4}{C^2 - 1}x + \frac{4(C^2 - 1)}{C^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{4(C^2 + 1)}{C^2 - 1}x + 4 = 0 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A^2 + B^2 - 4\Gamma &= \frac{16(C^2 + 1)^2}{(C^2 - 1)^2} - 16 = \frac{16(C^2 + 1)^2 - 16(C^2 - 1)^2}{(C^2 - 1)^2} \\ &= \frac{16(C^4 + 2C^2 + 1 - C^4 + 2C^2 - 1)}{(C^2 - 1)^2} = \frac{16 \cdot 4C^2}{(C^2 - 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{2(C^2+1)}{C^2-1}, 0\right)$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{4C}{C^2-1}$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: x + y = 0$.

$$(\text{Απ.: } x + y - 2\sqrt{2} = 0 \text{ και } x + y + 2\sqrt{2} = 0)$$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: x + y - 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

$$(\text{Απ.: } (x - 6 + 3\sqrt{2})^2 + (y - 6 + 3\sqrt{2})^2 = (6 - 3\sqrt{2})^2)$$

3. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.

4. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι:

$$C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \text{ και } C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0.$$

$$(\text{Απ.: } \begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 = B_2 \end{cases})$$

5. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

$$(\text{Απ.: } y = 0)$$

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 5 = 0$.

$$(\text{Απ.: } (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2^2)$$

7. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $M(3, 3)$.

$$(\text{Απ.: } x = 3 \text{ και } 5x - 12y + 21 = 0)$$

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $M(3,4)$ και έχουν ακτίνα 10 .

$$(A\pi.: (x-9)^2 + (y-12)^2 = 100 \text{ και } (x+3)^2 + (y+4)^2 = 100)$$

9. Από το σημείο $M(3,2)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA, MB προς τον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB.

$$(A\pi.: 3x + 2y = 2)$$

10. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής δύο κύκλων με κέντρα $K(1,2)$, $\Lambda(3,1)$ και ακτίνες 3 και 2 αντίστοιχα.

$$(A\pi.: 2x - y - 5 = 0)$$

E.

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

- α. Να εξετάσετε αν η οικογένεια των ευθειών:

$$(\varepsilon): (\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - 3\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

διέρχεται από το ίδιο σημείο του επιπέδου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- β. Να καθορίσετε το μέρος του επιπέδου από κάθε σημείο του οποίου διέρχονται δύο ευθείες της οικογένειας (ε) .

- γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε οι ευθείες (ε) που διέρχονται από το M να τέμνονται κάθετα.

(Υπ.: β. Να μετασχηματίσετε την (1) σε εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ . Ζητάμε τα ζεύγη (x,y) για τα οποία η δευτεροβάθμια έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

- γ. Θεωρείστε δύο ευθείες από τις (1) για $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ και χρησιμοποιείστε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των θεωρούμενων ευθειών είναι ίσο με -1)

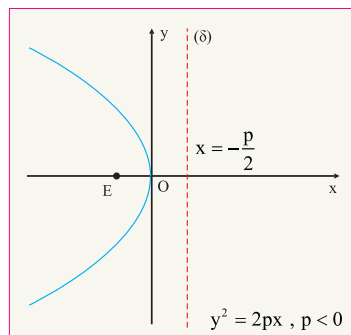
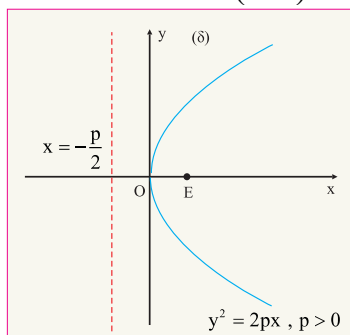
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

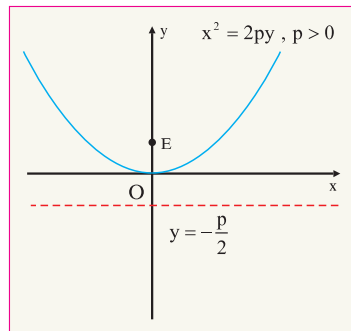
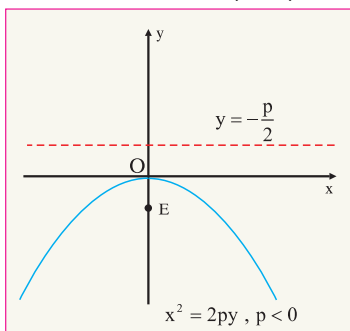
Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο E που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

1. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ $y^2 = 2px$

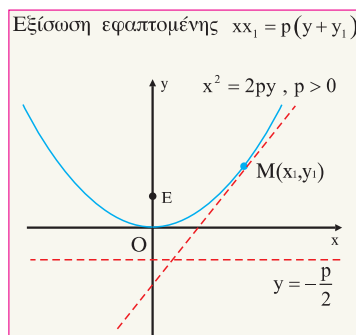
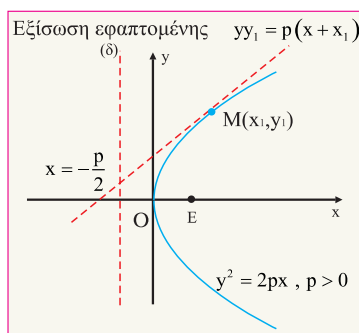


2. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$, και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$ $x^2 = 2py$



Εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $yy_1 = p(x + x_1)$

Εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $xx_1 = p(y + y_1)$



Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Εκτελούμε τα εξής:

α. Γράφουμε την εξίσωση της παραβολής: $y^2 = 2px$ (1)

β. Επειδή $y^2 = y \cdot y$ και $2x = x + x$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $y \cdot y = p(x + x)$

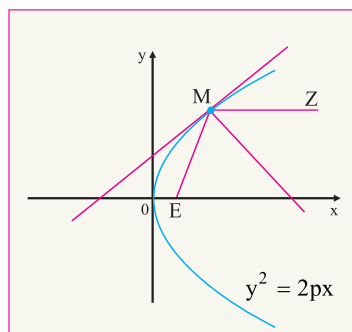
γ. Στο δεύτερο y και x θέτουμε y_1 και x_1 αντίστοιχα και παίρνουμε: $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση της παραβολής $x^2 = 2py$

Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ME και η ημιευθεία MZ , που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.

Η ιδιότητα αυτή της παραβολής έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, π.χ στα παραβολικά τηλεκόπια, στα ραντάρ, στα φανάρια των αυτοκινήτων κ.λ.π.



B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση παραβολής, από τα δεδομένα βρίσκουμε την παράμετρο p .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

β. Έχει εστία $E(-2,0)$ και διευθετούσα $\delta: x-2=0$.

γ. Έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$.

Λύση

α. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και κορυφή το $(0,0)$ θα είναι της μορφής:

$$x^2 = 2py. \text{ Επειδή διέρχεται από το σημείο } (2,2) \text{ ισχύει:}$$

$$2^2 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow p = 1. \text{ Άρα } C: x^2 = 2y.$$

β. Είναι $\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4$. Άρα $C: y^2 = -8x$.

γ. Η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της παραβολής (x_1, y_1) είναι

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1} \Leftrightarrow y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2} \text{ (διότι } y_1^2 = 2px_1, (x_1, y_1) \neq 0).$$

Άρα πρέπει να ισχύουν: $\frac{p}{y_1} = 4$ και $\frac{y_1}{2} = 1$, δηλαδή

$y_1 = 2$ και $p = 8$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής είναι $C: y^2 = 16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν θέλουμε να βρούμε τη σχετική θέση μιας ευθείας με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0^*$ και μιας παραβολής $y^2 = 2px$ ή $(x^2 = 2py)$ επιλύουμε το σύστημα που σχηματίζουν.

Θα οδηγηθούμε σε εξίσωση δευτέρου βαθμού. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

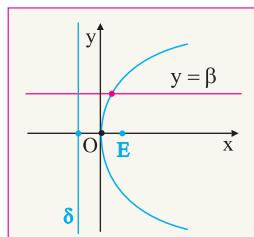
- Αν η διακρίνουσα $\Delta > 0$, τότε το σύστημα μας έχει δύο λύσεις και στην περίπτωση που και οι δύο είναι αποδεκτές η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.
- Αν η διακρίνουσα $\Delta = 0$, τότε το σύστημα έχει μία λύση και η ευθεία εφάπτεται της παραβολής.
- Αν η διακρίνουσα $\Delta < 0$, τότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση και η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με την παραβολή.

*** Παρατήρηση:**

Αν $\alpha = 0$ η ευθεία είναι της μορφής $y = \beta$ και τέμνει την παραβολή

$y^2 = 2px$ σε ένα σημείο χωρίς όμως να εφάπτεται σε αυτήν.

Αναφέρουμε για παράδειγμα την παραβολή $y^2 = 4x$ και την ευθεία $y = 1$

**Παράδειγμα 1**

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, που έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται στην ευθεία $y = 4x + 1$.

Λύση

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα που σχηματίζουν οι δύο εξισώσεις είναι αδύνατο:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 = 2(-y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Όμως η εξίσωση $y^2 + 2y + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ άρα είναι αδύνατη και κατά συνέπεια και το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και κορυφή το $(0,0)$ θα έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας.

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2p \frac{y-1}{4} \\ x = \frac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = py - p \\ x = \frac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - py + p = 0 \quad (1) \\ x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

Επειδή η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή πρέπει η εξίσωση (1) να έχει διπλή λύση και αυτό συμβαίνει όταν και μόνον όταν, έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

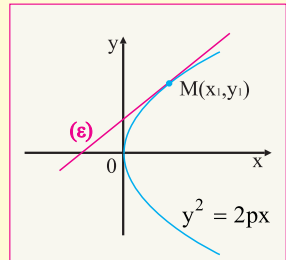
$$\text{Είναι } \Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 - 8p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ p = 8 \end{cases}$$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής θα είναι $C: y^2 = 16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ ή $(x^2 = 2py)$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της έστω $M_1(x_1, y_1)$ που είναι: $yy_1 = p(x + x_1)$ ή $(xx_1 = p(y + y_1))$. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα x_1, y_1 . Αφού έχουμε δύο αγνώστους χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.

Η μια είναι πάντοτε η: $y_1^2 = 2px_1$ ή $(x_1^2 = 2py_1)$ αφού το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή. Η δεύτερη εξίσωση με τα x_1, y_1 προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα του προβλήματος.

**Παράδειγμα 1**

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 2x - y + 2003 = 0$.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη της $C: y^2 = 3x$ στο M θα είναι:

$$\varepsilon: yy_1 = \frac{3}{2}(x + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2y_1}(x + x_1) \quad (1), \text{ με } \lambda_\varepsilon = \frac{3}{2y_1} \quad (y_1 \neq 0).$$

$$\text{Όμως } \varepsilon \parallel \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta \Leftrightarrow \frac{3}{2y_1} = 2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{4}.$$

Επειδή το σημείο M είναι σημείο της παραβολής ισχύει:

$$y_1^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{16}$$

Οπότε η (1) γράφεται :

$$y = \frac{3}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\left(x + \frac{3}{16}\right) \Leftrightarrow y = 2x + \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8y = 16x + 3 \Leftrightarrow 16x - 8y + 3 = 0$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $16x - 8y + 3 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Πως βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ προς την παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$.

α' τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο (x_1, y_1) της παραβολής που είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ (1) και απαιτούμε να διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$.

$$\text{Τότε ισχύουν: } \begin{cases} y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \\ y_1^2 = 2p x_1 \end{cases} \quad \text{αφού η (1) διέρχεται από το } P(x_0, y_0) \text{ και το } (x_1, y_1)$$

ανήκει στην παραβολή.

Από το σύστημα αυτό προσδιορίζουμε τα x_1, y_1 , και συνεπώς την εξίσωση (1).

β' τρόπος

Για να προσδιορίσουμε τις εφαπτόμενες παραβολής που διέρχονται από γνωστό σημείο έστω το $A(x_0, y_0)$, θεωρούμε όλες τις ευθείες που διέρχονται από αυτό το σημείο. Αυτές έχουν εξισώσεις

$$\varepsilon_1: y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x = x_0$$

Εξετάζουμε αν το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_2\}$ έχει διπλή λύση. Αν αυτό συμβαίνει τότε η ε_2 είναι εφαπτομένη. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το λ ώστε το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_1\}$ να έχει διπλή λύση. Για αυτές τις τιμές του λ η ε_1 είναι εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $C: y^2 = 8x$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(-2, 3)$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης ε της C. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο M είναι:

$$(\varepsilon): yy_1 = 4(x + x_1)$$

Όμως

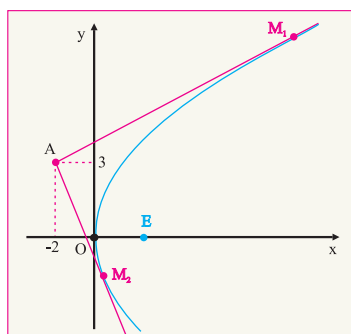
$$A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 3y_1 = 4(-2 + x_1) \Leftrightarrow 3y_1 = -8 + 4x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 = 8 \quad (1)$$

$$\text{Γνωρίζουμε επίσης ότι } M \in C \Leftrightarrow y_1^2 = 8x_1 \quad (2)$$

Για να εντοπίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων

επαφής θα επιλύσουμε το σύστημα που σχηματίζεται από τις (1) και (2) :



$$\begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ 4x_1 - 3y_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 16 + 6y_1 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases}$$

Όμως $y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0$, $\Delta = 100$ και $y_1 = 8$ ή $y_1 = -2$.

$$\text{Αν } y_1 = 8 \text{ έχουμε: } \begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3 \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ x_1 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Αν } y_1 = -2 \text{ έχουμε: } \begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $M_1(8, 8)$ και $M_2\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

Στο $M_1(8, 8)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $8y = 4(x + 8) \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 4$, δηλαδή

$$\varepsilon_1: y = \frac{x}{2} + 4.$$

Στο $M_2\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $-2y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2x - 1$, δηλαδή $\varepsilon_2: y = -2x - 1$

Γνωρίζουμε ότι: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Για την ε_1 έχουμε: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και για την ε_2 έχουμε $\lambda_2 = -2$.

Άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$ που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 2

Για την παραβολή με εξίσωση: $y^2 = 4x$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο $(-1, 0)$.

Λύση

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $(-1, 0)$ έχουν εξισώσεις:

$$y = \lambda(x + 1), \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } x = -1$$

Η $x = -1$ φανερά δεν εφάπτεται της παραβολής.

Εφάπτεται η ευθεία $y = \lambda(x + 1)$ στην $y^2 = 4x$, αν και μόνο αν, το σύστημα: $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \lambda(x + 1) \end{cases}$ έχει διπλή λύση, δηλαδή η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 2)x + \lambda^2 = 0, \quad \lambda \neq 0$$

έχει διπλή ρίζα, δηλαδή διακρίνουσα $\Delta = 0$, που ισοδυναμεί με:

$$4(\lambda^2 - 2)^2 - 4\lambda^2 \cdot \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Για τις τιμές αυτές του λ προκύπτουν οι ευθείες με εξισώσεις: $y = x + 1$ και $y = -x - 1$

Πολική ευθεία

Η εξίσωση της χορδής που ορίζεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται από σημείο $M(x_0, y_0)$ προς την παραβολή $y^2 = 2px$ είναι $yy_0 = p(x + x_0)$.

Απόδειξη

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα σημεία επαφής των εφαπτομένων MA και MB .

Οι εξισώσεις των MA και MB είναι:

$$MA: yy_1 = p(x + x_1) \text{ και } MB: yy_2 = p(x + x_2)$$

Επειδή διέρχονται από το σημείο M , οι συντεταγμένες του τις επαληθεύουν, δηλαδή ισχύουν :

$$y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \quad (1)$$

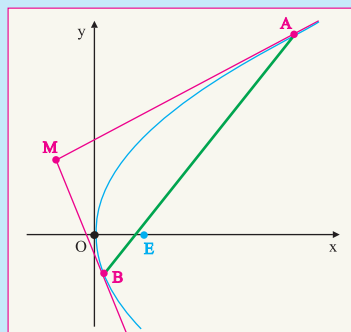
$$y_0 y_2 = p(x_0 + x_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της χορδής AB είναι:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

διότι είναι πρώτου βαθμού ως προς x, y και σύμφωνα με τις (1), επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των A και B .

Η AB λέγεται **πολική του σημείου M** ως προς την παραβολή και το σημείο M λέγεται **πόλος της AB** ως προς την παραβολή.



Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Έστω AB χορδή της παραβολής, η οποία διέρχεται από την εστία E . Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των A, B από τον άξονα $x'x$ παραμένει σταθερό καθώς η AB στρέφεται γύρω από την εστία.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Μας ζητείται να δείξουμε ότι $|y_1| \cdot |y_2| = \text{σταθ}$. Αφού η ευθεία

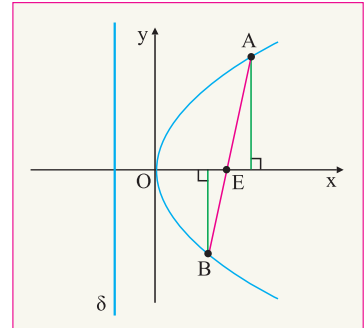
$$AB \text{ διέρχεται από την εστία } E \text{ έχει εξίσωση: } y = \lambda \left(x - \frac{p}{2} \right) \quad (1) \text{ ή } x = \frac{p}{2}$$

Για $\lambda = 0$ δεν ορίζεται χορδή.

Από την επίλυση του συστήματος της (1) και της εξίσωσης της παραβολής προκύπτουν οι συντεταγμένες των σημείων A και B .

Έτσι έχουμε:
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \lambda x - \frac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2p} \\ y = \lambda \frac{y^2}{2p} - \frac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2p} \\ \lambda y^2 - 2py - p^2\lambda = 0 \end{cases} \quad (2)$$



Η (2) είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα $\Delta = 4p^2 - 4\lambda(-p^2\lambda) = 4p^2 + 4\lambda^2 p^2 > 0$.

Άρα έχει δύο ρίζες, έστω y_1, y_2 για τις οποίες ισχύει: $y_1 y_2 = \frac{-p^2\lambda}{\lambda} = -p^2$. Δηλαδή

$$|y_1 y_2| = |y_1| |y_2| = |-p^2| = |p|^2 = p^2 = \text{σταθερό}$$

Αν $x = \frac{p}{2}$, τότε $(AE) = |y_1| = d(A, \delta) = p$ και $(BE) = |y_2| = d(B, \delta) = p$, οπότε :

$$(AE)(BE) = |y_1| |y_2| = p^2.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και χορδή AB η οποία διέρχεται από την εστία της E . Φέρνουμε τις εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B . Να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

Λύση

Αφού η AB διέρχεται από το E έχει εξίσωση $y = \lambda \left(x - \frac{p}{2} \right) \Leftrightarrow y = \lambda x - \frac{\lambda p}{2}$ ή $x = \frac{p}{2}$.

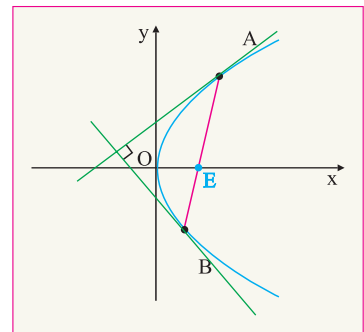
Έστω $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ με συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_1 = \frac{p}{y_1}$. Ομοίως η εφαπτομένη στο B έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{p}{y_2}$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1 \Leftrightarrow p^2 = -y_1 \cdot y_2$$

(που το αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση).



Άσκηση 3

Να δείξετε ότι η προβολή της εστίας E , παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, επάνω σε τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο του άξονα $y'y$.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο παραβολής και (ε) η εφαπτομένη στο A . Έστω ακόμη ότι B είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $y'y$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $EB \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{EB} \cdot \lambda_{AB} = -1$

Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ (1)

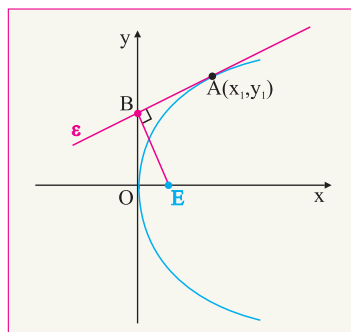
Το B είναι το σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$.

Επομένως από την (1) με $x = 0$ παίρνουμε:

$$y = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1^2}{2y_1} = \frac{y_1}{2} \quad (\text{αφού } y_1^2 = 2px_1) \text{ δηλ. } B\left(0, \frac{y_1}{2}\right).$$

$$\text{Είναι } \lambda_{AB} = \frac{y_1 - \frac{y_1}{2}}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{p}} = \frac{p}{y_1} \text{ και } \lambda_{BE} = \frac{0 - \frac{y_1}{2}}{\frac{p}{2} - 0} = \frac{-y_1}{p}$$

$$\text{Έτσι: } \lambda_{AB} \cdot \lambda_{BE} = \frac{p}{y_1} \cdot \left(-\frac{y_1}{p}\right) = -1$$



Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το A ταυτίζεται με το O . Άρα και πάλι η προβολή του E είναι σημείο του $y'y$ (η αρχή των αξόνων).

Άσκηση 4

Δείξτε ότι το συμμετρικό της εστίας E , παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, ως προς τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο της διευθετούσας.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο παραβολής. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, το B έχει συντεταγμένες

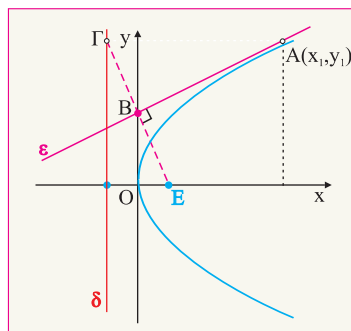
$B\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$. Επειδή το Γ είναι συμμετρικό του E ως προς την

εφαπτομένη (ε) , το B είναι μέσον της ΓE .

$$\text{Επομένως } \frac{x_\Gamma + x_E}{2} = x_B \Leftrightarrow x_\Gamma = 2x_B - x_E \Leftrightarrow$$

$$x_\Gamma = 0 - \frac{p}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = -\frac{p}{2}.$$

Επομένως το Γ ανήκει στη διευθετούσα. Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το A ταυτίζεται με το O .



Άσκηση 5

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και μεταβλητό σημείο A αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τύπος του μέσου M της χορδής του ευθ. τμήματος OA .

Λύση

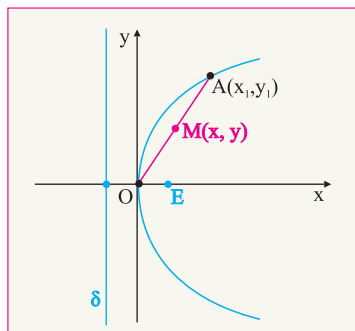
Έστω $A(x_1, y_1)$. Επειδή το M είναι μέσον της OA είναι:

$$\begin{cases} x = \frac{0+x_1}{2} \\ y = \frac{0+y_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x \\ y_1 = 2y \end{cases} \quad (1)$$

Αφού το A ανήκει στην παραβολή:

$$y_1^2 = 2px_1 \Leftrightarrow (2y)^2 = 2p(2x) \Leftrightarrow y^2 = px$$

Επομένως το M κινείται επάνω στην παραβολή με εξίσωση $y^2 = px$

**Άσκηση 6**

Δίνονται τα σημεία $A(\eta\mu t, -1+\sigma\upsilon\nu 2t)$ $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινούνται.

Λύση

$$\text{Είναι } \begin{cases} x = \eta\mu t \\ y = -1 + \sigma\upsilon\nu 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta\mu t \\ y = -1 + 1 - 2\eta\mu^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta\mu t \\ y = -2\eta\mu^2 t \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x^2 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}y$$

Επομένως το A κινείται επάνω στην παραβολή $x^2 = -\frac{1}{2}y$.

Άσκηση 7

Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

α. Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.

β. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της $A(2,1)$ από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση OE .

γ. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O .

δ. Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$, που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE .

Λύση

α. Είναι $2y^2 = x \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}x$. Επομένως $2p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

Η εστία E έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, δηλαδή $E\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση

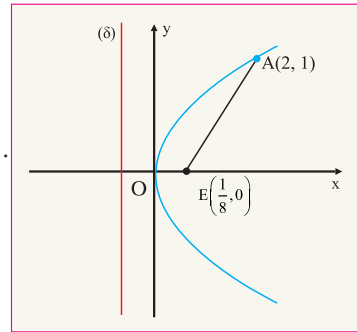
$$\delta: x = -\frac{p}{2}, \text{ δηλαδή } \delta: x = -\frac{1}{8}.$$

β. Είναι

$$(AE) = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{8}\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\frac{15^2}{8^2} + 1} = \sqrt{\frac{289}{64}} = \frac{17}{8}.$$

$$OE = \frac{1}{8}.$$

Παρατηρούμε ότι $AE > OE$.



γ. Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$.

Είναι

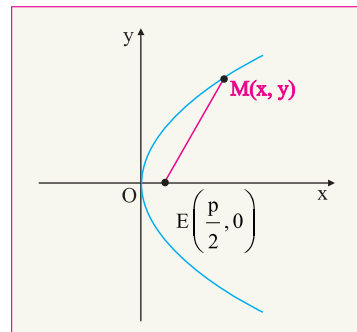
$$(ME) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}$$

Επειδή το M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 2px$ είναι

$$(ME) = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Επομένως

$$d(M, E) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$



Επειδή το x και το p είναι ομόσημοι αριθμοί η απόσταση d γίνεται ελάχιστη όταν $x = 0$, δηλαδή όταν το M ταυτίζεται με την κορυφή O .

2ος τρόπος

Αρκεί $(ME) \geq (OE)$, όπου $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

$$\text{Είναι } (ME) \geq (OE) \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| \geq \frac{|p|}{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{p^2}{4} + px \geq \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

δ. Έστω $B(x_B, y_B)$ σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$, για το οποίο ισχύει $(BE) = 2(OE)$.

Αφού ανήκει στην παραβολή θα ισχύει $y_B^2 = 2px_B$ (1)

$$\text{Είναι } (OE) = \frac{|p|}{2}. \text{ Επομένως } (BE) = |p| \Leftrightarrow \left|x_B + \frac{p}{2}\right| = |p| \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + \frac{p}{2} = p \\ \text{η} \\ x_B + \frac{p}{2} = -p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{p}{2} \\ x_B = -\frac{3p}{2} \end{cases}$$

Η $x_B = -\frac{3p}{2}$ απορρίπτεται γιατί οι p, x είναι ομόσημοι.

Για $x_B = \frac{p}{2}$ από την (1) έχουμε $y_B^2 = 2p \frac{p}{2} \Leftrightarrow y_B^2 = p^2 \Leftrightarrow y_B = p$ ή $y_B = -p$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία τα: $B\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $B\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Άσκηση 8

Μια μεταβλητή ευθεία $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή $y^2 = 6x$ στα σημεία Α

και Β. Να δείξετε, ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{3}{\lambda}\right)$.

Λύση

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής Α, Β της ευθείας και της παραβολής είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων τους.

$$\text{Έχουμε: } \begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda x + \beta)^2 = 6x \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - 3)x + \beta^2 = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι τριώνυμο ως προς x . Οι λύσεις της είναι οι τετμημένες των Α και Β.

Ζητάμε την τετμημένη του σημείου Μ που είναι το ημιάθροισμα των τετμημένων των Α και Β.

$$\text{Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε: } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{\lambda\beta - 3}{\lambda^2} = \frac{3 - \lambda\beta}{\lambda^2}.$$

$$\text{Επειδή το Μ ανήκει στην ευθεία } y = \lambda x + \beta \text{ είναι } y_M = \lambda \frac{3 - \lambda\beta}{\lambda^2} + \beta \Leftrightarrow y_M = \frac{3}{\lambda}$$

$$\text{Επομένως } M\left(\frac{3 - \lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{3}{\lambda}\right).$$

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο γ. τ. των μέσων των παραλλήλων χορδών της παραβολής $y^2 = 2px$, με συντελεστή διεύθυνσης λ .

Λύση

Έστω $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ σημεία της παραβολής με $x_A \neq x_B$ τα οποία είναι άκρα της

χορδής ΑΒ και $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ΑΒ. Ισχύει: $y_A^2 = 2px_A$

$$y_B^2 = 2px_B$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

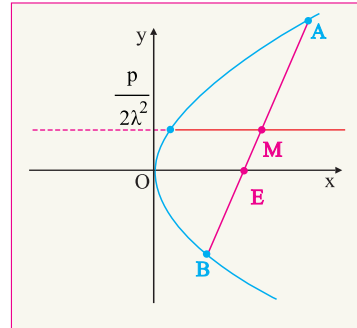
$$y_A^2 - y_B^2 = 2px_A - 2px_B \Leftrightarrow$$

$$(y_A + y_B)(y_A - y_B) = 2p(x_A - x_B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} \cdot \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = p \Leftrightarrow y_M \cdot \lambda = p$$

Επομένως το μέσο M της χορδής κινείται επάνω στην

ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ (η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x').



Επειδή η ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ τέμνει την παραβολή στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{p}{2\lambda^2}$ (είναι η

λύση του συστήματος των $y^2 = 2px$ και $y = \frac{p}{\lambda}$). Το M ανήκει στην ημιευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ με

$x \geq \frac{p}{2\lambda^2}$. Αυτή είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Άσκηση 10

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$. Θέτουμε $x_1 = \kappa x$ και $y_1 = \kappa y$, όπου $\kappa \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x_1, y_1) κινείται πάλι σε παραβολή.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} x_1 = \kappa x \\ y_1 = \kappa y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1}{\kappa} & (1) \\ y = \frac{y_1}{\kappa} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Όμως } (x, y) \in C \Leftrightarrow y^2 = 2px \Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{\kappa}\right)^2 = 2p\left(\frac{x_1}{\kappa}\right) \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\kappa^2} = 2\frac{p}{\kappa}x_1 \Leftrightarrow y_1^2 = 2p\kappa x_1$$

Άρα το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή με εξίσωση: $C_1: y^2 = 2p\kappa x$.

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται σταθερό σημείο A και μία ευθεία (ε), που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

2. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.

α. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

(Απ.: α. $y = x + 2$ και $y = -x - 2$)

3. Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$, με κορυφή το O.
Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

(Απ.: AB: $x = 12p$)

4. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 6x$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 2002 = 0$.

(Απ.: $x - 2y + 6 = 0$)

5. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$.

(Απ.: $y^2 = \frac{1}{2}x$ ή $x^2 = 4y$)

6. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής με εξίσωση $x = \frac{1}{6}y^2$ οι οποίες άγονται από το σημείο $A(0,1)$

(Απ.: $x = 0$ ή $y = \frac{3}{2}x + 1$)

7. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y - 2)^2 = 3$ και η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$.
Να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

(Απ.: $A(\sqrt{2}, 1)$ και $B(-\sqrt{2}, 1)$)

8. Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ των παρακάτω παραβολών

α. $y = x^2$

β. $y = -2x^2$

(Απ.: α. $E(0, \frac{1}{4})$ και $\delta: y = -\frac{1}{4}$, β. $E(0, -\frac{1}{8})$ και $\delta: y = \frac{1}{8}$)

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 4x$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 1$.

(Απ.: $y = \frac{1}{2}x + 2$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω AB χορδή της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$ που διέρχεται από την εστία της $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και Γ το σημείο επαφής της εφαπτομένης στην παραβολή, που είναι παράλληλη με την AB . Δείξτε ότι: $(AB) = 4(E\Gamma)$

(Υπ.: Αν $\Gamma(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, και $B(x_2, y_2)$, τότε:

$$(E\Gamma) = x_0 + \frac{p}{2} \text{ και } (AB) = (EB) + (EA) = x_1 + x_2 + p. \text{ Υπολογίστε τα } x_0 \text{ και } x_1 \text{ και } x_2)$$

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, το E και το E' , τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση, **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ .

Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δύο εστίες το συμβολίζουμε με $2a$ και αποτελεί το μήκος του **μεγάλου άξονα** της έλλειψης. Είναι $(ME) + (ME') = 2a$

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $x'x$ την ευθεία που διέρχεται από τα E και E' και άξονα $y'y$ την μεσοκάθετο του EE' είναι:

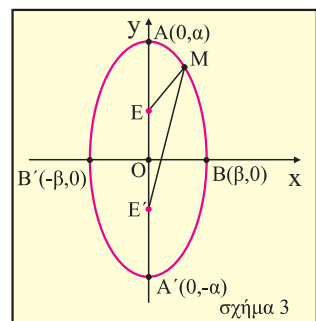
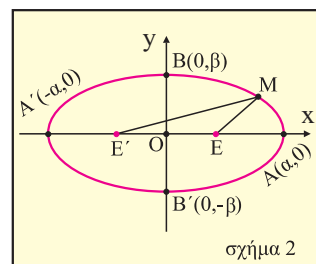
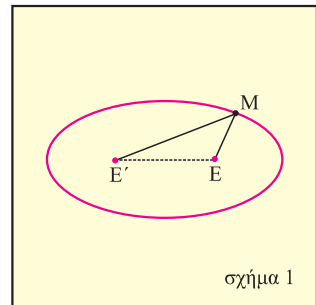
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{σχήμα 2})$$

όπου $b^2 = a^2 - \gamma^2$.

Ο **μικρός άξονας** BB' της έλλειψης έχει μήκος $2b$.

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $y'y$ την ευθεία που διέρχεται από τα E και E' και άξονα $x'x$ την μεσοκάθετο του EE' είναι:

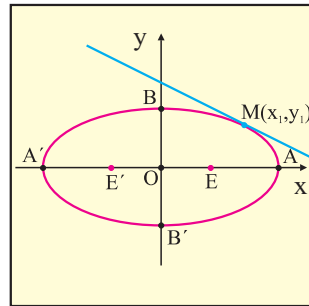
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (\text{σχήμα 3})$$



Εξίσωση εφαπτομένης

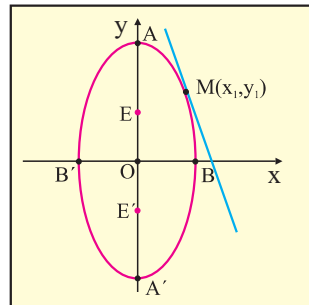
Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$, $\alpha > \beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$$



• Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

α. Γράφουμε την εξίσωση της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1)

β. Επειδή $x^2 = x \cdot x$ και $y^2 = y \cdot y$ έχουμε από την (1): $\frac{x \cdot x}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y}{\beta^2} = 1$

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$, που είναι

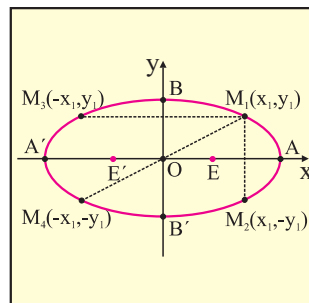
και η ζητούμενη εξίσωση. Ομοίως εργαζόμαστε και για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \alpha > \beta.$$

Ιδιότητες έλλειψης

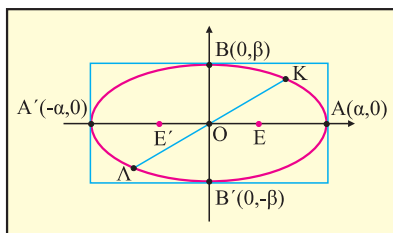
Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τους $x'x$ και $y'y$. Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.



Δηλαδή αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη τότε ανήκουν στην έλλειψη και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.

- β. Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, \beta)$ και $B'(0, -\beta)$.
Το ευθύγραμμο τμήμα AA' λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα BB' λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης. Το O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα KL του οποίου τα άκρα K, L , ανήκουν στην έλλειψη και διέρχεται από το κέντρο O λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.



- γ. Η έλλειψη C περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ορίζουν οι ευθείες:
 $x = a$, $x = -a$, $y = \beta$ και $y = -\beta$.

Γενικά για τις συντεταγμένες (x, y) οποιουδήποτε σημείου της έλλειψης ισχύει :

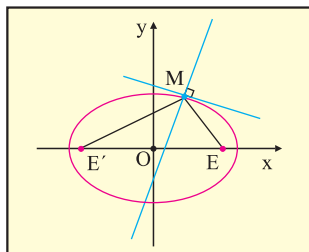
$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\beta \leq y \leq \beta \end{cases}$$

δ. Ανακλαστική ιδιότητα

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

- Χρήσιμη παρατήρηση:

Ας δούμε τι παριστάνει η εξίσωση $C: \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$, όπου μ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.



α. Αν $\mu > \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα $x'x$ και σταθερό άθροισμα 2μ .

β. Αν $\mu < \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα $y'y$ και σταθερό άθροισμα 2λ .

γ. Αν $\mu = \lambda$, τότε $C: x^2 + y^2 = \mu^2$ και παριστάνει κύκλο.

Εκκεντρότητα έλλειψης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης C το *λόγο της εστιακής απόστασης προς το μή-*

κος του μεγάλου άξονα και τη συμβολίζουμε με $\varepsilon = \frac{2\gamma}{2a} = \frac{\gamma}{a}$. Είναι $0 < \varepsilon < 1$

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Οπότε όταν το ε τείνει στο 1, το β τείνει στο 0 και η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα. Αν το ε τείνει στο 0 τότε το β τείνει να γίνει ίσον με το α και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία - Μέθοδος 1**

Για να βρούμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να προσδιορίζουμε τις τιμές των α , β . Δεδομένου, ότι έχουμε τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, αρκεί να βρούμε άλλες δύο σχέσεις. Όταν μας δίνονται οι εστίες, γνωρίζουμε το γ . Όταν μας δίνονται ο μεγάλος και ο μικρός άξονας, γνωρίζουμε τα α και β αντίστοιχα. Όταν μας δίνεται η εκκεντρότητα $\left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$ έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα α , γ .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν:

α. Έχει μεγάλο άξονα $2\alpha = 8$ και εστίες $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$.

β. Έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{5}$ και εστίες $E(1,0)$, $E'(-1,0)$.

γ. Διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,2)$ και $Z(\sqrt{6},1)$, έχει κέντρο $O(0,0)$ και οι εστίες της είναι στον άξονα $x'x$.

Λύση

α. Αφού έχει εστίες $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$ θα είναι $\gamma = 2$.

Για το μεγάλο άξονα γνωρίζουμε ότι $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$

Ακόμα έχουμε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow \beta^2 = 12 \Leftrightarrow \beta = 2\sqrt{3}$.

Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

β. Είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (1). Επιπλέον είναι $\gamma = 1$ (2)

Από (1), (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{5}$. Για το β έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 5 - 1 \Leftrightarrow \beta = 2$.

Επομένως η έλλειψη έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

γ. Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$.

Οι συντεταγμένες των σημείων Δ και Ζ επαληθεύουν την εξίσωση της.

$$\text{Επομένως: } \left. \begin{aligned} \frac{0}{\alpha^2} + \frac{4}{\beta^2} &= 1 \\ \frac{(\sqrt{6})^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \beta^2 &= 4 \\ \frac{6}{\alpha^2} + \frac{1}{4} &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \beta &= 2 \\ \alpha &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης σε σημείο της Α, προσδιορίζουμε από τα δεδομένα τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Α.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $C: 9x^2 + 16y^2 = 144$ (1), που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: x + y + 2002 = 0$.

Λύση

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (1) της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Αν θεωρήσουμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της έλλειψης τότε η

$$\text{εξίσωση της εφαπτομένης είναι: } \frac{x \cdot x_1}{16} + \frac{y \cdot y_1}{9} = 1 \quad (\delta)$$

$$\text{Όμως } \delta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{-9x_1}{16y_1} = -1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{16y_1}{9} \quad (2)$$

$$\text{Το σημείο M ανήκει στην έλλειψη οπότε θα έχουμε: } 9x_1^2 + 16y_1^2 = 144 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίζουμε τις τιμές των x_1 και y_1 :

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{16y_1}{9} \\ 9x_1^2 + 16y_1^2 &= 144 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{16}{5} \\ y_1 &= \frac{9}{5} \end{aligned} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\frac{16}{5} \\ y_1 &= -\frac{9}{5} \end{aligned} \right\}$$

Τα ζεύγη τιμών που βρήκαμε για τα x_1 και y_1 τα αντικαθιστούμε στην (1) και προκύπτουν οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων: $x + y - 5 = 0$ και $x + y + 5 = 0$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε την εκκεντρότητα και τις εστίες στις παρακάτω ελλείψεις:

$$\alpha. \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\beta. 9x^2 + 25y^2 = 225$$

Λύση

α . Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει ότι $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Οπότε οι εστίες είναι $E(\gamma, 0) = (\sqrt{3}, 0)$ και $E'(-\gamma, 0) = (-\sqrt{3}, 0)$ και η εκκεντρότητά της

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

β . Μετασχηματίζουμε την εξίσωση της έλλειψης: $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Είναι $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 4$. Οπότε οι εστίες είναι $E(4, 0)$ και $E'(-4, 0)$ και η εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{4}{5}$$

Άσκηση 2

Να βρείτε συναρτήσει του β , την εξίσωση της έλλειψης $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1) που έχει

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

$$\text{Έχουμε: } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 - \beta^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 - \beta^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 - \beta^2) = a^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 - 2\beta^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2\beta^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται: $\frac{x^2}{2\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$. Αν θέσουμε $x = x_1$ και $y = ky_1$ να αποδείξετε ότι το σημείο (x_1, y_1) ανήκει σε έλλειψη.

Λύση

$$\text{Έχουμε } x^2 + y^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x_1^2 + \kappa^2 y_1^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{a}{\kappa}\right)^2} = 1.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης.

Άσκηση 4

Να βρεθεί η οξεία γωνία των εφαπτομένων οι οποίες άγονται από το σημείο $M(0, 4)$ προς την έλλειψη

$$3x^2 + y^2 = 4.$$

Λύση

Θα υπολογίσουμε τις εφαπτόμενες οι οποίες άγονται από το σημείο M . Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι $3x_1x + y_1y = 4$. Αφού διέρχεται από το $M(0, 4)$ είναι: $3 \cdot 0 \cdot x_1 + 4y_1 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (1)

Επειδή το A ανήκει στην έλλειψη ισχύει :

$$3x_1^2 + y_1^2 = 4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 3x_1^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1.$$

Επομένως, τα σημεία επαφής είναι $A(1, 1)$ και $A'(-1, 1)$ και οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα A και A' είναι :

$$\varepsilon_1 : 3x + y = 4 \text{ και } \varepsilon_2 : -3x + y = 4, \text{ αντίστοιχα.}$$

Θα υπολογίσουμε τη γωνία των δύο αυτών ευθειών, των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 3$.

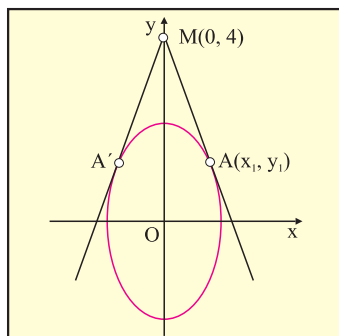
Θεωρούμε δύο διανύσματα παράλληλα στις ε_1 και ε_2 τα : $\vec{\delta}_1 = (1, -3)$ και $\vec{\delta}_2 = (1, 3)$ με

$$\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1 \text{ και } \vec{\delta}_2 // \varepsilon_2. \text{ Είναι } \sin(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \sin \varphi = \frac{|\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2|}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{\sqrt{1 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1 + 3^2}} = \frac{-8}{10}.$$

Επειδή η γωνία φ έχει $\sin \varphi = -\frac{8}{10} < 0$, είναι αμβλεία ($\varphi \approx 144^\circ$). Άρα η ζητούμενη γωνία είναι η παραπληρωματική της φ δηλαδή $\approx 36^\circ$.

Άσκηση 5

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και η ευθεία $y = x + 1$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του μέσου M της χορδής AB που ορίζεται από την ευθεία και την έλλειψη.



Λύση

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της έλλειψης και της ευθείας θα μας δώσει τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

Είναι:

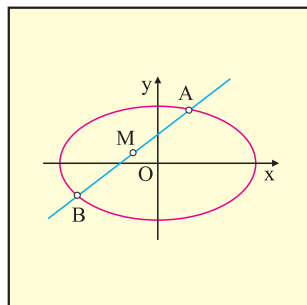
$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9x^2 + 18x + 9 = 36 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 + 18x - 27 = 0 & (1) \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Επειδή το ζητούμενο της άσκησης δεν είναι οι συντεταγμένες των A και B αλλά το ημίαθροισμα τους (οι συντεταγμένες του M), από τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1), υπολογίζουμε από τον τύπο του Vieta, το άθροισμα των ριζών της (1).

Έτσι $x_1 + x_2 = -\frac{18}{13}$, συνεπώς $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{9}{13}$. Το σημείο M ανήκει στην ευθεία $y = x + 1$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Δηλαδή } y_M = -\frac{9}{13} + 1 \Leftrightarrow y_M = \frac{4}{13}. \text{ Επομένως } M\left(-\frac{9}{13}, \frac{4}{13}\right).$$

**Άσκηση 6**

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται τα μέσα των χορδών της έλλειψης, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x - 1$.

Λύση

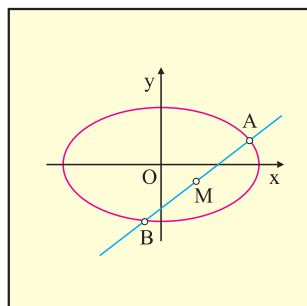
Έστω $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ τα άκρα τυχαίας χορδής η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) . Επειδή ανήκουν στην έλλειψη οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή ισχύουν :

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1 \end{cases}$$

Αφαιρούμε τις παραπάνω κατα μέλη και έχουμε :

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} + y_1^2 - y_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot 2 \frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε με } (x_1 - x_2) \text{ } x_1 \neq x_2)$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + 2 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \quad (1). \text{ Όμως } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ και } \lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

(αφού η χορδή AB είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)). Οπότε η (1) γίνεται $\frac{1}{2}x_M + 2\lambda y_M = 0$.

Επομένως το μέσον M της AB, κινείται επάνω στην ευθεία $\frac{1}{2}x + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow x + 4\lambda y = 0$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1$, $a > b$, έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε τιμή του $k \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για την έλλειψη C_1 έχουμε $\gamma^2 = a^2 - b^2$ και εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$.

Θέτουμε $A^2 = a^2 + k^2$ και $B^2 = b^2 + k^2$ και 2Γ την εστιακή απόσταση της έλλειψης C_2 .

Είναι: $\Gamma^2 = A^2 - B^2 = a^2 + k^2 - b^2 - k^2 = a^2 - b^2 = \gamma^2$ δηλαδή $\Gamma = \gamma$.

Οπότε η C_2 έχει τις ίδιες εστίες με τη C_1 .

Άσκηση 8

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = a^2$ και $C_2: x^2 + y^2 = b^2$ με $b < a$ και η μεταβλητή ευθεία ΟΛΚ (Ο η αρχή των αξόνων, Λ το σημείο τομής της ευθείας με τον κύκλο C_2 και Κ το σημείο τομής με τον C_1). Από το Λ φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ και από το Κ ευθεία κάθετη στον $x'x$, οι οποίες τέμνονται στο Μ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

Λύση

Έστω $\Lambda(x_1, \lambda)$ και $K(\kappa, y_1)$. Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (κ, λ) . Επειδή τα σημεία Κ και Λ ανήκουν στους κύκλους, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τις εξισώσεις των κύ-

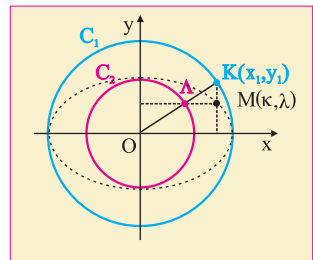
$$\text{κλων, δηλαδή } \begin{cases} x_1^2 + \lambda^2 = b^2 \\ \kappa^2 + y_1^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = b^2 - \lambda^2 \\ y_1^2 = a^2 - \kappa^2 \end{cases} \quad (1).$$

Τα σημεία Ο, Λ, Κ είναι συνευθειακά, επομένως $\lambda_{OL} = \lambda_{OK}$

(όπου λ_{OL} και λ_{OK} οι συντελεστές διεύθυνσης των ΟΛ και ΟΚ).

$$\lambda_{OL} = \lambda_{OK} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{x_1} = \frac{y_1}{\kappa}. \text{ Οπότε } \frac{\lambda^2}{x_1^2} = \frac{y_1^2}{\kappa^2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\lambda^2}{b^2 - \lambda^2} = \frac{a^2 - \kappa^2}{\kappa^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 - b^2 \kappa^2 - a^2 \lambda^2 + \kappa^2 \lambda^2 = \kappa^2 \lambda^2 \Leftrightarrow b^2 \kappa^2 + a^2 \lambda^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} = 1$$



Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(\kappa, \lambda)$ είναι η έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Άσκηση 9

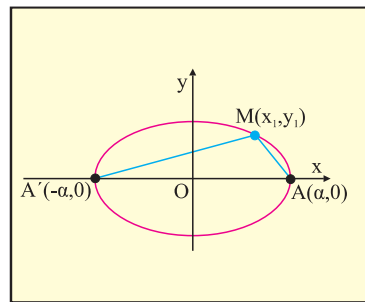
Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$, μεγάλο άξονα $A'A$ και ένα σημείο της M (διαφορετικό από τις κορυφές). Να δείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των ευθειών MA και MA' είναι σταθερό, ανεξάρτητο της θέσης του σημείου M .

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ σημείο της έλλειψης. Οι συντελεστές διεύθυνσης των MA και MA' είναι:

$$\lambda_{MA} = \frac{y_1}{x_1 - \alpha} \text{ και } \lambda_{MA'} = \frac{y_1}{x_1 + \alpha}.$$

$$\text{Επομένως } \lambda_{MA} \cdot \lambda_{MA'} = \frac{y_1}{x_1 - \alpha} \cdot \frac{y_1}{x_1 + \alpha} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - \alpha^2} \quad (1).$$



Επειδή το M ανήκει στην έλλειψη, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλαδή

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x_1^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{\beta^2 (\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$\lambda_{MA} \cdot \lambda_{MA'} = \frac{\frac{\beta^2 (\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2}}{x_1^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2 (\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 (x_1^2 - \alpha^2)} = -\frac{\beta^2 (\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 (\alpha^2 - x_1^2)} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \text{σταθερό}.$$

Άσκηση 10

Από σημείο $A(x_0, y_0)$ εκτός της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς

την έλλειψη και έστω B, Γ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$

$$\text{είναι: } \frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

Λύση

Έστω $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο B έχει εξίσωση $\varepsilon_1: \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

Επειδή διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$, ισχύει $\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{\beta^2} = 1$ (2).

Η ισότητα (2) μας δίνει την πληροφορία ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το B (αφού οι συντεταγμένες του B την ικανοποιούν).

Η εφαπτομένη στο Γ έχει εξίσωση $e_2: \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{\beta^2} = 1$. Επειδή διέρχεται από το

$A(x_0, y_0): \frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{\beta^2} = 1$ (3). Η ισότητα (3) μας λείπει ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το Γ. Επειδή από δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία ΒΓ.

(Η ΒΓ λέγεται **πολική ευθεία** του σημείου A ως προς την έλλειψη και το A λέγεται **πόλος**).

Άσκηση 11

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $a > \beta$ και μια χορδή της MN η οποία διέρχεται από την εστία $E(\gamma, 0)$. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα της χορδής,

τέμνονται σε σημείο της ευθείας $x = \frac{a^2}{\gamma}$. (Η ευθεία $x = \frac{a^2}{\gamma}$ λέγεται **δευτερούσα της έλλειψης**).

Λύση

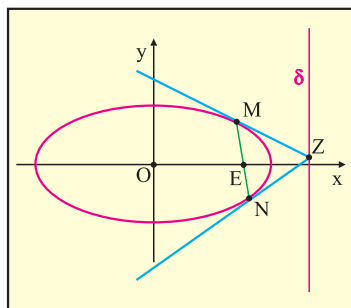
Έστω $Z(x_0, y_0)$ το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων. Από το σημείο Z λοιπόν, άγονται δύο εφαπτόμενες προς την έλλειψη. Η χορδή (πολική ευθεία) η οποία ενώνει τα σημεία επαφής έχει εξίσωση:

$$MN: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1 \quad (1).$$

Επειδή η χορδή MN διέρχεται από την εστία $E(\gamma, 0)$ η εξίσωση (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες της.

Επομένως $\frac{x_0 \gamma}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a^2}{\gamma}$ και συνεπώς το σημείο Z βρίσκεται επάνω στην

ευθεία με εξίσωση: $x = \frac{a^2}{\gamma}$.



Άσκηση 12

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ και το εσωτερικό της σημείο $M(1, 2)$. Να προσδιοριστεί η χορδή της έλλειψης η οποία έχει το M ως μέσο.

Λύση

Έστω $Z(x_1, y_1)$ και $H(x_2, y_2)$ τα άκρα της ζητούμενης χορδής. Είναι $x_1 \neq x_2$. (Αν ήταν $x_1 = x_2$ λόγω συμμετρίας το μέσο τους M θα ήταν σημείο του άξονα $x'x$). Αφού τα σημεία Z, H ανήκουν στην έλλειψη, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της.

$$\text{Επομένως: } \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x_1^2 + 9y_1^2 = 144 \quad (1)$$

$$\text{και } \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x_2^2 + 9y_2^2 = 144 \quad (2)$$

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2): $16(x_1^2 - x_2^2) + 9(y_1^2 - y_2^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$16(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 9(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

διαιρούμε
και τα δύο
μέλη με 2

$$16(x_1 - x_2) \frac{x_1 + x_2}{2} + 9(y_1 - y_2) \frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \quad (3)$$

Οι συντεταγμένες του μέσου M της ZH είναι: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Επομένως η (3) γίνεται: $16(x_1 - x_2)x_M + 9(y_1 - y_2)y_M = 0$.

Όμως $M(1, 2)$, έτσι έχουμε $16(x_1 - x_2) + 18(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow 18(y_1 - y_2) = -16(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{16}{18} \quad (4).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ZH είναι $\lambda_{ZH} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Έτσι από τη σχέση (4) έχουμε $\lambda_{ZH} = -\frac{8}{9}$. Συνεπώς $ZH: y - 2 = -\frac{8}{9}(x - 1)$

Άσκηση 13

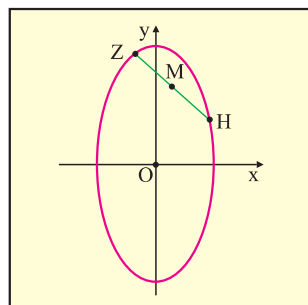
Για το σημείο Λ του επιπέδου το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{O\Lambda} = \frac{\alpha(3 - \kappa^2)}{3 + \kappa^2} \vec{i} + \frac{\beta \cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3 + \kappa^2} \vec{j}$,

όπου α, β θετικοί και $\kappa \in \mathbb{R}$. Να δείξετε, ότι καθώς το κ μεταβάλλεται το σημείο Λ κινείται σε έλλειψη.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε οι συντελεστές των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{O\Lambda}$.

Επειδή O είναι το σημείο αναφοράς (η αρχή των αξόνων), αυτοί οι συντελεστές είναι οι



συντεταγμένες του σημείου Λ. Επομένως $\Lambda \left(\frac{\alpha(3-\kappa^2)}{3+\kappa^2}, \frac{\beta \cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2} \right)$

$$\text{Έχουμε: } \left. \begin{aligned} x &= \frac{\alpha(3-\kappa^2)}{3+\kappa^2} \\ y &= \frac{\beta \cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} &= \frac{3-\kappa^2}{3+\kappa^2} \\ \frac{y}{\beta} &= \frac{2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2} \end{aligned}$$

Υψώνουμε τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατα μέλη:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha^2} &= \frac{(3-\kappa^2)^2}{(3+\kappa^2)^2} \\ \frac{y^2}{\beta^2} &= \frac{(2\sqrt{3}\kappa)^2}{(3+\kappa^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{(3-\kappa^2)^2}{(3+\kappa^2)^2} + \frac{12\kappa^2}{(3+\kappa^2)^2} = \frac{(3+\kappa^2)^2}{(3+\kappa^2)^2} = 1$$

Οι συντεταγμένες του Λ ικανοποιούν την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
Επομένως το σημείο Λ κινείται επάνω σε αυτήν την έλλειψη.

Άσκηση 14

Το σημείο $M(\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, με $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$ ανήκει στην έλλειψη

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \alpha > \beta.$$

α. Να δείξετε, ότι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: (\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)x - (\beta\eta\mu\theta)y = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

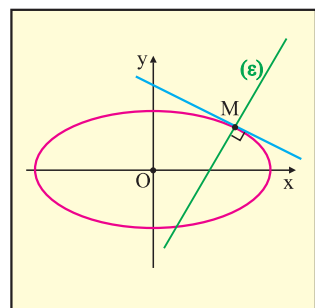
β. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο $(\beta, 0)$ να δείξετε ότι

ισχύει η σχέση $\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\alpha \cdot \varepsilon^2}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

Λύση

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1 x + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2.$$



Ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής της ευθείας είναι $\lambda = -\frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$.

Αφού $M(\alpha \eta \mu \theta, \beta \sigma \nu \theta)$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο M είναι

$$\lambda = \frac{-\alpha \beta^2 \eta \mu \theta}{\alpha^2 \beta \sigma \nu \theta} = -\frac{\beta \eta \mu \theta}{\alpha \sigma \nu \theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}, \quad \theta \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Επομένως η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο M έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\epsilon} = \frac{\alpha \sigma \nu \theta}{\beta \eta \mu \theta}, \quad \theta \neq 0, \quad \theta \neq \pi \quad \text{και εξίσωση } y - \beta \sigma \nu \theta = \frac{\alpha \sigma \nu \theta}{\beta \eta \mu \theta} (x - \alpha \cdot \eta \mu \theta)$$

$$\Leftrightarrow \beta \eta \mu \theta \cdot y - \beta^2 \eta \mu \theta \cdot \sigma \nu \theta = \alpha \sigma \nu \theta \cdot x - \alpha^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \sigma \nu \theta) x - (\beta \eta \mu \theta) y = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \cdot \sigma \nu \theta$$

β. Οι συντεταγμένες του σημείου $(\beta, 0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της (ϵ) . Επομένως έχουμε:

$$(\alpha \sigma \nu \theta) \beta - (\beta \eta \mu \theta) \cdot 0 = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \cdot \sigma \nu \theta \Leftrightarrow \alpha \beta \cdot \sigma \nu \theta = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \cdot \sigma \nu \theta \quad \overset{\sigma \nu \theta \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha \beta = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \Leftrightarrow \eta \mu \theta = \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (1)$$

Όμως ισχύουν οι σχέσεις: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ και $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

$$\text{Οπότε η (1) γίνεται: } \eta \mu \theta = \frac{\alpha \beta}{\gamma^2} = \frac{\alpha \beta}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \alpha^2} = \frac{\alpha \beta}{\epsilon^2 \alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha \epsilon^2}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $16x^2 + 25y^2 = 400$ είναι εξίσωση έλλειψης και να βρεθούν τα μήκη των αξόνων της, οι εστίες της και η εκκεντρότητα.

$$(A\pi.: 2\alpha = 10 \text{ και } 2\beta = 8 \text{ και } \gamma = 3 \text{ και } \epsilon = \frac{3}{5})$$

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: 4x^2 + y^2 = 20$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(0, 10)$.

$$(A\pi.: y = 4x + 10 \text{ ή } y = -4x + 10)$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, κορυφή το σημείο $M(17,0)$ και μία εστία το σημείο $E(8,0)$.

$$(\text{Απ.: } \left(\frac{x^2}{17^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \right))$$

4. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y = 4x + 9$ ως προς την έλλειψη $2x^2 + y^2 = 9$.

$$(\text{Απ.: Εφάπτεται στο σημείο } M(-2,1))$$

5. Δύο ελλείψεις έχουν εξισώσεις $5x^2 + 3y^2 = 64$ και $3x^2 + 5y^2 = 64$. Ναδειχθεί ότι τα κοινά σημεία τους ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: 4x^2 + y^2 = 20$ οι οποίες:

α. Είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 4x + y + 4 = 0$

β. Είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x + 4y + 12 = 0$.

$$(\text{Απ.: α. } y = -4x + 10 \text{ ή } y = -4x - 10, \text{ β. } y = 4x + 10 \text{ ή } y = 4x - 10))$$

7. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E' και E οι εστίες, B και B' τα άκρα του μικρού άξονα).

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

$$(\text{Απ.: β. } 2b\sqrt{a^2 - b^2})$$

8. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων :

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ και } C_2: \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 1, \text{ με } a > b.$$

$$(\text{Απ.: } (\varepsilon_2 > \varepsilon_1))$$

9. Αν είναι η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε

$$\text{ότι η κάθετη στην } (\varepsilon) \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}.$$

10. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση

$$C': \frac{\kappa^2 x^2}{a^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{b^2} = 1 \text{ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη } C.$$

11. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 2$ και το σημείο $A(2,3)$. Φέρουμε από το A τις εφαπτόμενες της έλλειψης και έστω B, Γ τα σημεία επαφής. Να υπολογίσετε την απόσταση του A από τη χορδή $B\Gamma$.

(Απ.: $\sqrt{10}$)

12. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και τα σημεία της A, B τέτοια ώστε η γωνία $\hat{A}OB = 90^\circ$.

(Ο είναι η αρχή των αξόνων). Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα A, B τέμνονται στο σημείο M , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν η γωνία AOB στρέφεται γύρω από το O .

(Απ.: $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$)

13. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{18} = 1$. Να βρεθεί ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα $E'E$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης.

(Απ.: $x^2 + y^2 = 1$)

14. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή, εστιακή απόσταση 4 και εκκεντρότητα $1/2$.

(Απ.: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ή $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$)

15. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y = x + 2$ ως προς την έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$.

(Απ.: Τέμνει την έλλειψη)

16. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται σημείο M του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $(MA) + (MB) = 4$, με $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

(Απ.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$)

17. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ με $x = 4\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Απ.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$)

18. Δίνεται έλλειψη (c): $4x^2 + 7y^2 = 36$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x - 2y + 7 = 0$ εφάπτεται της (c).

$$(Απ.: \left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{ είναι το σημείο επαφής})$$

19. Η εξίσωση μιας χορδής της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ είναι $x + 6y = 40$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M της χορδής.

$$(Απ.: \text{Είναι } M(4,6))$$

20. Η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία B, B' και τον αρνητικό ημιάξονα Ox' στο A'. Δείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, B' και A' έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$.

21. Να βρεθεί η χορδή της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ που έχει μέσο το σημείο $M(2,1)$.

$$(Απ.: 8x + 9y - 25 = 0)$$

22. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο $(-4,4)$.

$$\left(Απ.: y = \frac{1}{2}x + 18, x = -4\right)$$

23. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 4$.

$$(Απ.: y = x + \sqrt{20}, y = x - \sqrt{20})$$

24. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 16$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + y + 5 = 0$.

$$(Απ.: y = x + \sqrt{20}, y = x - \sqrt{20})$$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

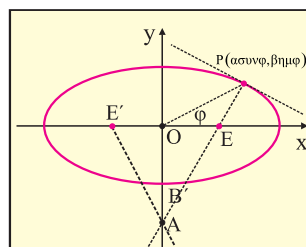
Δίνεται η έλλειψη $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$, $\alpha > \beta$ με εστίες E, E' . Η κάθετη στο σημείο P της έλλειψης τέμνει το μικρό άξονα στο A . Δείξτε ότι το τετράγωνο της απόστασης του A

από μια από τις εστίες ισούται με: $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} (EP)(E'P)$.

(Υπ.: Δείξτε ότι $(E'P) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} (EP)(E'P)$. Υποθέστε ότι

$P(\alpha \sin \varphi, \beta \eta \mu \varphi)$ και υπολογίστε τις αποστάσεις $E'P$ και EP . Είναι

$(E'P) = |\gamma \sin \varphi + \alpha|$ και $(EP) = |\gamma \sin \varphi - \alpha|$)



Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Υπερβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία E και E' είναι σταθερή και μικρότερη από την απόσταση των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, E και E' τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ .

Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της υπερβολής από τις δύο εστίες τη συμβολίζουμε με 2α

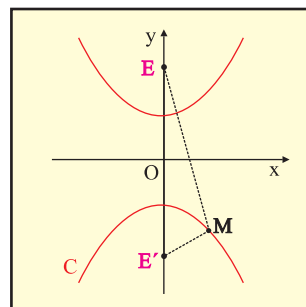
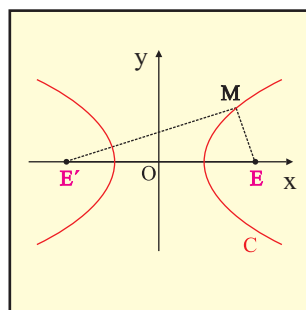
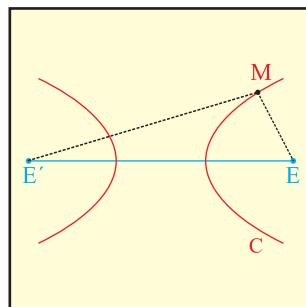
Είναι: $|(ME) - (ME')| = 2\alpha$

Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $x'x$ την ευθεία που διέρχεται από τα E και E' και άξονα $y'y$ την μεσοκάθετο του EE' είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2.$$

Η εξίσωση της υπερβολής ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα $y'y$ την ευθεία που διέρχεται από τα E και E' και άξονα $x'x$ την μεσοκάθετο του EE' είναι:

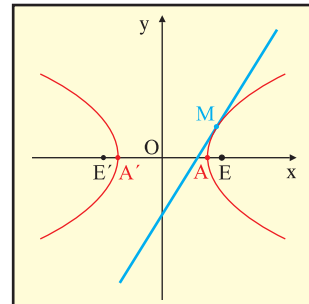
$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2.$$



Εξίσωση εφαπτομένης

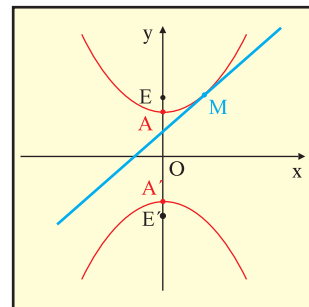
Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι :

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι :

$$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$



• *Μνημονικός κανόνας για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε υπερβολή :*

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

α. Γράφουμε την εξίσωση της υπερβολής : $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1)

β. Επειδή $x^2 = x \cdot x$ και $y^2 = y \cdot y$ έχουμε από την (1) : $\frac{x \cdot x}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y}{\beta^2} = 1$.

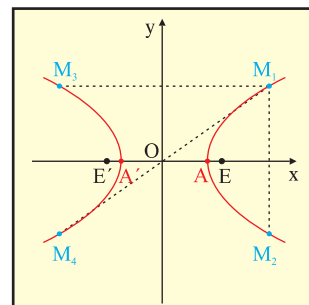
γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην υπερβολή $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$.

Ιδιότητες υπερβολής

Έστω μια υπερβολή C , με εξίσωση : $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τον $x'x$ και τον $y'y$ και



κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Δηλαδή, αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή τότε ανήκουν στην υπερβολή και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.

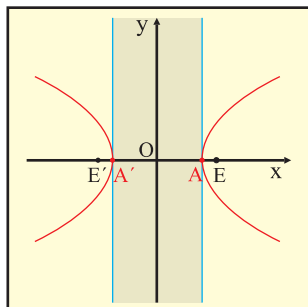
β. Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a,0)$ και $A'(-a,0)$ τα οποία λέγονται **κορυφές** της υπερβολής.

Δεν τέμνει τον άξονα $y'y$. Το O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

γ. Η υπερβολή C αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους. Οι δύο αυτοί κλάδοι βρίσκονται εκτός της ταινίας των ευθειών $x = -a$ και $x = a$.

Γενικά για κάθε σημείο της υπερβολής με συντεταγμένες

$$(x, y) \text{ ισχύει: } \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$$



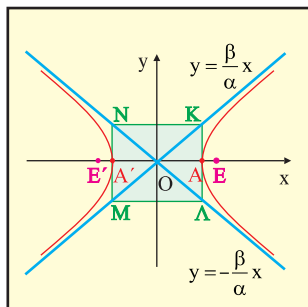
Ασύμπτωτες υπερβολής

Η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\varepsilon_1: y = \frac{b}{a}x \text{ και } \varepsilon_2: y = -\frac{b}{a}x$$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιοι του ορθογώνιου $KLMN$ με κορυφές τα σημεία $K(a,b)$, $L(a,-b)$,

$M(-a,-b)$, $N(-a,b)$ το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.



• Μνημονικός κανόνας για τις ασύμπτωτες των υπερβολών:

Οι ασύμπτωτες των υπερβολών $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $C_2: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ βρίσκονται αν παραγο-

ντοποιήσουμε το πρώτο μέλος των παραπάνω εξισώσεων και θέσουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν.

Εκκεντρότητα υπερβολής

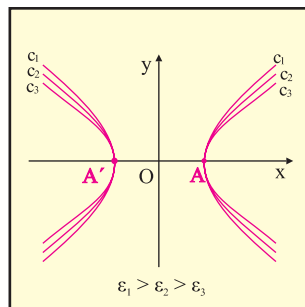
Έστω η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής

και τη συμβολίζουμε με ε το λόγο $\varepsilon = \frac{2\gamma}{2a} = \frac{\gamma}{a}$. Είναι $\varepsilon > 1$.

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Από τη σχέση αυτή καταλαβαίνουμε, ότι η εκκεντρότητα e προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\beta}{\alpha}$ της ασυμπτώτου της υπερβολής. Επομένως χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης και τη μορφή της υπερβολής.

Όταν η εκκεντρότητα e τείνει στο 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0, επομένως το β τείνει στο 0. Τότε το ορθογώνιο βάσης γίνεται επίμηκες και η υπερβολή γίνεται “κλειστή”.



B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να βρούμε την εξίσωση μιας υπερβολής πρέπει να προσδιορίζουμε τις τιμές των α , β . Δεδομένου, ότι έχουμε τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, αρκεί να βρούμε άλλες δύο σχέσεις. Όταν μας δίνονται οι εστίες, γνωρίζουμε το γ . Όταν μας δίνονται οι κορυφές, γνωρίζουμε τα α και β αντίστοιχα. Όταν μας δίνεται η εκκεντρότητα $\left(e = \frac{\gamma}{\alpha} \right)$ έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα α , γ .

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής, που έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$ $E(\sqrt{5}, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(2\sqrt{2}, 1)$.

Λύση

Είναι $\gamma = \sqrt{5}$, οπότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 5 - \alpha^2$.

Επομένως, η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{5 - \alpha^2} = 1$.

Επειδή το σημείο $M(2\sqrt{2}, 1)$ ανήκει στην υπερβολή, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{8}{\alpha^2} - \frac{1}{5 - \alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^4 - 14\alpha^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 10 \text{ ή } \alpha^2 = 4$$

Επειδή $\alpha^2 < \gamma^2$ θα είναι $\alpha^2 = 4$ και επομένως η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης υπερβολής σε σημείο της A, προσδιορίζουμε από τα δεδομένα τις συντεταγμένες του σημείου επαφής A.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $C: 25x^2 - 4y^2 = 100$, που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: 3x - y + 2002 = 0$.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της υπερβολής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M είναι: $\delta: 25xx_1 - 4yy_1 = 100$ (1)

Όμως το σημείο M ανήκει και στην υπερβολή που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του

επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή: $M \in C \Leftrightarrow 25x_1^2 - 4y_1^2 = 100$ (2)

Γνωρίζουμε επίσης ότι η ε είναι παράλληλη στη δ , άρα ισχύει η ισοδυναμία:

$$\delta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{25x_1}{4y_1} = 3 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίζουμε τα x_1, y_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25x_1}{4y_1} = 3 \\ 25x_1^2 - 4y_1^2 = 100 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{12y_1}{25} \\ 11y_1^2 = 625 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{12y_1}{25} \\ y_1 = \pm \frac{25}{\sqrt{11}} \end{array} \right.$$

Για $y_1 = \frac{25}{\sqrt{11}}$ έχουμε $x_1 = \frac{12}{\sqrt{11}}$ και για $y_1 = -\frac{25}{\sqrt{11}}$ έχουμε $x_1 = -\frac{12}{\sqrt{11}}$.

Αντικαθιστούμε στην (1) τις παραπάνω τιμές των x_1 και y_1 και έχουμε:

$$3x - y - \sqrt{11} = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - y + \sqrt{11} = 0$$

που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων.

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: x + 2y = \kappa$ εφάπτεται στην υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$.

Λύση

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας και της υπερβολής πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2y=\kappa \\ x^2-y^2=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ (\kappa-2y)^2-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ \kappa^2-4\kappa y+4y^2-y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa-2y \\ 3y^2-4\kappa y+\kappa^2-1=0 \quad (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς y . Για να εφάπτεται η ευθεία (1) στην υπερβολή θα πρέπει να έχει μία μόνο λύση ως προς y . Πρέπει δηλαδή να έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 16\kappa^2-12\kappa^2+12=0 \Leftrightarrow 4\kappa^2+12=0 \Leftrightarrow \kappa^2=-3$$

που είναι αδύνατο.

Κατά συνέπεια και το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται της υπερβολής C .

Άσκηση 2

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις εστίες της στον άξονα x' , συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και επίσης:

α. Έχει εστιακή απόσταση $(EE')=6$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{3}{2}$

β. Έχει εστιακή απόσταση $(EE')=4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι $(EE')=6 \Leftrightarrow 2\gamma=6 \Leftrightarrow \gamma=3$.

$$\text{Επίσης } \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=2. \text{ Ακόμα: } \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$$

$$\text{Άρα τελικά η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής θα είναι: } \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

β. Γνωρίζουμε ότι $(EE')=4 \Leftrightarrow 2\gamma=4 \Leftrightarrow \gamma=2$.

$$\text{Μία από τις ασύμπτωτες είναι η } y=x \text{ οπότε θα έχουμε } \frac{\beta}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \alpha=\beta.$$

$$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\beta^2+\alpha^2 \Leftrightarrow 2^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{2}$$

Άρα τελικά η ζητούμενη εξίσωση της υπερβολής είναι :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=2 \text{ (ισοσκελής υπερβολή)}$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $C: 9x^2 - y^2 = 32$ που διέρχονται από το σημείο $P(0, -16)$.

Λύση

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της υπερβολής. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$9xx_1 - yy_1 = 32 \quad (1)$$

Όμως το σημείο M ανήκει και στην υπερβολή δηλαδή οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Άρα ισχύει :

$$9x_1^2 - y_1^2 = 32 \quad (2)$$

Επίσης το σημείο P ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$$9 \cdot 0 \cdot x_1 + 16y_1 = 32 \Leftrightarrow y_1 = 2 \quad (3)$$

Για να βρούμε τα x_1, y_1 επιλύουμε το σύστημα των (2) και (3). Έχουμε :

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 9x_1^2 - y_1^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ 9x_1^2 - 2^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = \pm 2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) τις παραπάνω τιμές για τα x_1 και y_1 και έχουμε :

$$9 \cdot 2x - 2y = 32 \Leftrightarrow 9x - y - 16 = 0 \quad \text{ή} \quad 9 \cdot (-2)x - 2y = 32 \Leftrightarrow 9x + y + 16 = 0,$$

που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων.

Άσκηση 4

Από σημείο $A(x_0, y_0)$ εκτός της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή και έστω B, Γ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η εξίσωση της

ευθείας $B\Gamma$ είναι: $\frac{xx_0}{\alpha^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1 \quad (1)$

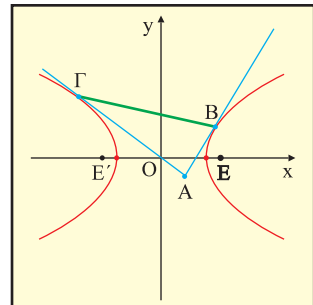
Λύση

Έστω $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο B έχει

$$\text{εξίσωση } \varepsilon_1: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$

Επειδή διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$, ισχύει $\frac{x_0 x_1}{\alpha^2} - \frac{y_0 y_1}{\beta^2} = 1$

Η τελευταία ισότητα μας δίνει την πληροφορία ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το B (αφού οι συντεταγμένες του B την ικανοποιούν).



Η εφαπτομένη στο Γ έχει εξίσωση $\varepsilon_2: \frac{xx_2}{\alpha^2} - \frac{yy_2}{\beta^2} = 1$. Επειδή διέρχεται από το

$A(x_0, y_0): \frac{x_0 x_2}{\alpha^2} - \frac{y_0 y_2}{\beta^2} = 1$ (2). Η ισότητα (2) μας λείπει ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας η

οποία διέρχεται από το Γ . Επειδή από δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία $B\Gamma$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής, η οποία έχει ίδιες εστίες με την έλλειψη:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Λύση

Για την έλλειψη έχουμε $a = 3$, $b = 2$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = 5 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{5}$. Αφού η έλλειψη και η υπερβολή έχουν ίδιες εστίες, έχουν ίδιο γ . Η υπερβολή είναι ισοσκελής, δηλαδή της μορφής $x^2 - y^2 = \alpha^2$.

$$\text{Έχουμε} \quad \left. \begin{array}{l} \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \stackrel{\alpha=\beta}{\Leftrightarrow} \gamma^2 = 2\alpha^2 \\ \gamma = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 5 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης υπερβολής είναι $C: x^2 - y^2 = \frac{5}{2}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $y = 4$ και τις ασύμπτωτες της υπερβολής.

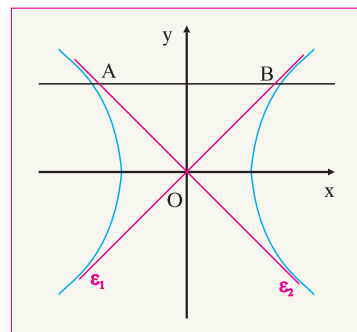
Λύση

Επειδή $a = 3$ και $b = 4$ οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις

$$\varepsilon_1: y = \frac{4}{3}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = -\frac{4}{3}x.$$

Από το σύστημα των ε_1 και $y = 4$ θα προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του B . Είναι

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{3}x \\ y = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array}, \text{ δηλαδή } B(3, 4).$$



Απο το σύστημα των ε_2 και $y = 4$ θα προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του Α. Είναι

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{4}{3}x \\ y = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \end{array}, \text{ δηλαδή } A(-3, 4).$$

$$\text{Είναι } \vec{OA} = (-3, 4), \vec{OB} = (3, 4) \text{ και } \det \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right) = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -24.$$

$$\text{Επομένως } (OAB) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12.$$

Άσκηση 7

Να εξετάσετε τι γραμμή παριστάνει η εξίσωση :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \mu, \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \mu \in \mathbb{R}, \text{ με } \alpha > \beta.$$

Λύση

α. Αν $\mu \neq 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2 \mu} - \frac{y^2}{\beta^2 \mu} = 1 \quad (2)$

i. Αν $\mu > 0$ τότε $(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\alpha\sqrt{\mu})^2} - \frac{y^2}{(\beta\sqrt{\mu})^2} = 1$, η οποία παριστάνει υπερβολή με παραμέ-

τρους: $A = \alpha\sqrt{\mu}$, $B = \beta\sqrt{\mu}$ και $\Gamma^2 = A^2 + B^2 = \mu\alpha^2 + \mu\beta^2$, οπότε έχει εστίες

$$E(\sqrt{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}, 0) \quad \text{και} \quad E'(-\sqrt{\mu\alpha^2 + \mu\beta^2}, 0).$$

ii. Αν $\mu < 0$ τότε $(2) \Leftrightarrow \frac{y^2}{\beta^2(-\mu)} - \frac{x^2}{\alpha^2(-\mu)} = 1$, με $A = \beta\sqrt{|\mu|}$, $B = \alpha\sqrt{|\mu|}$ και

$$\Gamma^2 = \beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|, \text{ οπότε οι εστίες της είναι } E(0, \sqrt{\beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|}), E'(0, -\sqrt{\beta^2|\mu| + \alpha^2|\mu|})$$

β. Αν $\mu = 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right) \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0 \text{ ή } \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$

Δηλαδή η (1) παριστάνει τις ευθείες $\beta x - \alpha y = 0$ και $\beta x + \alpha y = 0$.

Άσκηση 8

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ και το σημείο $M(1, 2)$. Από το M φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς την υπερβολή και έστω B, Γ είναι τα σημεία επαφής.

α. Να προσδιορισθεί η εξίσωση της ΒΓ.

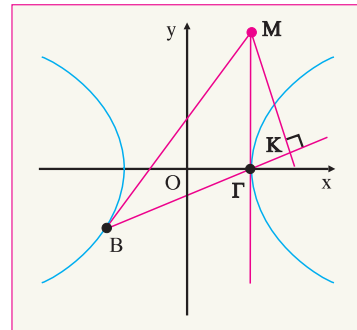
β. Να υπολογισθεί η απόσταση του Μ από τη ΒΓ.

γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

Λύση

α. Η ΒΓ έχει εξίσωση ΒΓ: $xx_1 - yy_1 = 1$ όπου (x_1, y_1) είναι το σημείο από το οποίο άγονται οι εφαπτόμενες. Οπότε ΒΓ: $x - 2y = 1$.

β. Είναι $d(M, B\Gamma) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ είναι $(MB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot MK$, όπου MK η απόσταση του Μ από τη ΒΓ. Για να βρούμε τα Β, Γ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας ΒΓ και της υπερβολής:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1 \\ x - 2y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (2y+1)^2 - y^2 = 1 \\ x = 2y+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 4y^2 + 4y + 1 - y^2 = 1 \\ x = 2y+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3y^2 + 4y = 0 \\ x = 2y+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y(3y+4) = 0 \\ x = 2y+1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ ή } y = -\frac{4}{3} \\ x = 1 \text{ ή } x = -\frac{8}{3} + 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ ή } y = -\frac{4}{3} \\ x = 1 \text{ ή } x = -\frac{5}{3} \end{array} \right\}$$

Επομένως, είναι $\Gamma(1,0)$ και $B\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Έτσι $(B\Gamma) = \sqrt{\left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+16}{9}} = \frac{\sqrt{80}}{3}$ και το εμβαδόν του

τριγώνου ΜΒΓ είναι $(MB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{80}}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ τ.μ.

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου $C: (x+1)^2 + y^2 = 1$

Λύση

Το κέντρο του κύκλου C είναι το $K(-1,0)$ και η ακτίνα του $\rho = 1$.

Έστω Μ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

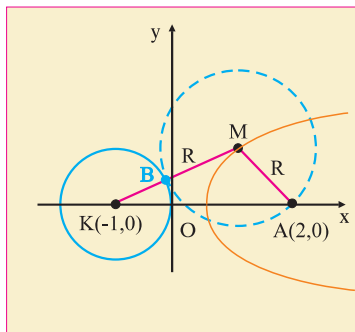
Είναι

$$(MK) = (MB) + (BK) \Leftrightarrow (MK) = (MA) + (BK) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MK) - (MA) = (BK) \Leftrightarrow (MK) - (MA) = 1$$

Επομένως η διαφορά των αποστάσεων του σημείου M από τα σταθερά σημεία K και A είναι σταθερή και ίση με 1. Το σημείο M λοιπόν, ανήκει στην υπερβολή με

$$\text{εστίες τα } K, A \text{ και σταθερή διαφορά } 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$



$$\text{Η εστιακή της απόσταση είναι } (KA) = 3 \Leftrightarrow 2\gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Επομένως } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{2}. \text{ Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος}$$

$$\text{είναι ο δεξιός κλάδος } (MK > MA) \text{ της υπερβολής } \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να δείξετε ότι:

α. Η απόσταση της εστίας $E(\gamma, 0)$ από την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ ισούται με β .

β. Το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από μια τυχαία εφαπτομένη της υπερβολής και τις ασύμπτωτες είναι σταθερό και ίσο με $\alpha\beta$.

Λύση

α. Η ασύμπτωτη (ϵ_1) έχει εξίσωση

$$\epsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \beta x - \alpha y = 0.$$

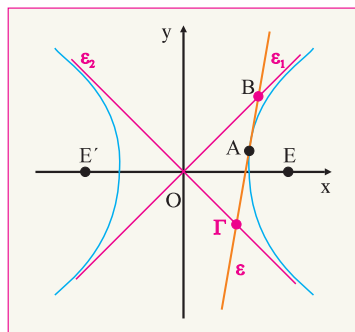
Η εστία E έχει συντεταγμένες $E(\gamma, 0)$.

Επομένως η απόσταση της E από την (ϵ_1) είναι:

$$d(E, \epsilon_1) = \frac{|\beta\gamma|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \beta.$$

β. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της εφαπτομένης (ϵ) με την ασύμπτωτη (ϵ_1) και της εφαπτομένης με την ασύμπτωτη (ϵ_2) .

Η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο $A(x_1, y_1)$ της υ-



περβολής έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2.$$

Η ασύμπτωτη (ε_1) έχει εξίσωση $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και η (ε_2) έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } \begin{cases} \varepsilon: \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2 \\ \varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 \frac{\beta}{\alpha}x = \alpha^2 \beta^2 \\ y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ y = \frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1} \end{cases}. \text{ Επομένως } B\left(\frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 - \alpha y_1}, \frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1}\right)$$

$$\text{Ακόμα έχουμε } \begin{cases} \varepsilon: \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2 \\ \varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 + \alpha y_1} \\ y = -\frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } \Gamma\left(\frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 + \alpha y_1}, -\frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1}\right).$$

$$\text{Το εμβαδόν του τριγώνου } O\Gamma\Gamma \text{ δίνεται από τον τύπο } (O\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \end{pmatrix} \right|.$$

$$\text{Έχουμε: } \vec{OB} = \left(\frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 - \alpha y_1}, \frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1} \right) \text{ και } \vec{O\Gamma} = \left(\frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 + \alpha y_1}, -\frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1} \right).$$

$$\text{Επομένως } (O\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 - \alpha y_1} & \frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 - \alpha y_1} \\ \frac{\alpha^2 \beta}{\beta x_1 + \alpha y_1} & -\frac{\alpha \beta^2}{\beta x_1 + \alpha y_1} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} 2 \left| \frac{\alpha^3 \beta^3}{\beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2} \right| \quad (1)$$

Το σημείο Α ανήκει στην υπερβολή.

$$\text{Επομένως ισχύει: } \frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2 \quad (2)$$

Η (1) γίνεται σύμφωνα με την (2): $(OB\Gamma) = \left| \frac{\alpha^3 \beta^3}{\alpha^2 \beta^2} \right| = \alpha\beta$.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{1}{\sin\theta}, \epsilon\phi\theta\right)$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ κινείται σε υπερβολή. Να βρείτε τις κορυφές A, A' , τις εστίες της E και E' και τις ασύμπτωτες.

Λύση

Έστω $M(x, y)$. Τότε $x = \frac{1}{\sin\theta}$ και $y = \epsilon\phi\theta$. Απο την ταυτότητα $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \epsilon\phi^2\theta$ παίρνουμε: $x^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$.

Επομένως το M κινείται στην υπερβολή με εξίσωση: $x^2 - y^2 = 1$.

Επειδή $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sin\theta > 0 \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή το M κινείται στο δεξιό κλάδο της

παραπάνω ισοσκελούς υπερβολής. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως η υπερβολή έχει κορυφές $A(1,0), A'(-1,0)$, εστίες $E(\sqrt{2},0)$ και $E'(-\sqrt{2},0)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$

Άσκηση 12

Να βρεθεί συνθήκη ώστε η ευθεία $(\epsilon): y = \lambda x + k$ να εφάπτεται στην υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Λύση

Η ευθεία και η υπερβολή εφάπτονται αν και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεων τους έχει μοναδική λύση (διπλή ρίζα).

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} &= 1 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{(\lambda x + k)^2}{\beta^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ \beta^2 x^2 - \alpha^2 (\lambda x + k)^2 &= \alpha^2 \beta^2 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} y &= \lambda x + k \\ (\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^2 k \lambda x - \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 k^2 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς x .

Απαιτούμε να έχει διπλή ρίζα, έτσι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^4 k^2 \lambda^2 - 4(\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2)(-\alpha^2 k^2 - \alpha^2 \beta^2) = 0 \Leftrightarrow k^2 + \beta^2 = \alpha^2 \lambda^2 \quad (2)$$

Η (2) είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται στην υπερβολή C.

Άσκηση 13

Δίνεται η υπερβολή $C: 9x^2 - y^2 = 32$. Να δείξετε, ότι η ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, -2)$ της υπερβολής και είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x - 9y + 18 = 0$ εφάπτεται στην υπερβολή C.

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (δ) είναι $\lambda_\delta = \frac{1}{9}$.

Επειδή $(\varepsilon) \perp (\delta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -9$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(2, -2)$ και έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -9$.

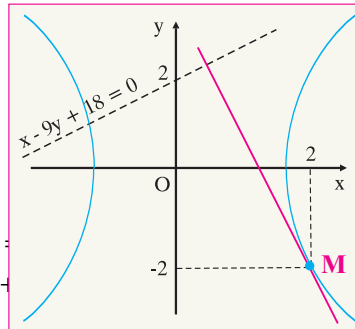
Επομένως η εξίσωσή της είναι:

$$y + 2 = -9(x - 2) \Leftrightarrow y = -9x + 16.$$

Λύνουμε το σύστημα της (ε) και της υπερβολής C

$$\left. \begin{aligned} 9x^2 - y^2 &= 32 \\ y &= -9x + 16 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 9x^2 - (-9x + 16)^2 &= 32 \\ y &= -9x + 16 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ y &= -9x + 16 \end{aligned} \right\}$$

Η εξίσωση (1) είναι δευτεροβάθμια ως προς x και έχει $\Delta = 0$. Επομένως η εξίσωση, αλλά και το σύστημα έχουν μοναδική λύση. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία εφάπτεται στην υπερβολή.



Άσκηση 14

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{\lambda - 16} + \frac{y^2}{\lambda - 4} = 1 \quad (1)$

Να εξετασθεί τι γραμμή παριστάνει για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R} - \{4, 16\}$. Να βρεθούν οι εστίες της κάθε καμπύλης.

Λύση

α. $\left. \begin{aligned} \text{Αν } \lambda - 16 > 0 \\ \text{και } \lambda - 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lambda > 16 \\ \lambda > 4 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda > 16$, η (1) παριστάνει έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$

με $\beta^2 = \lambda - 16$ και $\alpha^2 = \lambda - 4$ ($\alpha > \beta$).

Οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \lambda - 4 - \lambda + 16 = 12 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}$ και οι εστίες της έλλειψης είναι $E(0, 2\sqrt{3})$ και $E'(0, -2\sqrt{3})$.

β. Αν $4 < \lambda < 16$ ισχύει $\lambda - 16 < 0$ και $\lambda - 4 > 0$ οπότε θέτουμε $16 - \lambda = \beta^2$ και $\lambda - 4 = \alpha^2$ και

η (1) γίνεται $\frac{y^2}{\lambda - 4} - \frac{x^2}{16 - \lambda} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, η οποία είναι εξίσωση υπερβολής.

Ισχύει: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \lambda - 4 + 16 - \lambda = 12 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}$.

Οπότε $E(0, 2\sqrt{3})$ και $E'(0, -2\sqrt{3})$ είναι οι εστίες της υπερβολής αυτής.

γ. Αν $\lambda < 4$ ισχύει $\lambda - 16 < 0$ και $\lambda - 4 < 0$ οπότε η (1) γίνεται

$$-\frac{x^2}{16 - \lambda} - \frac{y^2}{4 - \lambda} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16 - \lambda} + \frac{y^2}{4 - \lambda} = -1 \quad (2)$$

Θέτουμε $16 - \lambda = \alpha^2$ και $4 - \lambda = \beta^2$ και έχουμε: $(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -1$, που είναι προφανώς αδύνατη.

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - 4y^2 = 4$ είναι εξίσωση υπερβολής και να βρεθούν οι εστίες της και η εκκεντρότητά της.

$$(\text{Υπ.}: E(\sqrt{5}, 0) \text{ και } E'(-\sqrt{5}, 0) \text{ και } e = \frac{\sqrt{5}}{2})$$

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: 9x^2 - y^2 = 32$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 9x + y + 9 = 0$.

$$(\text{Απ.}: y = -9x + 16 \text{ ή } y = -9x - 16)$$

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $M(3, 4)$.

$$(\text{Απ.}: x = 3 \text{ ή } y = \frac{5}{6}x + \frac{3}{2})$$

4. Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$.

$$(\text{Απ.: } A(0,5) \text{ και } A'(0,-5) \text{ και } E(0,\sqrt{26}) \text{ και } E'(0,-\sqrt{26}) \text{ και } \varepsilon = \frac{\sqrt{26}}{5})$$

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

$$(\text{Απ.: } \frac{16}{3})$$

6. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. Να βρεθεί η εκκεντρότητά της και οι εστίες της. Επιπλέον να βρεθούν και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

$$(\text{Απ.: } \varepsilon = \frac{3}{2} \text{ και } E(0,3) \text{ και } E'(0,-3))$$

7. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

$$(\text{Απ.: } y = \pm \frac{2}{3}x)$$

8. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής αν έχει εστιακή απόσταση $2c = 20$ ασύμπτωτες $y = \pm \frac{4}{3}x$ και οι εστίες της είναι στον άξονα $x'x$.

$$(\text{Απ.: } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1)$$

9. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της υπερβολής $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, η οποία έχει μέσο το σημείο $M(3,-1)$.

$$(\text{Απ.: } 3x + 4y - 5 = 0)$$

10. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 144$ παριστάνει υπερβολή και να βρεθούν οι κορυφές, οι εστίες και η εκκεντρότητα αυτής.

$$(\text{Απ.: } A'(-4,0), A(4,0), E'(-5,0), E(5,0), \varepsilon = \frac{5}{4})$$

11. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κέντρο την αρχή, εστία το σημείο $(8,0)$ και κορυφή το $(6,0)$.

$$\left(\text{Απ.: } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1 \right)$$

12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε η απόστασή τους από το σημείο $A(8,0)$ να είναι διπλάσια της απόστασής τους από την ευθεία $x = 2$.

$$\left(\text{Απ.: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1 \right)$$

13. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο $(4,6)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \pm\sqrt{3}x$ και εστίες στον άξονα $x'x$.

$$\left(\text{Απ.: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \right)$$

14. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $c: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ που άγονται από το σημείο $A(1,1)$.

$$\left(\text{Απ.: } y - 1 = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{8}(x - 1) \right)$$

15. Να βρεθεί η συνθήκη για να εφάπτεται η ευθεία $y = \lambda x + k$ στην υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

$$(\text{Απ.: } k^2 = \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2)$$

16. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής $9x^2 - y^2 = 32$ που διέρχονται από το σημείο $(0,-16)$.

$$(\text{Απ.: } y = 9x - 16, y = -9x - 16)$$

17. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x - y + 1 = 0$ εφάπτεται στην υπερβολή: $x^2 - 4y^2 = 12$.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $c: x^2 - y^2 = 4$. Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της στο 1^ο τεταρτημόριο. Θεωρούμε την εφαπτομένη (ε) της υπερβολής σε σημείο της M , που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν E . Έστω (η) η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο M , που σχηματίζει με τις ασύμπτωτες της (c) τρίγωνο εμβαδού E_1 .

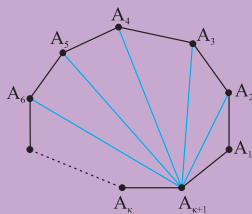
Έστω E_2 το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη στο σημείο M και τις ασύμπτωτες της (c).

Να αποδείξετε ότι : $E^2 E_1 = 64$ και $E^2 E_1 = (E_2)^3$.

(Υπ.: Γράψτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M και της κάθετης της εφαπτομένης στο M και βρείτε τα σημεία τομής αυτών με τους άξονες και τις ασύμπτωτες).

11^ο μάθημα

Επαγωγή



12^ο μάθημα

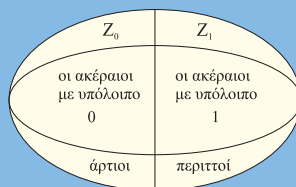
Διαιρετότητα

$v_2 \backslash v_1$	0	1
0	$v_1 \cdot v_2 = 0$ $v_1 - v_2 = 0$	$v_1 \cdot v_2 = 0$ $v_1 - v_2 = 1$
1	$v_1 \cdot v_2 = 0$ $v_1 - v_2 = -1$	$v_1 \cdot v_2 = 1$ $v_1 - v_2 = 0$

4^ο Κεφάλαιο

13^ο μάθημα

Ευκλείδεια διαίρεση





Μαθηματική Επαγωγή

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο των προόδων έχει αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός

$$P(v): 1+2+3+\dots+v = \frac{v(v+1)}{2}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

είναι αληθής (ως άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$) δηλαδή.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (\text{προφανές})$$

$$1+2 = \frac{2(2+1)}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 \quad (\text{προφανές})$$

$$1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} \Leftrightarrow 6 = 6 \quad (\text{προφανές})$$

.....
.....

$$1+2+3+\dots+(v-1)+v = \frac{v(v+1)}{2} \quad (\text{ισχύει όπως έχει αποδειχθεί})$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός $P(v)$ αν και επαληθεύεται από πάρα πολλές διαδοχικές τιμές του $v \in \mathbb{N}^*$ χωρίς την βοήθεια των προόδων δεν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει **για κάθε** $v \in \mathbb{N}^*$.

Γεννιέται λοιπόν η ανάγκη μιας μεθόδου που να αποδεικνύει την ισχύ ανάλογων ισχυρισμών $P(v)$ για κάθε τιμή του θετικού ακέραιου n ή για κάθε $v \geq v_0$, $v_0 \in \mathbb{N}^*$.

Η αποδεικτική αυτή μέθοδος λέγεται **μαθηματική ή τέλεια επαγωγή** και στηρίζεται στην λεγόμενη “αρχή της μαθηματικής επαγωγής” η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $P(n)$ ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους. Αν
α. ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1 δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής και
β. η αλήθεια του $P(n)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(n+1)$ για κάθε n .
 Τότε ο ισχυρισμός $P(n)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους n .

Σε αρκετές περιπτώσεις η αλήθεια του ισχυρισμού $P(n)$ “ξεκινάει” από $n = n_0$, $n \in \mathbb{N}^*$ και $n_0 = 2$ ή $n_0 = 3$ ή ..., οπότε επιβεβαιώνουμε την αλήθεια του ισχυρισμού για $n = 2$ ή $n = 3$ ή ..., ανάλογα.

Για παράδειγμα

α. Αν a ακέραιος με $a > 1$ ισχύει $a^n - 1 > n(a-1)$, για κάθε $n \geq 2$. Είναι φανερό ότι για $n = 1$ έχουμε

$$a^1 - 1 > 1(a-1) \Leftrightarrow a-1 > a-1 \text{ που δεν ισχύει.}$$

β. Ισχύει $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n+1]{n+1}$, για κάθε $n \geq 4$.

Είναι φανερό ότι για $n = 1$ έχουμε $\sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[2]{2}$, που ισχύει

για $n = 2$ έχουμε $\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 2^3 < 3^2$, που ισχύει

για $n = 3$ έχουμε $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{4}$, που δεν ισχύει

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για την απόδειξη ισχυρισμού $P(n)$ που αναφέρεται σε ισότητα ακολουθούμε αυστηρά τα βήματα της επαγωγικής μεθόδου που προαναφέραμε.

Σχετική δυσκολία παρουσιάζεται στο “πέρασμα” από την αλήθεια του $P(n)$ στην αλήθεια του $P(n+1)$ διότι αρκετές φορές χρειάζονται κατάλληλοι μετασχηματισμοί (πρόσθεση, πολ/σμός, ...) ώστε να εμφανίσουμε την “μορφή” του $P(n+1)$.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι : **α.** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\textbf{β. } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση

Έστω $P(n)$ η παραπάνω ισχυρισμοί:

α. • Για $n = 1$ έχουμε $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$ δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής.

- Δεχόμαστε ότι ο $P(v)$ είναι αληθής για τυχαίο $v \in \mathbb{N}^*$ δηλαδή :

$$1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} \quad (I)$$

- Θα δείξουμε ότι και ο $P(v+1)$ είναι αληθής δηλαδή :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (v+1)^2 = \frac{(v+1)((v+1)+1)(2(v+1)+1)}{6}$$

Έχουμε

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 + (v+1)^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + (v+1)^2 = \quad (\text{λόγω της (I)})$$

$$\begin{aligned} \frac{v(v+1)(2v+1) + 6(v+1)^2}{6} &= \frac{(v+1)[v(2v+1) + 6(v+1)]}{6} = \\ &= \frac{(v+1)(2v^2 + v + 6v + 6)}{6} = \frac{(v+1)(2v^2 + 7v + 6)}{6} = \frac{(v+1)2\left(v + \frac{3}{2}\right)(v+2)}{6} = \\ &= \frac{(v+1)(2v+3)(v+2)}{6} = \frac{(v+1)[2(v+1)+1][(v+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

Άρα η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους v .

β. • Για $v=1$ έχουμε $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 \Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει.

- Δεχόμαστε ότι ο $P(v)$ είναι αληθής για $v \in \mathbb{N}^*$ δηλαδή

$$1^3 + 2^3 + \dots + v^3 = \left[\frac{v(v+1)}{2}\right]^2 \quad (I)$$

- Θα δείξουμε ότι και ο $P(v+1)$ είναι αληθής δηλαδή :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 + (v+1)^3 = \left[\frac{(v+1)[(v+1)+1]}{2}\right]^2$$

Έχουμε λόγω της (I) ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = \left[\frac{v(v+1)}{2}\right]^2$

Έτσι: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 + (v+1)^3 = \left[\frac{v(v+1)}{2}\right]^2 + (v+1)^3 =$

$$\frac{v^2(v+1)^2}{4} + (v+1)^2(v+1) = \frac{v^2(v+1)^2 + 4(v+1)^2(v+1)}{4} =$$

$$\frac{(v+1)^2 (v^2 + 4(v+1))}{4} = \frac{(v+1)^2 (v^2 + 4v + 4)}{4} = \frac{(v+1)^2 (v+2)^2}{4} =$$

$$\frac{(v+1)^2 ((v+1)+1)^2}{2^2} = \left[\frac{(v+1)((v+1)+1)}{2} \right]^2.$$

Άρα η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους v .

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι το πλήθος των διαγωνίων ενός n -γώνου είναι $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$ για κάθε $n \geq 4$.

Λύση

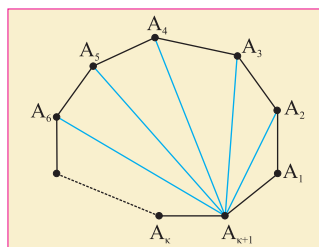
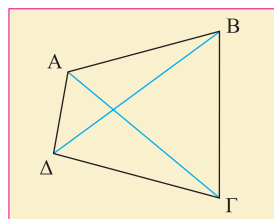
Έστω $P(n)$ ο παραπάνω ισχυρισμός.

- Για $n = 4$ έχουμε $\delta_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$, που ισχύει.
- Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$ με $n > 4$, δηλαδή $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$ οπότε ο $P(n)$ είναι αληθής.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$ δηλαδή

$$\delta_{n+1} = \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Πράγματι, αν A_{n+1} η τελευταία κορυφή του $(n+1)$ γώνου $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ τότε όταν αυτή ενωθεί με τις υπόλοιπες κορυφές (εκτός της A_1 και της A_n) δημιουργεί $n-2$ διαγωνίους. Αν προσθέσουμε και τη διαγώνιο $A_1 A_n$ τότε το $(n+1)$ γωνο έχει $n-2+1 = n-1$ διαγωνίους περισσότερες από το n -γωνο. Έτσι έχουμε:

$$\delta_{n+1} = \delta_n + n - 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-3) + 2(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$



Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι $2^{4^n} - 1 = \text{πολ}15$, για κάθε $n \geq 1$.

Λύση

Έστω $P(n)$ ο παραπάνω ισχυρισμός.

- Για $n = 1$ ισχύει $2^{4^1} - 1 = \text{πολ}15 \Leftrightarrow 15 = \text{πολ}15$, που ισχύει οπότε ο $P(1)$ είναι αληθής.
- Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}^*$ δηλαδή $2^{4^n} - 1 = \text{πολ}15 (= 15\lambda)$, οπότε ο $P(n)$ είναι αληθής. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$ δηλαδή $2^{4^{n+1}} - 1 = \text{πολ}15 (= 15\lambda)$, οπότε ο $P(n+1)$ είναι αληθής.

$$\text{Είνα } 2^{4(v+1)} - 1 = 2^{4v} \cdot 2^4 - 1 = 16 \cdot 2^{4v} - 1 = 16(15\lambda + 1) - 1 = 15 \cdot 16\lambda + 15 = 15(16\lambda + 1) = \text{πολ } 15$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για την απόδειξη ισχυρισμού $P(n)$ που αναφέρεται σε ανισότητα ακολουθούμε αυστηρά τα βήματα της επαγωγής που προαναφέραμε και η απόδειξη γίνεται σχετικά εύκολα (παράδειγμα 1) με ενίσχυση των ανισοτήτων.

Στην πορεία αυτή συχνά είναι πολύ χρήσιμη η μεταβατική ιδιότητα, δηλαδή

Αν δεχθούμε ότι ισχύει η σχέση (δ): $P(n) > A$ και χρειάζεται να δείξουμε με αυτή την παραδοχή ότι $P(n+1) > B$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $A > B$ ή $\Gamma > B$, όπου Γ η μορφή του A από την επιτρεπτή επέμβαση στα μέλη της σχέσης (δ) ώστε το $P(n)$ να πάρει την μορφή $P(n+1)$. (Βλ. παράδειγμα 2).

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 4$, ισχύει $n! > 2^n$, όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Λύση

Έστω $P(n)$ η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε.

- Για $n = 4$ έχουμε $4! > 2^4 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 \Leftrightarrow 24 > 16$ δηλαδή ο $P(4)$ είναι αληθής.
 - Δεχόμαστε ότι ο $P(n)$ είναι αληθής για τυχαίο $n \geq 4$, δηλαδή $n! > 2^n$ (δ).
 - Θα δείξουμε ότι ο $P(n)$ ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον $n+1$, δηλαδή $(n+1)! > 2^{n+1}$ οπότε και ο $P(n+1)$ θα είναι αληθής.
- Έχουμε λόγω της (δ)

$$n! > 2^n \text{ οπότε } n!(n+1) > 2^n(n+1) \text{ ή } (n+1)! > 2^n \cdot 2$$

(είναι $2 < n+1$ αφού $n \geq 4$) ή $(n+1)! > 2^{n+1}$. Άρα η ανισότητα αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 4$.

Παράδειγμα 2

α. Να δείξετε ότι $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$, για κάθε ακέραιο $n \geq 4$.

β. Να δείξετε ότι $2^n > n^3$, για κάθε ακέραιο $n \geq 10$.

Λύση

α. Έστω $P(n)$ η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε.

- Για $n = 4$ έχουμε $4^3 > 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \Leftrightarrow 64 > 61$, δηλαδή ο $P(4)$ είναι αληθής.
- Δεχόμαστε ότι ο $P(n)$ είναι αληθής για τυχαίο $n \geq 4$, δηλαδή $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ (δ)
- Θα δείξουμε ότι ο $P(n)$ ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον $n+1$, δηλαδή:

$$(n+1)^3 > 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1, \text{ οπότε και ο } P(n+1) \text{ θα είναι αληθής.}$$

Έχουμε λόγω της (δ) ότι $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ οπότε

$$n^3 + (3n^2 + 3n + 1) > 3n^2 + 3n + 1 + (3n^2 + 3n + 1) \Leftrightarrow (n+1)^3 > 2(3n^2 + 3n + 1).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $2(3v^2 + 3v + 1) > 3(v+1)^2 + 3(v+1) + 1 \Leftrightarrow$

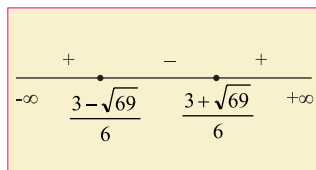
$$6v^2 + 6v + 2 > 3v^2 + 6v + 3 + 3v + 3 + 1 \Leftrightarrow 6v^2 + 6v + 2 > 3v^2 + 9v + 7 \Leftrightarrow 3v^2 - 3v - 5 > 0$$

Είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 69 > 0$ οπότε $v_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{6}$.

Η συμπεριφορά του $3v^2 - 3v - 5$ φαίνεται στο σχήμα

και φανερά για $v \geq 4$ είναι $3v^2 - 3v - 5 > 0$.

Άρα η ανισότητα είναι αληθής για όλους τους θετικούς ακέραιους v με $v \geq 4$.



β. Έστω $P(v)$ η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε:

- Για $v = 10$ έχουμε $2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 1024 > 1000$ δηλαδή ο $P(10)$ είναι αληθής.
- Δεχόμαστε ότι ισχύει για $v \in \mathbb{N}$ δηλαδή $2^v > v^3$ (δ) οπότε ο $P(v)$ είναι αληθής και
- Θα δείξουμε με την παραδοχή αυτή ότι ισχύει για $v + 1$ δηλαδή $2^{v+1} > (v+1)^3$ οπότε ο $P(v+1)$ είναι αληθής.

Έχουμε λόγω της (δ) ότι $2^v > v^3$ οπότε $2^v \cdot 2 > v^3 \cdot 2$ δηλαδή $2^{v+1} > 2v^3$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $2v^3 > (v+1)^3 \Leftrightarrow 2v^3 > v^3 + 3v^2 + 3v + 1 \Leftrightarrow v^3 > 3v^2 + 3v + 1$ το οποίο ισχύει λόγω του α. ερωτήματος.

Άρα η ανισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους v με $v \geq 10$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 2$ ισχύει:

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + v \cdot 2^{(v-1)} = (v-1) \cdot 2^v$$

Λύση

- Για $v = 2$: $2 \cdot 2^1 = (2-1) \cdot 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$ ισχύει.

- Έστω ότι ισχύει για τυχαίο $v \geq 2$: $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + v \cdot 2^{v-1} = (v-1) \cdot 2^v$ (1)

- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον επόμενο φυσικό τον $v + 1$:

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (v+1) \cdot 2^v = v \cdot 2^{v+1} \quad (2)$$

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2)

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (v+1) \cdot 2^v = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + v \cdot 2^{v-1} + (v+1) \cdot 2^v =$$

$$(v-1) \cdot 2^v + (v+1) \cdot 2^v = (v-1+v+1) \cdot 2^v = 2v \cdot 2^v = v \cdot 2^{v+1}. \text{ Άρα ισχύει για κάθε } v \geq 2.$$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι $3^v > v^3$, για κάθε φυσικό αριθμό $v \geq 4$.

Λύση

- Για $n = 4$: $3^4 > 4^3 \Leftrightarrow 81 > 64$, ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$: $3^k > k^3$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$: $3^{k+1} > (k+1)^3$ (2)

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2): $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \stackrel{(1)}{>} 3 \cdot k^3$ και αρκεί να δείξουμε ότι

$$3k^3 > (k+1)^3 \Leftrightarrow 3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \Leftrightarrow 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$2k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > 0 \Leftrightarrow k(2k^2 - 3k - 3) - 1 > 0 \Leftrightarrow k[k(2k - 3) - 3] - 1 > 0 \text{ ισχύει γιατί}$$

$$k \geq 4 \Leftrightarrow 2k \geq 8 \Leftrightarrow 2k - 3 \geq 5 \left\{ \begin{array}{l} k(2k - 3) \geq 20 \Leftrightarrow k(2k - 3) - 3 \geq 17 \\ k \geq 4 \end{array} \right.$$

$$k(2k - 3) - 3 \geq 17 \left\{ \begin{array}{l} k[k(2k - 3) - 3] \geq 68 \Leftrightarrow k[k(2k - 3) - 3] - 1 \geq 67 \\ k \geq 4 \end{array} \right.$$

Άρα ισχύει $3^{k+1} > (k+1)^3$, οπότε ισχύει για κάθε $n \geq 4$.

Παρατήρηση : Χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $n = k$ και $n = k + 1$ που συνηθίζεται να αναφέρεται σε αρκετά βιβλία.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει : $2^n + 5^n + 7^n > 11n$.

Λύση

$$\text{Για } n \geq 2 \text{ είναι : } 2^n = (1+1)^n > 1 + n \cdot 1 = 1 + n > n$$

$$5^n = (1+4)^n > 1 + n \cdot 4 = 1 + 4n > 4n$$

$$7^n = (1+6)^n > 1 + n \cdot 6 = 1 + 6n > 6n$$

απ'όπου με πρόσθεση κατα μέλη προκύπτει:

$$2^n + 5^n + 7^n > n + 4n + 6n \Leftrightarrow 2^n + 5^n + 7^n > 11n$$

$$\text{Για } n=1 \text{ έχουμε : } 2^1 + 5^1 + 7^1 > 11^1 \cdot 1 \Leftrightarrow 14 > 11.$$

Ανισότητα Bernoulli

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$$

$$\alpha > -1, \quad \alpha \neq 0$$

$$\text{με } n \geq 2$$

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ ισχύει : $7^n > 7n - 1$

Λύση

- Για $n = 1$: $7^1 > 7 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow 7 > 6$, ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$: $7k > 7k - 1$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$: $7^{k+1} > 7(k+1) - 1 \Leftrightarrow 7^{k+1} > 7k + 6$ (2)

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της (2): $7^{κ+1} = 7 \cdot 7^κ > 7 \cdot (7κ-1) = 49κ-7$

αρκεί να δείξουμε ότι $49κ-7 > 7κ+6 \Leftrightarrow 42κ > 13 \Leftrightarrow κ > \frac{13}{42}$, που ισχύει αφού $κ \geq 1$

οπότε $7^{κ+1} > 49κ-7 > 7κ+6$ δηλαδή $7^{κ+1} > 7κ+6$. Άρα ισχύει για κάθε $κ \geq 1$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να δείξετε ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^v} = 1 - \frac{1}{2^v}$ για κάθε θετικό ακέραιο v .

2. Να δείξετε ότι

α. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1) = \frac{v(v+1)(v+2)}{3}$

β. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v(v+1)} = \frac{v}{v+1}$

γ. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + v(v+1)^2 = \frac{v(v+1)(v+2)(3v+5)}{12}$ για κάθε θετικό ακέραιο v .

3. α. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο v ισχύει $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2v-1)^2 = \frac{v(4v^2-1)}{3}$.

β. Να υπολογίσετε τον φυσικό v ώστε $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2v-1)^2 = 1330$.

4. Να δείξετε ότι $2^v > v^2$ για κάθε θετικό ακέραιο v με $v \geq 5$.

5. Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{v}$ για κάθε θετικό ακέραιο v με $v > 3$.

6. α. Αν a πραγματικός αριθμός με $-1 < a \neq 0$ να δείξετε ότι ισχύει $(1+a)^v > 1+va$ για κάθε θετικό ακέραιο v με $v \geq 2$. (ανισότητα Bernoulli)

β. Να δείξετε ότι i. $\left(\frac{3}{2}\right)^v > 1 + \frac{v}{2}$, ii. $4^v > 1+3v$,

iii. $7^v > 1+6v$ για κάθε θετικό ακέραιο v με $v \geq 2$.

7. α. Αν α ακέραιος αριθμός με $1 < \alpha$ να δείξετε ότι ισχύει $\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1)$ για κάθε θετικό ακέραιο n με $n \geq 2$ (ανισότητα Tchebychef)

β. Να δείξετε ότι i. $\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > \frac{n}{2},$

ii. $4^n - 1 > 3n,$

iii. $7^n - 1 > 6n$ για κάθε θετικό ακέραιο n με $n \geq 2$.

8. α. Αν α, β ακέραιοι αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$ για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$.

β. Έστω οι διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha = 2 - \beta$.

Να δείξετε ότι $\alpha^n > 2 - \beta^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n με $n \geq 2$.

9. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ αποτελούν την υποτείνουσα και τις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\alpha^n > \beta^n + \gamma^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n με $n \geq 3$.

Ε.

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Να δείξετε ότι $2003^{2004} > 2004^{2003}$.

(Υπ: Να δείξετε ότι $n^{n+1} > (n+1)^n$ για κάθε φυσικό $n \geq 3$).

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα

Αποδεικνύεται ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους a και β , $\beta \neq 0$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα και διατυπώνεται ως εξής :

Αν a και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ τέτοιοι ώστε

$$a = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

- Η διαδικασία εύρεσης των κ , υ λέγεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση του a με τον β** και συμβολίζουμε $a : \beta$.
- Η ισότητα $a = \kappa\beta + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < |\beta|$, λέγεται **ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης του a με τον β** .
- Ο κ λέγεται **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης αυτής, ενώ ο a **διαιρετέος** και ο β **διαιρέτης**.
- Η διαίρεση λέγεται **τέλεια** αν το υπόλοιπο είναι ίσο με 0.

Παρατηρήσεις και συνέπειες του θεωρήματος

α. Οι δυνατές τιμές του υπολοίπου υ της ευκλείδειας διαίρεσης του ακεραίου a με τον μη μηδενικό ακέραιο β είναι $0, 1, 2, 3, \dots, |\beta| - 1$ ($0 \leq \upsilon \leq |\beta| - 1$).

β. Είναι πλέον φανερό ότι για την διαίρεση του ακεραίου a με τον ακέραιο 2 ισχύει:

$$a = 2 \cdot \kappa + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < 2.$$

Οι δυνατές τιμές του υ είναι 0 ή 1.

Αν $\upsilon = 0$ τότε $a = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (**άρτιοι αριθμοί**)

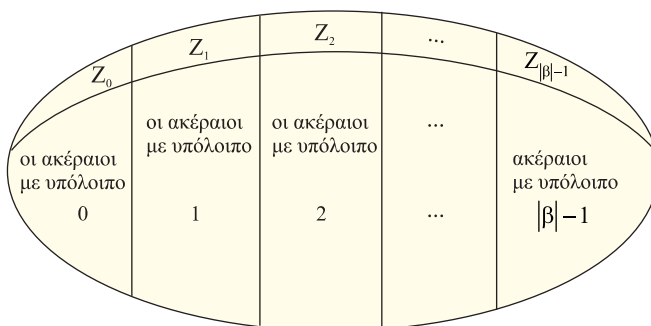
Αν $\upsilon = 1$ τότε $a = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (**περιττοί αριθμοί**)

γ. Λόγω της μοναδικότητας του πηλίκου και του υπολοίπου σε μια ευκλείδεια διαίρεση η ισότητα $a = \beta \cdot \lambda + \mu$ με $0 \leq \mu < |\beta|$, εκφράζει την ευκλείδεια διαίρεση του ακεραίου a με τον ακέραιο $\beta \neq 0$ με πηλίκο λ και υπόλοιπο μ .

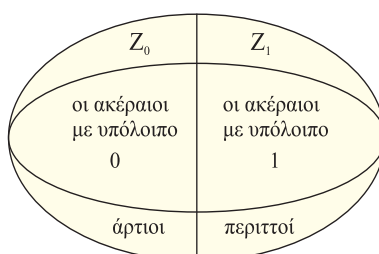
δ. Οι ακέραιοι αριθμοί ταξινομούνται σε κατηγορίες ανάλογα με την τιμή του υπολοίπου

της διαίρεσής τους με έναν ακέραιο έστω $\beta \neq 0$. (ισοϋπόλοιποι)

Ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \nu$ με $\nu = 0, 1, 2, \dots, |\beta| - 1$ όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$ (τυχαίος) και $\beta \in \mathbb{Z}^*$ (συγκεκριμένος). Τότε:



Ειδικά για την διαίρεση με τον 2 έχουμε:



Σχόλιο

Για την αντιμετώπιση αρκετών προβλημάτων στην θεωρία αριθμών χρειάζεται να διακρίνουμε τους ακέραιους σε δύο μεγάλες “πολυπληθείς” ομάδες, τους άρτιους και τους περιττούς δηλαδή της μορφής $\alpha = 2\kappa$ ή $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα.

Άλλες φορές πάλι η λύση των προβλημάτων ή η απόδειξη ιδιοτήτων των ακεραίων απαιτεί τη διάκρισή τους σε μεγάλου πλήθους “ολιγομελείς” ομάδες δηλαδή της μορφής

$$\alpha = \kappa\beta, \alpha = \kappa\beta + 1, \alpha = \kappa\beta + 2, \dots, \alpha = \kappa\beta + (|\beta| - 1), \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Στην παρακάτω πρόταση αναφέρονται σημαντικά και εύχρηστα συμπεράσματα. Όσα δεν αναφέρονται σαν προτάσεις στο σχολικό βιβλίο, θα πρέπει να αποδεικνύονται.

Βασικές προτάσεις

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο άρτιων είναι άρτιος.

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος.

Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος τότε και το άθροισμα είναι άρτιος και αντίστοιχα, αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι περιττός τότε και το άθροισμα είναι περιττός.

Το άθροισμα ή η διαφορά ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός.

Το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος.

Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός.

Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος.

Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος.

Αν a άρτιος τότε $a^v, v \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος.

Αν a περιττός τότε $a^v, v \in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός.

Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους άρτιων είναι άρτιος.

Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών είναι άρτιος.

Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός.

Το γινόμενο δύο ή περισσότερων ακέραιων είναι άρτιος, αν και μόνο αν, ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι άρτιος.

Το γινόμενο δύο ή περισσότερων ακεραίων είναι περιττός, αν και μόνο αν, όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για την εύρεση της ταυτότητας της αλγοριθμικής διαίρεσης του a με τον β αρχικά κάνουμε την διαίρεση του $|a|$ με τον $|\beta|$ και στη συνέχεια διαμορφώνουμε τα πρόσημα των δύο μελών ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του a με τον β .

Συχνά χρειάζεται και η προσθαφαίρεση του β (διαιρέτη) ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του a με τον β όταν:

- i. $a = 23, \beta = 4$ ii. $a = -23, \beta = 4$ iii. $a = 23, \beta = -4$ iv. $a = -23, \beta = -4$
v. $a = 4, \beta = 23$ vi. $a = -4, \beta = 23$ vii. $a = 4, \beta = -23$ viii. $a = -4, \beta = -23$

Λύση

i. Είναι φανερό ότι $23 = 5 \cdot 4 + 3$

ii. Ισχύει λόγω του i. $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 + 4 - 4 - 3$ ή $-23 = (-6)4 + 1$

iii. Ισχύει $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $23 = (-5)(-4) + 3$

iv. Είναι $23 = 5 \cdot 4 + 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 3$ ή $-23 = -5 \cdot 4 - 4 + 4 - 3$ ή $-23 = (6)(-4) + 1$.

v. Είναι προφανές ότι $4 = 0 \cdot 23 + 4$.

vi. Ισχύει $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 23 + 23 - 4$ ή $-4 = (-1)23 + 19$.

vii. Είναι $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $4 = 0 \cdot (-23) + 4$.

viii. Ισχύει $4 = 0 \cdot 23 + 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 4$ ή $-4 = -0 \cdot 23 - 23 + 23 - 4$ ή $-4 = 1(-23) + 19$.

Ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών σε αρκετές από τις παραπάνω ισότητες όπως και η προσθαφαίρεση του διαιρέτη και στα δύο μέλη σκοπό έχει να “δημιουργήσουμε” υπόλοιπο u θετικό και μικρότερο της απόλυτης τιμής του διαιρέτη.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η ισότητα $143 = 11 \cdot 12 + 11$ (I).

α. Να ελέγξετε ποιων ακεραίων αποτελεί ταυτότητα αλγοριθμικής διαίρεσης.

β. Να προσδιορίσετε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του 143 με τον 11 με τη βοήθεια της ισότητας (I).

Λύση

α. Αποτελεί ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 12, αφού ισχύει: $a = \kappa\beta + \nu$ με $0 \leq \nu < |\beta|$, όπου $a = 143$, $\kappa = 11$, $\beta = 12$ και $\nu = 11$ με $0 \leq 11 < 12$ ενώ δεν αποτελεί ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 11, διότι δεν ισχύει $0 \leq 11 < 11$.

β. Λόγω του i. ερωτήματος η ισότητα (I) δεν είναι ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του 143 με τον 11.

Έχουμε $143 = 11 \cdot 12 + 11$ ή $143 = 11 \cdot 12 + 11 - 11 + 11$ ή $143 = 13 \cdot 11 + 0$.

Άρα το πηλίκο είναι 13 το υπόλοιπο 0 και η διαίρεση είναι τέλεια.

Παράδειγμα 3

α. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $2\kappa - 1$ είναι περιττός, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

β. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $2\kappa + 2$ είναι άρτιος, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ. Να δείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι της μορφής $4\kappa \pm 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Λύση

α. Έστω ακεραίος αριθμός $a = 2\kappa - 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Είναι $a = 2\kappa - 1 = 2\kappa - 2 + 1 = 2(\kappa - 1) + 1$.

Θέτουμε $\kappa - 1 = \lambda$ οπότε $a = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Άρα ο $a = 2\kappa - 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι περιττός.

β. Έστω ακεραίος αριθμός $a = 2\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι $a = 2\kappa + 2 = 2(\kappa + 1) = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Άρα ο $a = 2\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιος.

γ. Έστω ένας περιττός ακεραίος $a = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Ο ακεραίος λ είναι ή άρτιος ή περιττός.

Αν $\lambda = 2\kappa$ τότε $a = 2(2\kappa) + 1 = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ενώ, αν $\lambda = 2\mu + 1$ τότε :

$$a = 2(2\mu + 1) + 1 = 4\mu + 3 = 4\mu + 4 - 1 = 4(\mu + 1) - 1 = 4\kappa - 1, \kappa = \mu + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 4

A. Το τετράγωνο ενός ακεραίου a παίρνει τις μορφές:

α. $\alpha^2 = 3\lambda$ ή $\alpha^2 = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

β. $\alpha^2 = 4\kappa$ ή $\alpha^2 = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

γ. $\alpha^2 = 5\rho$ ή $\alpha^2 = 5\rho - 1$ ή $\alpha^2 = 5\rho + 1$, $\rho \in \mathbb{Z}$

B. Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου a παίρνει τις μορφές:

δ. $\alpha^2 = 8\lambda + 1$ $\lambda \in \mathbb{Z}$

ε. $\alpha^2 = 4\rho + 1$ ή $\alpha^2 = 4\rho - 1$, $\rho \in \mathbb{Z}$

Γ. Το τετράγωνο ενός άρτιου ακεραίου a παίρνει την μορφή : $\zeta \cdot \alpha^2 = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Λύση

Α.α. Είναι γνωστό ότι η ευκλείδεια διαίρεση του ακέραιου α με τον 3 έχει δυνατά υπόλοιπα.

$v = 0, 1, 2$ οπότε ο α είναι της μορφής:

$$\alpha = 3\kappa, \alpha = 3\kappa + 1, \alpha = 3\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Αν $\alpha = 3\kappa$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa)^2 = 9\kappa^2 = 3(3\kappa^2) = 3\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}.$
- Αν $\alpha = 3\kappa + 1$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa + 1)^2 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 1 = 3(3\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 3\lambda + 1.$
- Αν $\alpha = 3\kappa + 2$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa + 2)^2 = 9\kappa^2 + 12\kappa + 4 = 9\kappa^2 + 12\kappa + 3 + 1 = 3(3\kappa^2 + 4\kappa + 1) + 1 = 3\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$

Σχόλιο:

Επιπλέον αναφέρουμε ότι $\alpha = 3\kappa + 2 = 3\kappa + 3 - 1 = 3(\kappa + 1) - 1 = 3\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{Z}$

οπότε οι δεκτές μορφές του α είναι : $\alpha = 3\kappa, \alpha = 3\kappa - 1, \alpha = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}.$

β. Σύμφωνα με την ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον 4 είναι

$$\alpha = 4\kappa, \alpha = 4\kappa + 1, \alpha = 4\kappa + 2, \alpha = 4\kappa + 3, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Αν $\alpha = 4\kappa$ είναι $\alpha^2 = 16\kappa^2 = 4(4\kappa^2) = 4\lambda^*, \lambda \in \mathbb{Z}.$
- Αν $\alpha = 4\kappa + 1$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa + 1)^2 = 16\kappa^2 + 8\kappa + 1 = 4(4\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 4\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}.$
- Αν $\alpha = 4\kappa + 2$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa + 2)^2 = 16\kappa^2 + 16\kappa + 4 = 4(4\kappa^2 + 4\kappa + 1) = 4\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}.$
- Αν $\alpha = 4\kappa + 3$ είναι $\alpha^2 = (4\kappa + 3)^2 = 16\kappa^2 + 24\kappa + 9 = 16\kappa^2 + 24\kappa + 8 + 1 = 4(4\kappa^2 + 6\kappa + 2) + 1 = 4\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$

γ. Ισχύει $\alpha = 5\kappa + v$ με $0 \leq v < 5, \kappa \in \mathbb{Z}$ οπότε

$$\alpha^2 = (5\kappa + v)^2 = 25\kappa^2 + 10\kappa v + v^2 = 5(5\kappa^2 + 2v\kappa) + v^2 = 5\rho + v^2, \rho \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Αν } v = 0 \text{ τότε } \alpha^2 = 5\rho, \rho \in \mathbb{Z}$$

$$v = 1 \text{ τότε } \alpha^2 = 5\rho + 1, \rho \in \mathbb{Z}$$

$$v = 2 \text{ τότε } \alpha^2 = 5\rho + 4 = 5\rho + 5 - 1 = 5(\rho + 1) - 1 = 5\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$v = 3 \text{ τότε } \alpha^2 = 5\rho + 9 = 5\rho + 10 - 1 = 5(\rho + 2) - 1 = 5\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$v = 4 \text{ τότε } \alpha^2 = 5\rho + 16 = 5\rho + 15 + 1 = 5(\rho + 3) + 1 = 5\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει : $\alpha^2 = 5\rho$ ή $\alpha^2 = 5\rho - 1$ ή $\alpha^2 = 5\rho + 1.$

* Όταν ζητείται να αποδείξουμε $\alpha = 4\kappa$ ή $\alpha = 4\lambda$ ή $\alpha = 4\rho$ κ. λ.π. και αποδείξουμε ότι $\alpha = 4\mu$ είναι το ίδιο πράγμα αφού όλα τα παραπάνω σημαίνουν ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 4.

Β.δ. Έστω ακέραιος περιττός $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Τότε } \alpha^2 = (2\kappa + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4\kappa(\kappa + 1) + 1 = 4 \cdot 2\lambda + 1 = 8\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Κάναμε χρήση του συμπεράσματος “Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων είναι άρτιος”. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι ανάλογες.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν γνωρίζουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta_1(\alpha)$ με $\delta_1(\beta)$ και ζητούμε το πηλίκο ή το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta_2(\alpha)$ με $\delta_2(\beta)$ μετασχηματίζουμε κατάλληλα την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $\Delta_1(\alpha)$ με τον $\delta_1(\alpha)$ ώστε να εμφανίσουμε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $\Delta_2(\alpha)$ με τον $\delta_2(\beta)$. Ο μετασχηματισμός περιλαμβάνει πολλαπλασιασμούς και προσθαφαιρέσεις ειδικών παραστάσεων των α , β και ιδιαίτερα προσοχή στον περιορισμό του υπολοίπου.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση των θετικών ακέραιων α , β , με πηλίκο κ και υπόλοιπο υ . Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $\alpha\kappa + \upsilon\beta$ με τον β όπου κ, υ ακέραιοι.

Λύση

Ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \beta$.

Οπότε $\alpha\kappa = \kappa\beta + \kappa\upsilon$ ή $\alpha\kappa + \upsilon\beta = \kappa\beta + \upsilon\beta + \kappa\upsilon$ (1)

α. Αν $0 \leq \kappa\upsilon < \beta$ τότε η (1) γράφεται $\alpha\kappa + \upsilon\beta = (\kappa + \upsilon)\beta + \kappa\upsilon$ και αποτελεί την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $\alpha\kappa + \upsilon\beta$ με τον β με πηλίκο $\kappa + \upsilon$ και υπόλοιπο $\kappa\upsilon$.

β. Αν $\kappa\upsilon \geq \beta$ τότε η (1) γράφεται :

$$\alpha\kappa + \upsilon\beta = \kappa\beta + \upsilon\beta + \lambda\beta + (\kappa\upsilon - \lambda\beta), \text{ με } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε } 0 \leq \kappa\upsilon - \lambda\beta < \beta$$

Οπότε

$$\alpha\kappa + \upsilon\beta = (\kappa + \upsilon + \lambda)\beta + (\kappa\upsilon - \lambda\beta) \text{ και αποτελεί την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του } \alpha\kappa + \upsilon\beta \text{ με τον } \beta \text{ με πηλίκο } \kappa + \upsilon + \lambda \text{ και υπόλοιπο } \kappa\upsilon - \lambda\beta.$$

Ο προσδιορισμός του λ γίνεται από την επίλυση του συστήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa\upsilon - \lambda\beta \geq 0 \Leftrightarrow \kappa\upsilon \geq \lambda\beta \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\kappa\upsilon}{\beta} \\ \text{και} \\ \kappa\upsilon - \lambda\beta < \beta \Leftrightarrow \kappa\upsilon - \beta < \lambda\beta \Leftrightarrow \frac{\kappa\upsilon - \beta}{\beta} < \lambda \Leftrightarrow \lambda > \frac{\kappa\upsilon - \beta}{\beta} \end{array} \right.$$

$$\text{δηλαδή } \frac{\kappa\upsilon - \beta}{\beta} < \lambda \leq \frac{\kappa\upsilon}{\beta}.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ή να ελέγξουμε ότι ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\Pi(\alpha)}{v}$ παριστάνει ακέραιο ($\Pi(\alpha)$ είναι μια παράσταση του ακεραίου α) συνήθως εκφράζουμε τον ακεραίο $\alpha = kv + u$ με $u = 0, 1, 2, \dots, v-1$ δηλαδή $\alpha = kv$, $\alpha = kv+1$, ..., $\alpha = kv + (v-1)$ και εξετάζουμε την τιμή του κλάσματος $\frac{\Pi(\alpha)}{v}$, για κάθε μια μορφή του α .

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $-\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ (I).

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ευθεία.

β. Να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων της ευθείας του α. ερωτήματος που έχουν συντεταγμένες ακεραίους αριθμούς.

γ. Να ελέγξετε αν τα σημεία του επιπέδου με ακεραίες συντεταγμένες των οποίων η τεταγμένη διαιρούμενη με τον αριθμό 4 δίνει υπόλοιπο 1 ή 3 βρίσκονται πάνω στην ευθεία του α. ερωτήματος.

δ. Να ελέγξετε αν το σημείο με συντεταγμένες ακεραίους και τεταγμένη $4(2003)^{2004} + 5$ βρίσκεται επί της ευθείας (I).

Λύση

α. Ισχύει $-\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 7y = -28 \Leftrightarrow 4x - 7y + 28 = 0$ οπότε η σχέση (I) έχει τη μορφή

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$ και επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ που επαληθεύουν την (I) είναι ευθεία.

β. Η εξίσωση $4x - 7y + 28 = 0$ γίνεται $4x = 7y - 28 \Leftrightarrow x = \frac{-28 + 7y}{4} \Leftrightarrow x = -7 + \frac{7y}{4}$.

Επειδή ο x είναι ακεραίος πρέπει και $-7 + \frac{7y}{4}$ να είναι ακεραίος. Γνωρίζουμε ότι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του y με τον 4 είναι 0, 1, 2, 3, οπότε ο ακεραίος y έχει μία από τις μορφές: $y = 4\kappa$ ή $y = 4\kappa + 1$ ή $y = 4\kappa + 2$ ή $y = 4\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

• Αν $y = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε: $-7 + \frac{7y}{4} = -7 + \frac{7 \cdot 4\kappa}{4} = -7 + 7\kappa = 7(\kappa - 1) \in \mathbb{Z}$.

• Αν $y = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε: $-7 + \frac{7y}{4} = -7 + \frac{7(4\kappa + 1)}{4} = -7 + \frac{7 \cdot 4\kappa}{4} + \frac{7}{4} = -7 + 7\kappa + \frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$

• Αν $y = 4\kappa + 2$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε:

$$-7 + \frac{7y}{4} = -7 + \frac{7(4\kappa + 2)}{4} = -7 + \frac{7 \cdot 4\kappa}{4} + \frac{14}{4} = -7 + 7\kappa + \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$$

- Αν $y = 4\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε :

$$-7 + \frac{7y}{4} = -7 + \frac{7(4\kappa + 3)}{4} = -7 + \frac{7 \cdot 4\kappa}{4} + \frac{21}{4} = -7 + 7\kappa + \frac{21}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $4x - 7y + 28 = 0$ που έχουν συντεταγμένες ακέραιους είναι $M(x, y)$ με $x = 7(\kappa - 1)$ και $y = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ. Έστω $\Sigma(x, y)$ τα σημεία του επιπέδου με x, y ακέραιους. Επειδή ο y διαιρούμενος με τον 4 δίνει υπόλοιπο 1 ή 3 έχει την μορφή $y = 4\kappa + 1$ ή $y = 4\kappa + 3$, σύμφωνα με το συμπέρασμα του β. ερωτήματος τα σημεία $\Sigma(x, y)$ δεν αποτελούν σημεία της ευθείας $4x - 7y + 28 = 0$.

δ. Η τεταγμένη $4(2003)^{2004} + 5$ του σημείου γίνεται:

$$4(2003)^{2004} + 4 + 1 = 4[(2003)^{2004} + 1] + 1 = 4\kappa + 1, \text{ όπου } \kappa = [(2003)^{2004} + 1] \in \mathbb{Z} \text{ οπότε λόγω του συμπεράσματος του ερωτήματος γ. το σημείο δεν ανήκει στην ευθεία.}$$

Παράδειγμα 2

Έστω a ακέραιος αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί της μορφής $\frac{a(a^2 + 2)}{3}$ είναι ακέραιοι.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = \frac{a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3}{9}$ είναι ακέραιος.

Λύση

α. Επειδή τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του a με τον 3 είναι 0, 1, 2 ο a έχει μια από τις μορφές $a = 3\kappa$ ή $a = 3\kappa + 1$ ή $a = 3\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- Αν $a = 3\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε: $\frac{a(a^2 + 2)}{3} = \frac{3\kappa[(3\kappa)^2 + 2]}{3} = \kappa(9\kappa^2 + 2) \in \mathbb{Z}$.

- Αν $a = 3\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε:

$$\frac{a(a^2 + 2)}{3} = \frac{(3\kappa + 1)[(3\kappa + 1)^2 + 2]}{3} = (3\kappa + 1)(3\kappa^2 + 2\kappa + 1) \in \mathbb{Z}.$$

- Αν $a = 3\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε:

$$\frac{a(a^2 + 2)}{3} = \frac{(3\kappa + 2)[(3\kappa + 2)^2 + 2]}{3} = (3\kappa + 2)(3\kappa^2 + 4\kappa + 2) \in \mathbb{Z}.$$

β. Είναι $A = \frac{a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3}{9} = \frac{a^3 + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + (a^3 + 6a^2 + 12a + 8)}{9} =$

$$\frac{3\alpha^3 + 9\alpha^2 + 15\alpha + 9}{9} = \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 5\alpha + 3}{3} = \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2\alpha + 3}{3} =$$

$$\frac{(3\alpha^2 + 3\alpha + 3) + (\alpha^3 + 2\alpha)}{3} = \frac{3(\alpha^2 + \alpha + 1)}{3} + \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)}{3} = (\alpha^2 + \alpha + 1) + \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)}{3} \in \mathbb{Z},$$

λόγω (α.) ερωτήματος.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Στην περίπτωση που αναζητούμε τους ακέραιους που διαιρούνται με γνωστό αριθμό δίνουν πηλίκο $\Pi(\lambda)$ και υπόλοιπο $\upsilon(\lambda)$ εκμεταλευόμαστε την ανισοτική σχέση, από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, που αφορά στο υπόλοιπο δημιουργώντας ανισοτική σχέση για το λ . Από την ανισοτική αυτή σχέση προσδιορίζουμε το λ (αφού λ ακέραιος) και στη συνέχεια βρίσκουμε τους ζητούμενους ακέραιους.

Παράδειγμα 1

Να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) ακέραιος α ο οποίος διαιρούμενος με τον -12 δίνει πηλίκο $\lambda - 163$ και υπόλοιπο $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda$.

Λύση

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $\alpha = (-12)(\lambda - 163) + (\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda)$.

Πρέπει $0 \leq \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda < |-12|$ δηλαδή $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12 < 0$ (1) και

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda \geq 0 \quad (2).$$

Επίλυση της ανίσωσης (1).

$$\text{Έχουμε } \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 3) - 4(\lambda + 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda + 3) < 0$$

$$\Gamma_1 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2)$$

Επίλυση της ανίσωσης (2).

Έχουμε

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_2 = \lambda(\lambda + 4)(\lambda - 1) \geq 0$$

$$\lambda \in [-4, 0] \cup [1, +\infty)$$

Από την επαλήθευση των ανισώσεων

(1) και (2) και επειδή $\lambda \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν,

$$\lambda = -4 \text{ ή } \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1.$$

λ	$-\infty$	-3	-2	2	$+\infty$
$\lambda - 2$	-	-	-	-	+
$\lambda + 2$	-	-	+	+	+
$\lambda + 3$	-	+	+	+	+
Γ_1	-	+	-	+	+

λ	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
λ	-	-	+	+	+
$\lambda + 4$	-	+	+	+	+
$\lambda - 1$	-	-	-	+	+
Γ_2	-	+	-	+	+

Για $\lambda = -4$ είναι $\alpha = (-12)(-4 - 163) + 0 = 2004$

Για $\lambda = 0$ είναι $\alpha = (-12)(0 - 163) + 0 = 1956$

Για $\lambda = 1$ είναι $\alpha = (-12)(1 - 163) + 0 = 1944$.

Παράδειγμα 2

α. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α και β αν το πηλίκο της διαίρεσης του α με τον β είναι 8 και το υπόλοιπο 3, δεδομένου ότι $\alpha < 43$.

β. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς α, β αν ισχύει $363 = 15\alpha + 29\beta$ και $\alpha + \beta < 14$.

Λύση

α. Ισχύει $\alpha = 8\beta + 3$ με $0 \leq 3 < \beta$ δηλαδή $\beta > 3$ (1).

Επίσης είναι $\alpha < 43 \Leftrightarrow 8\beta + 3 < 43 \Leftrightarrow 8\beta < 40 \Leftrightarrow \beta < 5$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή β ακέραιος είναι $\beta = 4$.

Άρα $\alpha = 8 \cdot 4 + 3$ δηλαδή $\alpha = 35$.

β. Έχουμε $363 = 15\alpha + 29\beta = 14\alpha + 28\beta + \alpha + \beta = 14(\alpha + 2\beta) + \alpha + \beta$ και επειδή $0 \leq \alpha + \beta < 14$

μπορούμε να θεωρήσουμε το $\alpha + 2\beta$ ως πηλίκο και το $\alpha + \beta$ υπόλοιπο της διαίρεσης

$363 : 14$. Όμως $363 = 14 \cdot 25 + 13$ και επειδή το πηλίκο και το υπόλοιπο στην ευκλείδεια

διαίρεση είναι μοναδικά πρέπει να ισχύουν:
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 25 \\ \alpha + \beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 12.$$

Παράδειγμα 3

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς κ, λ, μ για τους οποίους ισχύει :

$$\kappa + 4\lambda + 80\mu = 583 \text{ με } 0 \leq \kappa < 4 \text{ και } \lambda < 6.$$

Λύση

Είναι $\kappa + 4\lambda + 80\mu = 583$ ή $\kappa + 4(\lambda + 20\mu) = 583$ (1).

Επειδή $0 \leq \kappa < 4$ και το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο ακέραιων είναι μοναδικοί αριθμοί, από την (1) προκύπτει ότι το κ ισούται με το υπόλοιπο και το $\lambda + 20\mu$ με το πηλίκο της διαίρεσης του 583 με τον 4 δηλαδή $\kappa = 3$ και $\lambda + 20\mu = 145$ (2) αφού $583 = 4 \cdot 145 + 3$.

Η σχέση (2) δηλαδή $\lambda + 20\mu = 145$ αφού $\lambda < 6$ εκφράζει την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του 145 με τον 20 η οποία είναι $145 = 20 \cdot 7 + 5$ και για τους ίδιους με τη παραπάνω περίπτωση λόγους ο $\lambda = 5$ και ο $\mu = 7$ ως μοναδικά, υπόλοιπο και πηλίκο της διαίρεσης του 145 με τον 20 αντίστοιχα.

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

α. Να βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού κ ώστε ο αριθμός $\alpha = \frac{5\kappa+4}{3}$ να είναι ακέραιος

β. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε ο αριθμός $\alpha = \frac{6\kappa-3}{4}$ να είναι ακέραιος

Λύση

α. Η διαίρεση του κ με το 3 δίνει: $\kappa = 3\lambda + \nu$ με $\nu = 0, 1, 2$.

• Αν $\nu = 0$ τότε $\kappa = 3\lambda$ οπότε $\alpha = \frac{5\kappa+4}{3} = \frac{5 \cdot 3\lambda + 4}{3} = \frac{15\lambda + 4}{3} = 5\lambda + \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

• Αν $\nu = 1$ τότε $\kappa = 3\lambda + 1$ οπότε $\alpha = \frac{5(3\lambda+1)+4}{3} = \frac{15\lambda+9}{3} = 5\lambda+3 \in \mathbb{Z}$

• Αν $\nu = 2$ τότε $\kappa = 3\lambda + 2$ οπότε $\alpha = \frac{5(3\lambda+2)+4}{3} = \frac{15\lambda+14}{3} = 5\lambda + \frac{14}{3} \notin \mathbb{Z}$

άρα ο αριθμός $\alpha = \frac{5\kappa+4}{3}$ είναι ακέραιος όταν $\kappa = 3\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$.

β. Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του κ με το 4 προκύπτει:
 $\kappa = 4\lambda + \nu$ με $0 \leq \nu < 4$ δηλαδή $\nu = 0, 1, 2, 3$.

• Αν $\nu = 0$ τότε $\kappa = 4\lambda$ οπότε $\alpha = \frac{6 \cdot 4\lambda - 3}{4} = \frac{24\lambda - 3}{4} = 6\lambda - \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

• Αν $\nu = 1$ τότε $\kappa = 4\lambda + 1$ οπότε $\alpha = \frac{6 \cdot (4\lambda + 1) - 3}{4} = \frac{24\lambda + 3}{4} = 6\lambda + \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

• Αν $\nu = 2$ τότε $\kappa = 4\lambda + 2$ οπότε $\alpha = \frac{6(4\lambda+2)-3}{4} = \frac{24\lambda+9}{4} = 6\lambda + \frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$.

• Αν $\nu = 3$ τότε $\kappa = 4\lambda + 3$ οπότε $\alpha = \frac{6(4\lambda+3)-3}{4} = \frac{24\lambda+15}{4} = 6\lambda + \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Άρα δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε το $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 2

Αν ο ακέραιος κ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 2 να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \kappa^2 + 2\kappa + 3$ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 3.

Λύση

Αφού ο κ διαιρούμενος με 4 δίνει υπόλοιπο 2 τότε είναι της μορφής $\kappa = 4\lambda + 2, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Είναι $\alpha = \kappa^2 + 2\kappa + 3 = (4\lambda + 2)^2 + 2(4\lambda + 2) + 3 = 16\lambda^2 + 16\lambda + 4 + 8\lambda + 4 + 3 =$

$$16\lambda^2 + 24\lambda + 11 = 16\lambda^2 + 24\lambda + 8 + 3 = 4(4\lambda^2 + 6\lambda + 2) + 3 = 4\rho + 3.$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με 4 είναι 3.

Άσκηση 3

Αν σε μια διαίρεση ο διαιρετέος είναι ο 532 και το πηλίκο ο 19 να βρείτε τον διαιρέτη και το υπόλοιπο.

Λύση

Είναι $532 = 19 \cdot \delta + \nu$, $0 \leq \nu < \delta$. Οπότε $532 = 19 \cdot \delta + \nu \Leftrightarrow 532 - 19 \cdot \delta = \nu$ (1)

$$\text{Επίσης } 0 \leq \nu < \delta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 \leq 532 - 19\delta < \delta \begin{cases} 532 - 19\delta < \delta \Leftrightarrow 532 < 20\delta \Leftrightarrow \delta > \frac{532}{20} \\ 0 \leq 532 - 19\delta \Leftrightarrow 19\delta \leq 532 \Leftrightarrow \delta \leq \frac{532}{19} \end{cases}$$

Άρα $\frac{532}{20} < \delta \leq \frac{532}{19} \Leftrightarrow 26,6 < \delta \leq 28$, οπότε το δ παίρνει τις τιμές 27, 28.

- Αν $\delta = 27$ τότε από την (1) είναι $\nu = 532 - 19 \cdot 27 \Leftrightarrow \nu = 19$.
- Αν $\delta = 28$ τότε από την (1) είναι $\nu = 532 - 19 \cdot 28 \Leftrightarrow \nu = 0$.

Άσκηση 4

Αν ο α είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha^4 - 1}{16} \in \mathbb{Z}$

Λύση**1^{ος} τρόπος**

Αφού ο α είναι περιττός γράφεται με τη μορφή: $\alpha = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \frac{\alpha^4 - 1}{16} &= \frac{(\alpha^2)^2 - 1}{16} = \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)}{16} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)}{16} = \\ &= \frac{(2\lambda + 1 - 1)(2\lambda + 1 + 1)(4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 1)}{16} = \frac{2\lambda(2\lambda + 2)(4\lambda^2 + 4\lambda + 2)}{16} = \\ &= \frac{2\lambda \cdot 2(\lambda + 1) \cdot 2(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{16} = \frac{8\lambda(\lambda + 1)(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{16} = \\ &= \frac{\lambda(\lambda + 1)(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{2} \stackrel{(*)}{=} \frac{2\rho(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{2} = \rho(2\lambda^2 + 2\lambda + 1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(*) $\lambda, \lambda + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι οπότε $\lambda(\lambda + 1) = 2\rho$

2^{ος} τρόπος

(Από την εφαρμογή (2) του Σχολ. βιβλίου “Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης”

ii) Το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι της μορφής $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{\alpha^4 - 1}{16} &= \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)}{16} = \frac{(8\lambda + 1 - 1)(8\lambda + 1 + 1)}{16} = \frac{8\lambda(8\lambda + 2)}{16} = \frac{16\lambda(4\lambda + 1)}{16} = \\ &= \lambda(4\lambda + 1) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν ο ακέραιος αριθμός α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha^2 + 1$ με το 3.

Λύση

Ο ακέραιος α γράφεται: $\alpha = 3\lambda + \nu$, $\nu = 0, 1, 2$.

Δηλαδή: $\alpha = 3\lambda$

$$\alpha = 3\lambda + 1$$

$$\alpha = 3\lambda + 2$$

Αφού το α δεν είναι πολ/σιο του 3 είναι
$$\begin{cases} \alpha = 3\lambda + 1 \\ \text{ή} \\ \alpha = 3\lambda + 2 \end{cases}$$

• Αν $\alpha = 3\lambda + 1$ τότε $\alpha^2 + 1 = (3\lambda + 1)^2 + 1 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 2 = 3(\underbrace{3\lambda^2 + 2\lambda}_\rho) + 2 = 3\rho + 2$, οπότε το

υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha^2 + 1$ με 3 είναι 2.

• Αν $\alpha = 3\lambda + 2$ τότε

$$\alpha^2 + 1 = (3\lambda + 2)^2 + 1 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 5 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 3 + 2 = 3(\underbrace{3\lambda^2 + 4\lambda + 1}_\rho) + 2 = 3\rho + 2$$

οπότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha^2 + 1$ με 3 είναι 2.

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β στις παρακάτω περιπτώσεις:
i. $\alpha = 103$, $\beta = 12$, ii. $\alpha = -59$, $\beta = 6$ iii. $\alpha = 127$, $\beta = -7$ iv. $\alpha = -98$, $\beta = -3$
2. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α , β , γ , δ για τους οποίους ισχύουν:
α. $\alpha + 6\beta + 24\gamma + 72\delta = 658$
β. $\alpha < 6$, $\beta < 4$, $\gamma < 3$
3. Να εξετάσετε πότε ο αριθμός $\alpha = \frac{\nu^2 + 2}{3}$ να είναι ακέραιος αν $\nu \in \mathbb{Z}$
4. Να βρείτε οι τιμές του $\rho \in \mathbb{Z}$ ώστε ο αριθμός $\alpha = \frac{5\rho + 3}{6}$ να είναι ακέραιος.
5. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $\frac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{6}$ είναι ακέραιος

6. Αν a περιττός ακέραιος να δείξετε ότι:

α. ο αριθμός $\frac{3a^2 + 6a + 3}{12}$ είναι ακέραιος

β. ο αριθμός $\frac{(a^2 + 11)(a^2 + 15)}{32}$ είναι θετικός ακέραιος

7. Δίνεται το κλάσμα $\kappa = \frac{v^2 + v + 1}{v^3 + v^2 + 2}$, $v \in \mathbb{N}^*$ το οποίο απλοποιείται με τον αριθμό 7.

Να δείξετε ότι ο v διαιρούμενος με 7 δίνει υπόλοιπο 2.

8. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς v ώστε ο αριθμός $\alpha = \frac{v^2 + v + 2}{3}$ να είναι ακέραιος.

9. Έστω α, β, γ διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι. Να δείξετε ότι αν ένας απ' αυτούς διαιρείται με τον αριθμό 3 δίνει υπόλοιπο μηδέν ($v = 0$)

10. Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και ο α δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α^2 με τον 4.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 1 + 8y$ έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$.

12. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου οι συντελεστές α, β και ο σταθερός όρος γ είναι περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες.

13. Έστω $f(x)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές για το οποίο ισχύει ότι $f(4) \cdot f(5)$ είναι περιττός αριθμός. Να δείξετε ότι το $f(x)$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

14. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν ο αριθμός 3541 να γραφεί ως άθροισμα 600 φυσικών αριθμών που επιλέγονται από το σύνολο $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

15. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει η σχέση $189 = 13\alpha + 25\beta$ με $\alpha + \beta < 12$.

Ε.

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Έστω πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ και ακέραιος α ο οποίος διαιρούμενος με τον 9 δίνει πηλίκο $-\lambda + 1$ και υπόλοιπο τον $P(2)$.

α. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)$ και τον ακέραιο α αν το πηλίκο είναι περιττός ακέραιος.

β. Να δείξετε ότι οι ακέραιοι α του πρώτου ερωτήματος αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2. α. Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι: $(\kappa\lambda + \mu)^\nu = \text{πολ}\kappa + \mu^\nu$

β. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 9^{2003} .

(Υπ.: α. $P(x) = (x - 2)\Pi(x) + P(2)$, $\alpha = (-\lambda + 1) + P(2)$)

β. Είναι $9 = 2 \cdot 4 + 1$ και χρησιμοποιήστε το α)

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω a, β δυο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον a και θα γράφουμε β/a όταν η διαίρεση του a με τον β είναι τέλεια. Δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ ώστε $a = \kappa\beta$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμη ότι:

- a διαιρείται με τον β
- a πολλαπλάσιο του β
- β είναι διαιρέτης του a
- β είναι παράγοντας του a

Αν β δεν διαιρεί τον a τότε γράφουμε $\beta \nmid a$.

Επισήμανση : Στο εξής όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός β/a οι αριθμοί a, β είναι ακέραιοι και $\beta \neq 0$, αν αυτό δεν αναφέρεται.

Συνέπειες του ορισμού

- Αν β/a τότε $-\beta/a$
- $\pm 1/a, a \in \mathbb{Z}, \pm a/a, a \in \mathbb{Z}^*$
- $\beta/0$ για κάθε $\beta \in \mathbb{Z}^*$
- β/a τότε $\kappa\beta/\kappa a, \kappa \in \mathbb{Z}^*$

Θεώρημα

Έστω a, β, γ ακέραιοι. Ισχύουν τα παρακάτω

- Αν a/β και β/a τότε $a = \pm\beta$
- Αν a/β και β/γ τότε a/γ
- Αν a/β τότε $a/\lambda\beta$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{Z}$
- Αν a/β και a/γ τότε $a/(\beta + \gamma)$
- Αν a/β και $\beta \neq 0$ τότε $|a| \leq |\beta|$

Σαν συνέπεια του πιο πάνω θεωρήματος ισχύει:

Αν a/β και a/γ τότε $a / (\kappa\beta + \lambda\gamma)$, για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$

δηλ.ότι “αν ένας ακέραιος a διαιρεί δύο άλλους ακραίους β και γ διαιρεί και ένα οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των β και γ .”

Οι παρακάτω προτάσεις αναφέρονται σε σημαντικά και εύχρηστα συμπεράσματα. Όσα δεν αναφέρονται σαν προτάσεις στο σχολικό βιβλίο θα πρέπει να αποδεικνύονται.

Πρόταση 1

Θεωρούμε την ευκλείδεια διαίρεση του α με τον β και έστω κ και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα.

i. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον α και τον β τότε διαιρεί και τον υ .

ii. Αν ένας ακέραιος x διαιρεί και τον β και τον υ τότε διαιρεί και τον α .

Απόδειξη

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι $\alpha = \kappa\beta + \upsilon \Leftrightarrow \alpha - \kappa\beta = \upsilon$ (T)

i. Αφού x / α είναι $\alpha = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ (1)

x / β είναι $\beta = \mu x$, $\mu \in \mathbb{Z}$ οπότε $\kappa\beta = \kappa\mu x$ (2)

Αφαιρώντας κατά μέλη από την (1) την (2) έχουμε

$\alpha - \kappa\beta = (\lambda - \kappa\mu)x$ ή λόγω της (T) $\upsilon = \rho x$ όπου $\rho = \lambda - \kappa\mu$, $\rho \in \mathbb{Z}$. Οπότε x / υ .

ii. Αφού x / β είναι $\beta = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ οπότε $\kappa\beta = \lambda\kappa x$ (3)

x / υ είναι $\upsilon = \mu x$, $\mu \in \mathbb{Z}$ (4)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) έχουμε $\kappa\beta + \upsilon = (\lambda\kappa + \mu)x$ ή λόγω της (T) προκύπτει ότι $\alpha = \rho x$ όπου $\rho = \lambda\kappa + \mu$, $\rho \in \mathbb{Z}$. Αποδείξαμε ότι x / α .

Η απόδειξη των παραπάνω μπορεί να γίνει πιο σύντομα κάνοντας χρήση της ιδιότητας του γραμμικού συνδυασμού. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά το i.

Αφού x / α και x / β τότε $x / \alpha + (-\kappa)\beta$ οπότε λόγω της (T) προκύπτει ότι x / υ .

Πρόταση 2

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, x, y$ ακέραιοι. Αν γ / α και $\gamma / (\alpha \pm y\beta)$ τότε $\gamma / y\beta$

Απόδειξη

Αφού γ / α είναι $\alpha = \kappa\gamma$ οπότε $\alpha = \kappa\gamma$ (1), με κ ακέραιο και $\alpha + y\beta = \lambda\gamma$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $y\beta = \lambda\gamma - \kappa\gamma$ ή $y\beta = (\lambda - \kappa)\gamma$ ή $y\beta = \rho\gamma$ όπου $\rho = \lambda - \kappa$, $\rho \in \mathbb{Z}$. Αποδείξαμε ότι $\gamma / y\beta$.

Ομοίως αποδεικνύεται για $\gamma / (\alpha - y\beta)$.

Προσοχή!!

1. Αν $\gamma / y\beta$ δεν προκύπτει ότι γ / y ή γ / β (χωρίς να αποκλείεται βέβαια και αυτή η περίπτωση). Για παράδειγμα, $6 / (36 = 4 \cdot 9)$ ενώ $6 \nmid 4$ και $6 \nmid 9$.

2. Αν $\gamma / y\beta$ και $\gamma \nmid y$ δεν προκύπτει ότι γ / β . Για παράδειγμα, $30 / (60 = 5 \cdot 12)$ και $30 \nmid 12$ χωρίς βέβαια $30 / 5$.

3. αν y / γ και β / γ δεν προκύπτει $y\beta / \gamma$.

Για παράδειγμα $6 / 12$ και $4 / 12$ ενώ $(6 \cdot 4) \nmid 12$

Πρόταση 3

Έστω $\alpha = \kappa_1\gamma + \nu_1$ και $\beta = \kappa_2\gamma + \nu_2$ η ευκλείδεια διαίρεση του α με τον γ και του β με τον γ αντίστοιχα, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

- i. $\gamma / (\alpha - \beta) \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_2$ ii. $\gamma / (\alpha + \beta) \Leftrightarrow \gamma / (\nu_1 + \nu_2)$
 iii. $\gamma / \alpha\beta \Leftrightarrow \gamma / \nu_1 \cdot \nu_2$ iv. $\gamma / \alpha^\nu \Leftrightarrow \gamma / \nu_1^\nu$

Απόδειξη

(i) • Είναι $\alpha = \kappa_1\gamma + \nu_1$ και $\beta = \kappa_2\gamma + \nu_2$, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$ οπότε $\alpha - \beta = (\kappa_1 - \kappa_2)\gamma + \nu_1 - \nu_2$ (I)

Αφού $\gamma / (\alpha - \beta)$ από την υπόθεση είναι φανερό ότι $\nu_1 - \nu_2 = 0 \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_2$

• Αντίστροφα αν $\nu_1 = \nu_2 \Leftrightarrow \nu_1 - \nu_2 = 0$ τότε από την (I) προκύπτει ότι $\alpha - \beta = (\kappa_1 - \kappa_2)\gamma$ δηλαδή ότι $\gamma / (\alpha - \beta)$

(ii) • Έχουμε $\alpha + \beta = (\kappa_1 + \kappa_2)\gamma + \nu_1 + \nu_2$ (II)

Αφού $\gamma / (\alpha + \beta)$ από την υπόθεση τότε $\gamma / (\kappa_1 + \kappa_2)\gamma + \nu_1 + \nu_2$.

Όμως $\gamma / (\kappa_1 + \kappa_2)\gamma$ (προφανές). Σύμφωνα με την πρόταση 2 ισχύει $\gamma / (\nu_1 + \nu_2)$.

• Αντίστροφα αν $\gamma / (\nu_1 + \nu_2)$, επειδή $\gamma / (\kappa_1 + \kappa_2)\gamma$ σύμφωνα με την ιδιότητα του γραμμικού συνδυασμού έχουμε $\gamma / (\kappa_1 + \kappa_2)\gamma + \nu_1 + \nu_2$. Οπότε λόγω της σχέσης (II) είναι και $\gamma / (\alpha + \beta)$. Οι αποδείξεις των (ii), (iv) γίνονται με παρόμοιο τρόπο.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**Κατηγορία - Μέθοδος 1**

Για την απόδειξη ισχυρισμών: A/B ή $B = \text{πολ}A$ συνήθως χρησιμοποιούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- Παραγοντοποιούμε τον διαιρετέο B έτσι ώστε να εμφανίσουμε τον A ως παράγοντα της έκφρασης του B .
- Κάνουμε χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης του διαιρετέου B με τον ακέραιο διαιρέτη A . (ο οποίος εν γένει μπορεί να είναι μια παράσταση ακεραίων).
- Εφαρμόζουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής
- Κάνουμε χρήση των γνωστών ταυτοτήτων με x, y ακέραιους και $n \in \mathbb{N}^*$

$$(i) x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = \text{πολ.}(x - y)$$

$$(ii) x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) = \text{πολ.}(x + y), \text{ με } n \text{ περιττό}$$

$$(iii) x^n - y^n = x^{2k} - y^{2k} = (x^2)^k - (y^2)^k = (x^2 - y^2)(x^{2(k-1)} + \dots + y^{2(k-1)}) \\ = (x + y)(x - y)(x^{2(k-1)} + \dots + y^{2(k-1)}) = \text{πολ.}(x \pm y), \text{ με } n \text{ άρτιο.}$$

Παράδειγμα 1

Έστω $A = 3^{v+2} \cdot 7^v + 3^v \cdot 7^{v+2} - 5 \cdot 21^v$. Να δείξετε ότι 21/A και 53/A

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A &= 3^v \cdot 3^2 \cdot 7^v + 3^v \cdot 7^v \cdot 7^2 - 5 \cdot 3^v \cdot 7^v = \\ &= 3^v \cdot 7^v (3^2 + 7^2 - 5) = 3^v \cdot 7^v (9 + 49 - 5) = 3^v \cdot 7^v \cdot 53 = 21^v \cdot 53. \end{aligned}$$

Αφού $A = 21^v \cdot 53 = 21(21^{v-1} \cdot 53)$ είναι φανερό ότι 21/A και $A = 21^v \cdot 53$, απ' όπου προκύπτει ότι 53/A.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι $2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) = \text{πολ.}3$, όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Λύση

Η ευκλείδεια διαίρεση του α με το 3 είναι: $\alpha = 3\kappa + \upsilon$ με $\upsilon = 0, 1, 2$ $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{Αν } \upsilon = 0 \text{ τότε } \alpha &= 3\kappa \text{ δηλαδή } 2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) = \\ &= 6\kappa(3\kappa-2)(3\kappa+2) \\ &= 3[2\kappa(3\kappa-2)(3\kappa+2)] = \text{πολ.}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } \upsilon = 1 \text{ τότε } \alpha &= 3\kappa + 1 \text{ δηλαδή } 2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) = \\ &= 2(3\kappa+1)(3\kappa-1)(3\kappa+3) \\ &= 3[2(3\kappa+1)(3\kappa-1)(\kappa+1)] = \text{πολ.}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } \upsilon = 2 \text{ τότε } \alpha &= 3\kappa + 2 \text{ δηλαδή } 2\alpha(\alpha-2)(\alpha+2) = \\ &= 2(3\kappa+2)3\kappa(3\kappa+4) = 3[2(3\kappa+2)\kappa(3\kappa+4)] = \text{πολ.}3 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι $3/(7^v + 3v - 1)$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$

Λύση

Έστω ο ισχυρισμός $P(v): 7^v + 3v - 41 = \text{πολ.}3$

- Για $v = 1$ είναι $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9 = \text{πολ.}3$, που ισχύει δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής
- Έστω ότι ισχύει ο $P(v): 7^v + 3v - 1 = \text{πολ.}3$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο $P(v+1)$ δηλαδή $7^{v+1} + 3(v+1) - 1 = \text{πολ.}3$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } 7^{v+1} + 3(v+1) - 1 &= 7^v \cdot 7 + 3v + 3 - 1 \text{ (από τη σχέση (1))} \\ &= (\text{πολ.}3 - 3v + 1)7 + 3v + 2 = \\ &= 7\text{πολ.}3 - 21v + 7 + 3v + 2 = \\ &= 7\text{πολ.}3 - 18v + 9 = \\ &= 7\text{πολ.}3 + 3(-6v + 3) = \text{πολ.}3 \end{aligned}$$

Άρα ο ισχυρισμός $P(v)$ ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι:

α. $32 / (9^{2004} - 7^{2004})$

β. $130 / (9^{2004} - 7^{2004})$

γ. $16 / (9^{2003} + 7^{2003})$

Λύση

α. $9^{2004} - 7^{2004} = 81^{1002} - 49^{1002} = \text{πολ.}(81 - 49) = \text{πολ.}32.$

Άρα $32 / (9^{2004} - 7^{2004}).$

β. $9^{2004} - 7^{2004} = 81^{1002} - 49^{1002} = \text{πολ.}(81 + 49) = \text{πολ.}130.$

Άρα $130 / (9^{2004} - 7^{2004}).$

γ. $9^{2003} + 7^{2003} = \text{πολ.}(9 + 7) = \text{πολ.}16.$

Άρα $16 / (9^{2003} + 7^{2003}).$

Όλα τα παραπάνω είναι άμεση εφαρμογή της μεθόδου 1.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Σε ασκήσεις που ζητείται να βρεθούν οι πιθανοί κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων αριθμών βρίσκουμε τους διαιρέτες κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού τους.

Παράδειγμα 1

α. Να βρεθούν οι πιθανοί ακέραιοι που διαιρούν τους ακέραιους αριθμούς $2\alpha + 3$ και $3\alpha + 4$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$)

β. Να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{2\alpha + 3}{3\alpha + 4}$ δεν απλοποιείται (είναι δηλαδή ανάγωγο)

Λύση**α.** Έστω δ ο πιθανός κοινός διαιρέτης

$$\left. \begin{array}{l} \delta / (2\alpha + 3) \\ \delta / (3\alpha + 4) \end{array} \right\} \text{όποτε } \delta / [3(2\alpha + 3) - 2(3\alpha + 4)] \text{ ή } \delta / (6\alpha + 9 - 6\alpha - 8) \text{ ή } \delta / 1.$$

Επομένως είναι $\delta = \pm 1$.

β. Από το πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι οι μοναδικοί κοινοί διαιρέτες του αριθμητή $2\alpha + 3$ και του παρονομαστή $3\alpha + 4$ είναι ± 1 . Δηλαδή το κλάσμα δεν απλοποιείται.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις που ζητείται η εύρεση ακεραίου a όταν δίνεται συνθήκη διαιρετότητας της μορφής: $\lambda / f(a)$ ή $f(a) / \lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$ ή $f(a) / g(a)$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί a ώστε $3 / (a - 7)$

Λύση

Αφού $a \in \mathbb{Z}$ τότε: $a = 3\kappa$ ή $a = 3\kappa + 1$ ή $a = 3\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{Z}$

Αν $a = 3\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $a - 7 = 3\kappa - 7 \neq \text{πολ}3$

Αν $a = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $a - 7 = 3\kappa - 6 = 3(\kappa - 2) = \text{πολ}3$

Αν $a = 3\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $a - 7 = 3\kappa - 5 \neq \text{πολ}3$

Άρα οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι της μορφής $a = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α ώστε $(2\alpha+5)/3$

Λύση

Οι διαιρέτες του 3 είναι: $\pm 1, \pm 3$

$$\text{Άρα } 2\alpha+5=1 \Leftrightarrow \alpha=-2$$

$$\text{ή } 2\alpha+5=-1 \Leftrightarrow \alpha=-3$$

$$\text{ή } 2\alpha+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

$$\text{ή } 2\alpha+5=-3 \Leftrightarrow \alpha=-4$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε φυσικό αριθμό α ώστε $(\alpha+2)/(\alpha^2+1)$

Λύση

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2+0\alpha+1 & \alpha+2 \\ -\alpha^2-2\alpha & \alpha-2 \\ \hline & -2\alpha+1 \\ & +2\alpha+4 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε:

$$\alpha^2+1=(\alpha+2)(\alpha-2)+5 \quad (1)$$

Αφού $(\alpha+2)/(\alpha^2+1)$ προκύπτει :

$$\frac{\alpha^2+1}{\alpha+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \stackrel{(1)}{\frac{(\alpha+2)(\alpha-2)+5}{\alpha+2}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left((\alpha-2) + \frac{5}{\alpha+2} \right) \in \mathbb{Z}.$$

Όμως $(\alpha-2) \in \mathbb{Z}$ οπότε πρέπει $\frac{5}{\alpha+2} \in \mathbb{Z}$ δηλ. $(\alpha+2)/5$. Οι διαιρέτες του 5 είναι: $\pm 1, \pm 5$.

$$\text{Αν } \alpha+2=5 \text{ τότε } \alpha=3 \in \mathbb{N} \quad \text{ή} \quad \alpha+2=-5 \text{ τότε } \alpha=-7 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{ή } \alpha+2=1 \text{ τότε } \alpha=-1 \notin \mathbb{N} \quad \text{ή} \quad \alpha+2=-1 \text{ τότε } \alpha=-3 \notin \mathbb{N}. \quad \text{Άρα } \alpha=3.$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ και $\beta \mid (4\alpha + 3)$ και $\beta \mid (5\alpha + 4)$ να δείξετε ότι $\beta = 1$

Λύση

$$\text{Ισχύει ότι : } \left. \begin{array}{l} \beta \mid (4\alpha + 3) \\ \text{και } \beta \mid (5\alpha + 4) \end{array} \right\} \text{ οπότε } \left. \begin{array}{l} \beta \mid [5(4\alpha + 3) - 4(5\alpha + 4)] \\ \beta \mid (20\alpha + 15 - 20\alpha - 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ή} \\ \beta \mid -1 \end{array}$$

Γνωρίζουμε ότι οι διαιρέτες του -1 είναι οι ± 1 και επειδή $\beta \in \mathbb{N}^*$ είναι $\beta = 1$.

Άσκηση 2

Έστω $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ με $\delta \mid (5\alpha + 17\beta)$ και $\delta \mid (2\alpha + 7\beta)$.

Να δείξετε ότι $\delta \mid (\alpha + \beta)$, $\delta \mid (3\alpha + 6\beta)$

Λύση

$$\text{Ισχύει ότι } \left. \begin{array}{l} \delta \mid (5\alpha + 17\beta) \\ \delta \mid (2\alpha + 7\beta) \end{array} \right\} \text{ οπότε } \left. \begin{array}{l} \delta \mid [2(5\alpha + 17\beta) - 5(2\alpha + 7\beta)] \\ \delta \mid [10\alpha + 34\beta - 10\alpha - 35\beta] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ή} \\ \delta \mid -\beta \end{array}$$

Άρα και $\delta \mid \beta$

$$\text{Επίσης } \left. \begin{array}{l} \delta \mid 5\alpha + 17\beta \\ \delta \mid 2\alpha + 7\beta \end{array} \right\} \text{ οπότε } \left. \begin{array}{l} \delta \mid 7(5\alpha + 17\beta) - 17(2\alpha + 7\beta) \\ \delta \mid 35\alpha + 119\beta - 34\alpha - 119\beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ή} \\ \delta \mid \alpha \end{array}$$

Αφού $\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid \beta$ ισχύει ότι $\delta \mid \alpha + \beta$ και $\delta \mid 3\alpha + 6\beta$ ως γραμμικός συνδυασμός των α, β .

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{Z}$ ισχύει $(v^2 - v + 1) \mid (v^4 + v^2 + 1)$

Λύση

$$\text{Είναι } v^4 + v^2 + 1 = v^4 + 2v^2 - v^2 + 1 = (v^4 + 2v^2 + 1) - v^2 = (v^2 + 1)^2 - v^2 =$$

$$(v^2 + 1 + v)(v^2 + 1 - v) = (v^2 + v + 1)(v^2 - v + 1)$$

$$\text{Άρα } (v^4 + v^2 + 1) = (v^2 + v + 1)(v^2 - v + 1) \text{ οπότε } (v^2 - v + 1) \mid (v^4 + v^2 + 1).$$

Άσκηση 4

Να βρείτε τον φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει : $(2n+1) \mid n^2 + n - 2$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ότι } (2n+1) \mid 4(n^2 + n - 2) &\Leftrightarrow \\ (2n+1) \mid 4n^2 + 4n - 8 &\Leftrightarrow \\ (2n+1) \mid (4n^2 + 4n + 1) - 9 &\Leftrightarrow \\ (2n+1) \mid (2n+1)^2 - 9 &\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ομως } (2n+1) \mid (2n+1)^2 \\ \text{και } (2n+1) \mid (2n+1)^2 - 9 \end{array} \right\} \text{ οπότε πρέπει } (2n+1) \mid 9.$$

$$\text{Αφού } (2n+1) \mid 9 \text{ τότε } \left\{ \begin{array}{l} 2n+1=1 \Leftrightarrow 2n=0 \Leftrightarrow n=0 \in \mathbb{N} \\ 2n+1=-1 \Leftrightarrow 2n=-2 \Leftrightarrow n=-1 \notin \mathbb{N} \\ 2n+1=3 \Leftrightarrow 2n=2 \Leftrightarrow n=1 \in \mathbb{N} \\ 2n+1=-3 \Leftrightarrow 2n=-4 \Leftrightarrow n=-2 \notin \mathbb{N} \\ 2n+1=9 \Leftrightarrow 2n=8 \Leftrightarrow n=4 \in \mathbb{N} \\ 2n+1=-9 \Leftrightarrow 2n=-10 \Leftrightarrow n=-5 \notin \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Άρα $n = 0, 1, 4$.

Άσκηση 5

Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών $2k-1$ και $2k+1$ όπου $k \in \mathbb{Z}$

Λύση

Έστω δ κοινός διαιρέτης των $2k-1$ και $2k+1$ τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \mid (2k-1) \\ \text{και } \delta \mid (2k+1) \end{array} \right\} \text{ Οπότε } \delta \mid ((2k-1) - (2k+1)) \text{ ή } \delta \mid (2k-1-2k-1), \text{ οπότε } \delta \mid -2.$$

Άρα οι πιθανοί κοινοί διαιρέτες των $2k-1$ και $2k+1$ είναι οι διαιρέτες του -2 , δηλαδή $\delta = \pm 1, \pm 2$.

Όμως οι $2k-1$ και $2k+1$ είναι περιττοί αριθμοί οπότε δεν μπορούν να έχουν για διαιρέτες, τους ± 2 . Άρα οι κοινοί διαιρέτες των $2k-1$ και $2k+1$ είναι οι: ± 1 .

Άσκηση 6

Έστω το κλάσμα $\frac{n^2+3}{n+2}, n \in \mathbb{N}$

α. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς n ώστε το κλάσμα να απλοποιείται.

β. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός n ώστε το κλάσμα να είναι ακέραιος.

Λύση

α. Για να απλοποιείται πρέπει να υπάρχει (ακέραιος) κοινός διαιρέτης δ του αριθμητή και

$$\left. \begin{array}{l} \delta/(v^2+3) \\ \delta/(v+2) \end{array} \right\} \text{οπότε } \delta/((v^2+3)-v(v+2))$$

$$\text{ή } \delta/(3-2v)$$

$$\text{Τότε: } \left. \begin{array}{l} \delta/(v+2) \\ \delta/(3-2v) \end{array} \right\} \text{οπότε } \delta/(2(v+2)+(3-2v)) \text{ ή } \delta/7. \text{ Άρα } \delta = \pm 1, \pm 7$$

Αφού το κλάσμα απλοποιείται και $\delta \neq \pm 1$, πρέπει $\delta = \pm 7$.

Δηλαδή $v+2 = 7 \cdot \kappa$ ή $v = 7\kappa - 2 \in \mathbb{Z}$.

Αφού $v \in \mathbb{N}$ πρέπει $v \geq 0$ οπότε $7\kappa - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa \geq \frac{2}{7} (\kappa \in \mathbb{Z})$. Άρα $\kappa \geq 1$.

Επίσης $v^2 + 3 = (7\kappa - 2)^2 + 3 = 49\kappa^2 - 28\kappa + 4 + 3 = 7(7\kappa^2 - 4\kappa + 1) = \text{πολ}7$.

Επομένως $v = 7\kappa - 2$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\kappa \geq 1$.

β.

$$\begin{array}{r|l} v^2 + 0v + 3 & v + 2 \\ -v^2 - 2v & v - 2 \\ \hline -2v + 3 & \\ 2v + 4 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε $v^2 + 3 = (v+2)(v-2) + 7$.

$$\text{Έτσι έχουμε } \frac{v^2+3}{v+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{(v+2)(v-2)+7}{(v+2)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(v-2 + \frac{7}{v+2} \right) \in \mathbb{Z} \text{ και αφού } (v-2) \in \mathbb{Z}$$

πρέπει $\frac{7}{v+2} \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $(v+2)/7$. Όμως διαιρέτες του 7 είναι $\pm 1, \pm 7$

Άρα πρέπει $v+2$ να ισούται με ± 1 ή ± 7

$$\text{Αν } v+2=1 \text{ τότε } v=-1 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Αν } v+2=-1 \text{ τότε } v=-3 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Αν } v+2=7 \text{ τότε } v=5 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Αν } v+2=-7 \text{ τότε } v=-9 \notin \mathbb{N}$$

Ωστε πρέπει $v=5$ για να είναι το κλάσμα ακέραιος.

Άσκηση 7

Για τους ακέραιους α, β να δείξετε ότι $\alpha^2 \cdot \beta - \alpha \beta^2 = \text{πολ}2$

Λύση

Είναι $\alpha = 2\kappa_1 + \nu_1$ με $\nu_1 = 0$ ή $\nu_1 = 1$, $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$

και $\beta = 2\kappa_2 + \nu_2$ με $\nu_2 = 0$ ή $\nu_2 = 1$, $\kappa_2 \in \mathbb{Z}$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \beta - \alpha \beta^2 &= \alpha \beta (\alpha - \beta) = \\ &= (2\kappa_1 + \nu_1)(2\kappa_2 + \nu_2)(2\kappa_1 + \nu_1 - 2\kappa_2 - \nu_2) = \\ &= (4\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_1 \nu_2 + 2\kappa_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2)(2\kappa_1 - 2\kappa_2 + \nu_1 - \nu_2) = \\ &= [2(2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \nu_2 + \kappa_2 \nu_1) + \nu_1 \nu_2][2(\kappa_1 - \kappa_2) + \nu_1 - \nu_2] = \\ &= (2\lambda + \nu_1 \nu_2)(2\mu + \nu_1 - \nu_2) \text{ με } \lambda = 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \nu_2 + \kappa_2 \nu_1, \lambda \in \mathbb{Z} \text{ και } \mu = \kappa_1 - \kappa_2, \mu \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	0	1
0	$\nu_1 \cdot \nu_2 = 0$ $\nu_1 - \nu_2 = 0$	$\nu_1 \cdot \nu_2 = 0$ $\nu_1 - \nu_2 = 1$
1	$\nu_1 \cdot \nu_2 = 0$ $\nu_1 - \nu_2 = -1$	$\nu_1 \cdot \nu_2 = 1$ $\nu_1 - \nu_2 = 0$

Με την βοήθεια του πίνακα διαπιστώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση επειδή ή $\nu_1 \cdot \nu_2 = 0$ ή

$\nu_1 - \nu_2 = 0$ οπότε ο ακέραιος $\alpha^2 \beta - \alpha \beta^2 = \text{πολ}2$

Άσκηση 8

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ με $9/(5\alpha + 4\beta)$, να αποδείξετε ότι $9/(4\alpha + 5\beta)$

Λύση

Έχουμε $9/(5\alpha + 4\beta)$ (1)

Όμως $9/9$ οπότε $9/9(\alpha + \beta)$ ή $9/(9\alpha + 9\beta)$ (2)

Από (1) και (2) ισχύει ότι $9/[(9\alpha + 9\beta) - (5\alpha + 4\beta)]$ ή $9/(9\alpha + 9\beta - 5\alpha - 4\beta)$ ή $9/(4\alpha + 5\beta)$

Άσκηση 9

Αν $17/(3\alpha + 2\beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ να δείξετε ότι: $17/(5\alpha + 9\beta)$

Λύση

Αφού $17/(3\alpha + 2\beta)$ τότε

$$3\alpha + 2\beta = 17\kappa, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\beta = 17\kappa - 3\alpha \Leftrightarrow 2\beta = 16\kappa - 2\alpha + \kappa - \alpha \Leftrightarrow \beta = 8\kappa - \alpha + \frac{\kappa - \alpha}{2} \quad (1)$$

Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$ τότε $\frac{\kappa - \alpha}{2} \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\frac{\kappa - \alpha}{2} = \lambda, \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa - \alpha = 2\lambda \Leftrightarrow \alpha = \kappa - 2\lambda$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γίνεται $\beta = 8\kappa - (\kappa - 2\lambda) + \lambda \Leftrightarrow \beta = 8\kappa - \kappa + 2\lambda + \lambda \Leftrightarrow \beta = 7\kappa + 3\lambda$ (3)

Λόγω των (2) και (3) έχουμε $5\alpha + 9\beta = 5(\kappa - 2\lambda) + 9(7\kappa + 3\lambda) = 5\kappa - 10\lambda + 63\kappa + 27\lambda =$
 $= 68\kappa + 17\lambda = 17(4\kappa + \lambda) = \text{πολ}17$

Άρα $17 \mid (5\alpha + 9\beta)$

Άσκηση 10

Αν $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{40}$ να δείχθεί ότι :

α. $3 \mid A$

β. $4 \mid A$

γ. $40 \mid A$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. A &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{40} \\ &= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{39}) \\ &= \text{πολ.}3 \quad \text{Άρα } 3 \mid A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. A &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{40} \\ &= 3(1 + 3) + 3^3(1 + 3) + \dots + 3^{39}(1 + 3) \\ &= 3 \cdot 4 + 3^3 \cdot 4 + \dots + 3^{39} \cdot 4 \\ &= 4(3 + 3^3 + \dots + 3^{39}) \\ &= \text{πολ.}4 \quad \text{Άρα } 4 \mid A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. A &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + \dots + 3^{40} \\ &= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^5(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{37}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 3 \cdot 40 + 3^5 \cdot 40 + \dots + 3^{37} \cdot 40 \\ &= 40(3 + 3^5 + \dots + 3^{37}) \\ &= \text{πολ.}40 \quad \text{Άρα } 40 \mid A \end{aligned}$$

Άσκηση 11

Αν οι ακέραιοι x και y δεν είναι πολλαπλάσια του 3 να δείξετε ότι

α. $x^2 = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

β. $9 \mid (x^6 - y^6)$

Λύση

α. Είναι $x \mid \frac{3}{p}$ οπότε $x = 3p + v, p \in \mathbb{Z}$ και $v = 0, 1, 2$

Αφού το x δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 το $v \neq 0$

• Αν $v = 1$ τότε $x = 3p + 1$ οπότε $x^2 = 9p^2 + 6p + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3(3p^2 + 2p) + 1$ ή $x^2 = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

• Αν $v = 2$ τότε $x = 3p + 2$ οπότε $x^2 = 9p^2 + 12p + 4 \Leftrightarrow x^2 = 9p^2 + 12p + 3 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1$

Άρα $x^2 = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

β. Από το α. αφού $x \neq \text{πολ}3$ τότε $x^2 = 3\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

οπότε $x^6 = (x^2)^3 = (3\kappa + 1)^3 = 27\kappa^3 + 27\kappa^2 + 9\kappa + 1 = 9(3\kappa^3 + 3\kappa^2 + \kappa) + 1 = 9\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$

Ομοίως $y^6 = 9\mu + 1, \mu \in \mathbb{Z}$

Έτσι $x^6 - y^6 = (9\lambda + 1) - (9\mu + 1) = 9\lambda + 1 - 9\mu - 1 = 9(\lambda - \mu) = \text{πολ}9$
 οπότε $9/(x^6 - y^6)$

Άσκηση 12

Αν ο ακέραιος a δεν διαιρείται με το 4, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $2a^2 + 3a$ δεν διαιρείται με το 4.

Λύση

Εφόσον ο ακέραιος a δεν διαιρείται με το 4, θα είναι της μορφής: $4\kappa+1, 4\kappa+2, 4\kappa+3$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

- Αν $a = 4\kappa + 1$ τότε: $2a^2 + 3a = 2(4\kappa + 1)^2 + 3(4\kappa + 1)$
 $= 2(16\kappa^2 + 8\kappa + 1) + 12\kappa + 3$
 $= 32\kappa^2 + 16\kappa + 2 + 12\kappa + 3$
 $= 32\kappa^2 + 28\kappa + 5$
 $= 4(8\kappa^2 + 7\kappa + 1) + 1 = 4\mu + 1 \neq \text{πολ}4$
- Αν $a = 4\kappa + 2$ τότε: $2a^2 + 3a = 2(4\kappa + 2)^2 + 3(4\kappa + 2)$
 $= 2(16\kappa^2 + 16\kappa + 4) + 12\kappa + 6$
 $= 32\kappa^2 + 32\kappa + 8 + 12\kappa + 6$
 $= 32\kappa^2 + 44\kappa + 14$
 $= 4(8\kappa^2 + 11\kappa + 3) + 2 = 4\mu + 2 \neq \text{πολ}4$
- Αν $a = 4\kappa + 3$ τότε: $2a^2 + 3a = 2(4\kappa + 3)^2 + 3(4\kappa + 3)$
 $= 2(16\kappa^2 + 24\kappa + 9) + 12\kappa + 9$
 $= 32\kappa^2 + 48\kappa + 18 + 12\kappa + 9$
 $= 32\kappa^2 + 60\kappa + 27$
 $= 4(8\kappa^2 + 15\kappa + 6) + 3 = 4\mu + 3 \neq \text{πολ}4$

Άρα ο $2a^2 + 3a$ δεν διαιρείται με το 4 όταν ο a δεν διαιρείται με το 4.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ισχύει: $3^{2n+1} + 2^{n+2} = \text{πολ} 7$.

Λύση

1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{2n} \cdot 3 + 2^n \cdot 2^2 = 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n =$$

$$= 3 \cdot 9^n + 7 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n = 3(9^n - 2^n) + 7 \cdot 2^n = \text{Ισχύει}$$

$$= 3 \cdot \text{πολ}(9 - 2) + 7 \cdot 2^n = 3 \cdot \text{πολ} 7 + 2^n \cdot \text{πολ} 7 = \text{πολ} 7.$$

$$\alpha^n - \beta^n = \text{πολ}(\alpha - \beta) \text{ αν } n \in \mathbb{N}^*$$

2^{ος} τρόπος:

Έστω $P(n)$ ο προς απόδειξη ισχυρισμός

- Για $n=1$ ισχύει $3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1+2} = 35 = \text{πολ} 7$
- Έστω ότι ισχύει ο $P(n)$ δηλαδή $3^{2n+1} + 2^{n+2} = \text{πολ} 7$ (1)
- Θα δείξουμε ότι ισχύει ο $P(n+1)$ δηλαδή $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = \text{πολ} 7$

$$\text{Πράγματι είναι } 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+2+1} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^n \cdot 2^3 \text{ (από (1))}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{πολ}7 - 2^v \cdot 4) \cdot 9 + 2^v \cdot 8 \\
 &= 9\text{πολ}7 - 36 \cdot 2^v + 8 \cdot 2^v \\
 &= 9\text{πολ}7 - 28 \cdot 2^v \\
 &= 9\text{πολ}7 - 7 \cdot (4 \cdot 2^v) \\
 &= \text{πολ}7
 \end{aligned}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Ναδειχθεί ότι $3/v(v+1)(2v+1)$, όπου v θετικός ακέραιος.
(Υπ.: Ευκλείδεια Διαίρεση)
2. Αν $v \in \mathbb{N}^*$ ναδειχθεί ότι $9/(3 \cdot 4^{v+2} + 10^v + 5)$.
3. Ναδείξετε ότι $9/(2^{4v+1} - 2^{2v} - 1)$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.
4. Ναδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $7^{2v+1} - 48v - 7 = \text{πολ}48$
5. Ναδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $5 | (16 \cdot 2^v + 9 \cdot 27^v)$
6. Ναδειχθεί ότι για κάθε v θετικό ακέραιο ισχύει: $2^v/(v+1) \cdot (v+2) \cdot \dots \cdot (2v)$.
7. Ναδειχθεί ότι $7^{222} + 2^{333} = \text{πολ}57$
8. Αν $7/(a+5)$ και $7/(40-\beta)$ με $\mu \in a, \beta$ ακέραιους ναδείξετε ότι $7/(a+\beta)$ (θέμα 2001)
9. Δίνεται ο αριθμός $a = v^2 + v + 5$. Ναεξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί v ώστε $3/a$.
10. Ναβρεθούν οι ακέραιοι a ($a \neq 3$) ώστε το κλάσμα $\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 3}$ ναείναι ακέραιος
11. Ναδείξετε ότι το κλάσμα $\kappa = \frac{5v+4}{6v+5}$, $v \in \mathbb{N}^*$ δεν απλοποιείται για καμμία τιμή του v .
12. Αν $a, \beta \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους ισχύει: $3 | (2a+\beta)$ και $3 | (5a+3\beta)$ ναδείξετε ότι: $9 | a\beta$.
13. Ναβρείτε τους φυσικούς αριθμούς $a \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει: $(a+2) | (a^2 + 4)$

14. Αν $\alpha \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \mid (3x^3 - 2x)$ και $\alpha \mid (x+1)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$
15. Αν οι αριθμοί ν, κ είναι ακέραιοι με $\nu/(\kappa^2 + 1)$ και $\nu/(\kappa^3 + 2)$, να βρεθούν οι πιθανές τιμές του ν .
16. Να δείξετε ότι για κάθε $2003 \mid 2002^{2002} + 2003^{2003}$
17. Αν α, β, γ περιττοί ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι $16 \mid \alpha^4 + \beta^4 - 2$
 (Απ.: $\alpha^4 + \beta^4 - 2 = \alpha^4 + \beta^4 - 1 - 1 = (\alpha^4 - 1) + (\beta^4 - 1) = \dots\dots\dots$)
18. Αν $x, y \in \mathbb{Z}$ και $x \mid y$ να δείξετε ότι $(8^x - 1) \mid (8^y - 1)$
19. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ και ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να δείξετε ότι οι α, β, γ διαιρούν τον αριθμό $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
 (Υπ.: ταυτότητα Euler: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Να δείξετε ότι : $6 \mid \alpha^3 - 6\alpha^2 - 7\alpha$, για κάθε ακέραιο α .

(Υπ.: $\alpha^3 - 6\alpha^2 - 7\alpha = \dots = \alpha(\alpha+1)(\alpha-1) - 6\alpha(\alpha+1)$)

Επαναληπτικά – συνδυαστικά θέματα

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει $|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}| = 1$, τότε να δείξετε ότι:

i. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \leq \frac{1}{4}$ και ii. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ τότε ισχύει $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 = \frac{1}{4}$.

B. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4)y + \lambda(\lambda + 2) = 0$

- i. Να παριστάνει ευθεία ii. Να είναι παράλληλη στη $x'x$
iii. Να είναι παράλληλη στον $y'y$ iv. Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 2^ο

A. Αν $\vec{\beta} \neq 0$ και $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ με $\vec{a}_1 \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{a}_2 \perp \vec{\beta}$ αποδείξτε ότι

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta} \text{ και } \vec{a}_2 = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta}.$$

B. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις :

$(\varepsilon_1): ax + by = 1$ και $(\varepsilon_2): 2bx + (a - b)y = -2$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $b \neq 0, a \neq b$.

- i. Βρείτε σχέση μεταξύ των a, b ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.
ii. Υπάρχουν τιμές των a, b ώστε οι ευθείες να ταυτίζονται;
iii. Στην περίπτωση που οι ευθείες τέμνονται να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 3^ο

A. Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου, επαληθεύουν την σχέση $(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι: $(\vec{\beta} \cdot \vec{a} - 1)(\vec{a} \cdot \vec{x}) = \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$

ii. Εάν $\vec{\beta} \cdot \vec{a} \neq 1$, να εκφράσετε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

B. Να βρείτε ένα σημείο M της έλλειψης $c: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\widehat{E'ME} = 90^\circ$.

Θέμα 4^ο

- A.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι κορυφές είναι $A(0,2)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.
- B.** Μεταβλητά σημεία A και B ολισθαίνουν πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα έτσι ώστε $\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)} = \lambda$, με λ σταθερό και $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.

Θέμα 5^ο

- A.** Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ και ισχύει $(2+\kappa)\overline{AB} + \overline{A\Gamma} + (\kappa-\lambda)\overline{B\Gamma} = \vec{0}$, υπολογίστε τους πραγματικούς κ, λ .
- B.** Βρείτε την υπερβολή με εστίες στον $y'y$, όταν διέρχεται από το σημείο $M(4, \sqrt{2})$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{1}{4}x$ και $y = -\frac{1}{4}x$.

Θέμα 6^ο

- A.** Αν $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$ και η γωνία $(\vec{p}, \vec{q}) = 45^\circ$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{p} - \vec{q}, \vec{q})$.
- B.** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 4k^2x - 4ky + 30 = 0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$ εφάπτεται στην παραβολή $C_1: y^2 = 30x$, κατόπιν να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες της C_1 και του κύκλου $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 1$.

Θέμα 7^ο

Ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ μια πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 12 = 0$, το κέντρο του K είναι το σημείο $(1, -1)$ και μια κορυφή του είναι η $\Lambda(4, 8)$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του.

Θέμα 8^ο

- A.** Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{a} + 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$.
- B.** Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που εφάπτεται στην ευθεία $c: x - y + 1 = 0$ και έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Θέμα 9^ο

- A.** Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{a} + 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}$.
- B.** Να αποδειχθεί ότι ο λόγος των αποστάσεων τυχαίου σημείου M της έλλειψης $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ από την εστία E και την ευθεία $\delta: x = \frac{a^2}{\gamma}$ είναι ίσος με $\frac{\gamma}{a}$.

Θέμα 10°

A. Έστω $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Προσδιορίστε το $x \in \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. Αν $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(\vec{a} - x\vec{\beta}) = 2$ και ii. Αν $(2\vec{a} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{a} - x\vec{\beta})$

B. Δίνεται η εξίσωση $\kappa(x + 2y) + \lambda(x + 2y) - 3x - 5y + 1 = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α. Ναδειχθεί, ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

β. Ναδειχθεί ότι όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από σταθερό σημείο.

Θέμα 11°

A. Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύουν $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $3|\vec{a}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}|$, να αποδειχθεί ότι: i. $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ και ii. $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$.

B. Οι κορυφές A, Γ τετραγώνου OABΓ βρίσκονται αντίστοιχα στους άξονες $x'x$ και $y'y$ συστήματος συντεταγμένων xOy και η διαγώνιος ΑΓ περνά από το σημείο $P(1, 2)$. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου.

Θέμα 12°

A. Έστω $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $12x_1 - 5y_1 + 1 = 0$ και $12x_2 - 5y_2 - 25 = 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq 4$$

B. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν B και Γ σημεία των ευθειών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα με τετμημένη $\lambda + 1$, δείξτε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και έχει σταθερό εμβαδόν, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι το A κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 13°

Δίνεται η εξίσωση C: $\frac{x^2}{\lambda + 4} + \frac{y^2}{\lambda + 5} = 1$.

α. Για ποιές τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει υπερβολή;

β. Για τις παραπάνω τιμές των λ να βρεθούν οι εστίες της.

Θέμα 14°

A. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| = 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 \geq 3$.

B. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1: x - \lambda y = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y = 0$ είναι ίσος με 2.

Θέμα 15°

A. Στο σύστημα αναφοράς Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(3,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,4)$. Η AG τέμνει τον Ox στο Δ και η AB τον Oy' στο E .

α. Να βρείτε την τετμημένη του Δ και την τεταγμένη του E .

β. Αν I το μέσο του OA , M το μέσο του $B\Gamma$ και K το μέσο του $E\Delta$, να δείξετε ότι τα σημεία I, M, K είναι συνευθειακά.

B. Μια μεταβλητή ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τέμνει την παραβολή $C: y^2 = 4x$ στα σημεία A, B .

Να δειχθεί ότι οι συνεταγμένες του μέσου M της AB είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda}\right)$. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M στις παρακάτω περιπτώσεις :

- i.** όταν είναι $\lambda = 1$ και $\beta \in \mathbb{R}$ και **ii.** όταν $\beta = 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Θέμα 16°

A. Έστω τα σημεία $A(3,-4)$, $B\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$, $\Gamma\left(0, -\frac{8}{5}\right)$, $\Delta\left(-\frac{13}{4}, -\frac{3}{5}\right)$

i. Να δείξετε ότι $\overline{AB} \parallel \overline{\Gamma\Delta}$

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου E , ώστε το $OBAE$ να είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Να δείξετε ότι το σημείο $Z\left(\frac{13}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

B. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$, όταν $A(4,1)$ και ένα ύψος του και μια διάμεσός του έχουν εξισώσεις $y = -x - 1$ και $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ αντίστοιχα.

Θέμα 17°

A. Αν $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v}_3 = -5\vec{i} - \vec{j}$ να βρεθούν :

i. Οι συνεταγμένες, τα μέτρα και οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων:

$$\vec{w}_1 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2, \quad \vec{w}_2 = 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3, \quad \vec{w}_3 = 2\vec{v}_3 + 3\vec{v}_1.$$

ii. Το μέτρο $\left| \vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \right|$.

B. Ορθογώνιο τρίγωνο OAB ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2 = 2px$, $p > 0$. Αν η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(2, p)$ να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς AB .

Θέμα 18°

A. Έστω παρ/μο $AB\Gamma\Delta$. Στις απέναντι πλευρές του $\Delta\Delta$ και $B\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία E και Z

αντίστοιχα τέτοια ώστε : $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{A\Delta}$ και $\vec{BZ} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$. Αν $\vec{A\Delta} = (3,0)$ και $\vec{AB} = (1,4)$, να

βρεθούν οι συντεταγμένες του $\vec{AP}$, όταν $\vec{EP} = 2\vec{PZ}$.

B. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x + y - 3 = 0, (\varepsilon_2): 3x - y - 1 = 0 \text{ και } (\varepsilon_3): (2\mu - 1)x + (2 - \mu)y + \mu = 0$$

α. Να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι τρεις ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Από όλες τις ευθείες του επιπέδου, που διέρχονται από το παραπάνω σημείο, να βρεθούν εκείνες που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Θέμα 19^ο

A. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει το ίδιο μήκος με το διάνυσμα $\vec{\beta} = (8, -6)$ και την διεύθυνση του $\vec{\gamma} = (2, 2\sqrt{3})$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του.

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραapeζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

Θέμα 20^ο

A. Έστω σημεία A και B της ευθείας $x - \frac{2}{3}y = \frac{7}{3}$ με $x_A = 1$ και $x_B = 2$. Να βρεθεί σημείο M τέτοιο ώστε $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 4\vec{AB}$.

B. Ορθογώνιο OABΓ έχει σταθερή περίμετρο 2κ και τις κορυφές του A, Γ στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα. Δείξτε ότι η κάθετος από το B στη διαγώνιο AG περνά από σταθερό σημείο.

Θέμα 21^ο

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ με $x = 3 + \sin 2\theta$ και $y = 1 + \sin 2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ βρίσκεται για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ πάνω σε ευθεία.

B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x_0, y_0)$ των οποίων η απόσταση από τον $y'y$ ισούται με το μήκος της εφαπτόμενης MA στον κύκλο $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$.

Θέμα 22^ο

A. Δίδονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(1, -4)$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία ισχύει $\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 = 5$.

B. α. Η προβολή της αρχής των αξόνων στην ευθεία (ε) , είναι το σημείο $(2, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

β. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και το σημείο $A(3, 1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του A ως προς την ευθεία (ε) .

Θέμα 23°

A. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφή $A(1,2)$ και οι εξισώσεις των δύο διαμέσων του είναι

$$y = 1 \text{ και } y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}. \text{ Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.}$$

B. Αν ο κύκλος $c: (x+8)^2 + (y-6)^2 = \rho^2$ εφάπτεται στον κύκλο c_1 που έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ , να βρείτε :

α. Την ακτίνα ρ .

β. Τα σημεία της ευθείας $y = 2x - 5$ από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο c_1 είναι κάθετες.

(Απ.: **α.** $\rho = 5$, **β.** $(-1, -7), (5, 5)$)

Θέμα 24°

A. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Να αποδείξετε ότι $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = -3$.

B. Θεωρούμε την έλλειψη $c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και έστω M ένα τυχαίο σημείο της. Ναδειχτεί

ότι ο γεωμετρικός τόπος ορθόκέντρων των τριγώνων A_1MA_2 (A_1, A_2 είναι σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα $x'x$) είναι επίσης έλλειψη.

Θέμα 25°

A. Αν $B(2,6)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διχοτόμου της γωνίας που φέρνουμε από

την ίδια κορυφή είναι αντίστοιχα $y = \frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$ και $y = -7x - 5$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

B. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής: $y^2 = 2px$ ($p > 0$) που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 2y + 3 = 0$.

Θέμα 26°

A. Έστω $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \neq 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και τέμνει τους άξονες σε σημεία τα οποία ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το M .

B. Δίνονται τα σημεία $K(\sqrt{7}, 0)$ και $\Lambda(-\sqrt{7}, 0)$. Να βρεθούν τα σημεία $M(x, y)$ που

απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ και για τα οποία ισχύει

$(MK) + (ML) = 8$. Κατόπιν να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου που αυτά ορίζουν.

Θέμα 27^ο

- A. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ, όταν $A(-4, -5)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = -x + 1$ και $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.
- B. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ και το σημείο $A(4, 2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που περνάει από το A και τέμνει τη C στα B, Γ έτσι ώστε το A να είναι μέσο του BΓ.

Θέμα 28^ο

- A. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ABΓ αν $A(1, 2)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου που φέρνουμε από την ίδια κορυφή, είναι αντίστοιχα $y = 2x + 4$ και $y = -x + 1$.
- B. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\lambda x + (\lambda - 1)y + 3\kappa + 2 = 0$, $\varepsilon_2: (1 - 2\lambda)x - (\lambda + 2)y + \lambda = 0$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2
- α. Να τέμνονται β. Να είναι παράλληλες.

Θέμα 29^ο

- A. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $A(3, 0)$ και η οποία τέμνει τις ευθείες με εξισώσεις $y = 2x - 2$ και $y = -x - 3$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε το A να είναι μέσον του BΓ.
- B. Έστω παραβολή $C_1: y^2 = 2px$. Να βρεθεί ο τύπος που δίνει την απόσταση τυχαίου σημείου M της παραβολής από τη εστία E. Κατόπιν να αποδειχθεί ότι, ο κύκλος με διάμετρο τυχαία χορδή AB της παραβολής, που διέρχεται από την εστία, εφάπτεται της διευθετούσας.

Θέμα 30^ο

- A. Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τέμνουν την ευθεία $(\varepsilon): y = a$ στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Οι κάθετες στις (ε_1) και (ε_2) στα A και B αντίστοιχα τέμνονται στο Γ.

Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Γ είναι $\left(\frac{a(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \frac{a(\lambda_1 \lambda_2 - 1)}{\lambda_1 \lambda_2} \right)$.

- B. Έστω τρίγωνο AOB ορθογώνιο (κορυφής O) και ισοσκελές. Αν το AOB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2 = 2x$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των A και B.

Θέμα 31°

A. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου έχουν εξισώσεις: $y = 2x + 5$ και $y = \frac{1}{2}x + 2$. Το

δε σημείο τομής των διαγωνίων του έχει συντεταγμένες $(1, 4)$. Να βρείτε:

α. Τις εξισώσεις των άλλων πλευρών και των διαγωνίων.

β. Τις εξισώσεις των υψών του.

B. Έστω $C: y^2 = 2px$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της. Να αποδειχθεί ότι η AB περνά από την εστία E της C αν και μόνο αν ισχύει $y_1 y_2 = -p^2$. Κατόπιν να υπολογισθεί το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$.

Θέμα 32°

A. Οι συντεταγμένες των σημείων $A(\alpha, 2)$, $B(\beta, 3)$ και $\Gamma(\gamma, 1)$ με την σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να τοποθετήσετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερό τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB, ΓB και ΑΓ.

B. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του με κέντρο O και ακτίνα R. Να αποδείξετε ότι $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2\Gamma \geq -\frac{3}{2}$.

Θέμα 33°

A. Θεωρούμε τα σημεία $B(\alpha, \beta)$ και $\Gamma(\gamma, \beta)$ με α, β, γ ακέραιους και $\gamma > \alpha$. Αν $A(\kappa, \lambda)$ είναι σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, τέτοιο ώστε $|\overline{AB}| = |\overline{B\Gamma}| = |\overline{\Gamma A}|$, να αποδείξετε ότι οι κ και λ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ακέραιοι.

B. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της για τα οποία ισχύει $y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Ναδειχθεί ότι η AB σχηματίζει σταθερή γωνία με τον $x'x$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της AB.

Θέμα 34°

A. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ τις σχετικές θέσεις των ευθειών:

$$\varepsilon_1: x + y = 1, \quad \varepsilon_2: x + y = \kappa, \quad \varepsilon_3: \kappa x + y = 1.$$

B. Στην έλλειψη $x^2 + 5y^2 = 20$, να βρείτε σημεία της M τέτοια ώστε: $ME' \perp ME$ όπου E και E' είναι οι εστίες της έλλειψης.

Θέμα 35°

A. Για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ οι ευθείες: $\varepsilon_1: \kappa x + y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: x + \kappa y + 1 = 0$,

$\varepsilon_3: x + y + \kappa = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

- i. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών: $\varepsilon_1 : \lambda x - (\lambda + 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 2y + \lambda - 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της Α κινείται σε σταθερή ευθεία.
- B. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $\lambda x^2 - \lambda y^2 + (1 - \lambda^2)xy - (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 1 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 36°

- A. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες: $\varepsilon_1 : x + \mu y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2\mu x + 2y + \lambda = 0$ είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.
- B. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει κορυφές τις ευθείες της έλλειψης $\varepsilon : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης.

Θέμα 37°

- A. Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(3, -5)$ και η ευθεία $\varepsilon : 7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο M της ε ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M .
- B. Έστω $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta} = 5\vec{a} + 4\vec{\beta}$ να υπολογιστεί το $|\vec{\delta}|$.

Θέμα 38°

- A. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\eta\mu\alpha)x - (\sigma\upsilon\nu\alpha)y + 1 = 0$, $\varepsilon_2 : (\sigma\upsilon\nu\alpha)x + (\eta\mu\alpha)y - 1 = 0$, $\varepsilon_3 : x + y = \sqrt{2}$ και $\varepsilon_4 : 2\kappa x + \lambda y = \kappa\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί ποιά γραμμή διαγράφει το σημείο (κ, λ) , όπου ταν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- B. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y - 6 = 0$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής που έχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία.

Θέμα 39°

- A. Δίνονται οι ημιευθείες $y = \lambda x$ και $y = -\lambda x$ με $0 < \lambda < 1$ και $x > 0$ και η ευθεία (ε) τις τέμνει στο σημείο A και B . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των A και B συναρτήσει των συντεταγμένων (x, y) του μέσου M του τμήματος AB .

B. Αν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε να ισχύει: $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1 - \lambda^2$, να δείξετε ότι το σημείο M γράφει τον κλάδο μιας υπερβολής.

Θέμα 40°

Κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ δύο πλοία Π_1, Π_2 βρίσκονται στις θέσεις $\Pi_1(t, t+4)$ και $\Pi_2(1-2t, t+1)$ αντίστοιχα.

- Υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συγκρουσθούν;
- Να βρεθεί η εξίσωση της πορείας κάθε πλοίου.
- Να βρεθεί η απόσταση των πλοίων την στιγμή που ξεκίνησαν και την χρονική στιγμή $t = 2$.
- Οι πορείες των πλοίων συναντώνται;

Θέμα 41°

A. Δίδονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(-1, 1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου ώστε $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$.

B. Να βρεθεί η αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$.

Θέμα 42°

A. Δίδονται τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(5, -2)$. Βρείτε σημείο ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με εμβαδόν 10 τμ.

B. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$. Αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): x - y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 3x + y + 5 = 0$, είναι οι μεσοκάθετες των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να βρεθούν οι κορυφές B και Γ .

Θέμα 43°

A. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x + (\lambda - 1)y - \lambda = 0$ και $(\varepsilon_2): \lambda x + \lambda y - \lambda - 1 = 0$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.

B. i. Να βρεθεί $\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): (\mu + 3)x - \mu y + \mu - 3 = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu + 2)x + (3\mu + 4)y - 7\mu - 10 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ να είναι κάθετο.

ii. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο.

Θέμα 44°

Ένα εκπαιδευόμενος πιλότος A κινείται με το αεροσκάφος του σε τροχιά ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς ώστε κάθε χρονική στιγμή η θέση του να δίνεται από το σημείο $M(\lambda^2, 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. i. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Ένας άλλος πιλότος B κινείται στην ίδια τροχιά έτσι ώστε το άθροισμα των τεταγμένων των θέσεων του A και του B να είναι ίσο με $4\sqrt{3}$. Ναδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τις θέσεις τους κάθε χρονική στιγμή σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα xx' .

- B. i.** Ο εκπαιδευτής τους κινείται έτσι ώστε να βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τους δύο πιλότους Α και Β και σε ίση απόσταση από αυτούς. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.
- ii.** Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τεταγμένη του αεροσκάφους του πιλότου Α είναι 2, ο πιλότος εκτοξεύει ρουκέτα, με σκοπό να πλήξει στόχο με συντεταγμένες $\Sigma(-1, 0)$. Αν θεωρηθεί ότι η τροχιά της ρουκέτας είναι ευθεία εφαπτόμενη στην τροχιά του αεροσκάφους εκείνη την χρονική στιγμή, να ελεγχθεί αν ο πιλότος θα πλήξει το στόχο.

Θέμα 45°

A. Έστω Α, Β σημεία της παραβολής $C: y^2 = 2px$ με $A \neq B$ και $M(x_0, y_0)$ το μέσον του

ΑΒ με $y_0 \neq 0$. Ναδειχθεί ότι η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή κατεύθυνσης ίσο με $\frac{p}{y_0}$.

B. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών :

$\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda + 1$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 46°

A. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $K(x_1, y_1)$. Να δειχθεί ότι οι ευθείες :

$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ διέρχονται από το σημείο Κ.

B. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, $\alpha > \beta$ έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 47°

Αν $\varepsilon: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και $M(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου με $M'(x_2, y_2)$ το συμμετρικό του Μ ως προς την ευθεία ε να αποδειχθούν :

$$\text{i. } \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) + 2\gamma = 0 \quad \text{ii. } \beta(x_1 - x_2) - \alpha(y_1 - y_2) = 0$$

Θέμα 48°

A. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda bx - \alpha y = \lambda \alpha \beta$ και $\varepsilon_2: \beta x + \lambda \alpha y = \alpha \beta$, όπου $\lambda \neq 0$ και τα σημεία $K(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, $\Lambda(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, όπου $0 < \beta < \alpha$. Να δειχθεί ότι για το σημείο τομής Μ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ισχύει $(MK) + (ML) = 2\alpha$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

B. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο $M(x_0, y_0)$ που έχει μέσον το σημείο Μ. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ αν η χορδή έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης λ.

Θέμα 49^ο

Έστω α, β ακέραιοι τέτοιοι ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (2, 1 - \beta)$ και είναι κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Ο ακέραιος β είναι περιττός.

β. Αν $\delta \in \mathbb{Z}_+^*$ και τέτοιος ώστε να ισχύουν: $\delta/1 - \alpha\gamma$ και $\delta/\gamma\beta + 2$ με $\gamma \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $\delta = 1$

(Απ.: $\beta = 2\alpha + 1$)

Θέμα 50^ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: |\vec{\alpha}|^2 x + |\vec{\beta}|^2 y = 6\vec{\alpha}\vec{\beta}$. Αν σχηματίζει με τους άξονες του ορθοκανονικού συστήματος τρίγωνο με εμβαδόν 18, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

Θέμα 51^ο

Να βρείτε σημεία της ευθείας $x - y + 4 = 0$, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία να απέχουν από την ευθεία $3x - 4y + 14 = 0$ απόσταση που είναι αριθμός ακέραιος.

(Απ.: $M(5k - 1, 5k + 3), k \in \mathbb{Z}$)

Θέμα 52^ο

Δίνεται το κλάσμα $\frac{4\gamma + 9}{3\gamma + 5}$ με γ θετικό ακέραιο. Δείξτε ότι οι τιμές του γ για τις οποίες το κλάσμα απλοποιείται είναι τεταγμένες σημείων της ευθείας με εξίσωση $7x - y - 4 = 0$.

(Απ.: $\gamma = 7\lambda - 4, \lambda \in \mathbb{N}^*$)

Θέμα 53^ο

Αν (k, λ) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 5)$ και $B(2003, 2004)$ με $k, \lambda \in \mathbb{Z}$, τότε ο αριθμός $k \cdot \lambda$ είναι άρτιος.

Θέμα 54^ο

Δίνονται τα παράλληλα διανύσματα $\vec{u} = (\mu, \nu)$ και $\vec{v} = (\kappa, \lambda)$, με $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ θετικούς ακέραιους. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ είναι ακέραιος.