

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο “**BIBΛΙΟμαθήματα**” δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό “**Εξετάσεις**” της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.

Γι’ αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ’έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα “**εργαλείο δουλειάς**” για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **20 BIBΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το “**ξεχωριστό θέμα**”.

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι’ αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος (Άλγεβρα)

Κεφάλαιο 2ο

Μάθημα 1ο: Μιγαδικοί αριθμοί	13
Μάθημα 2ο: Μέτρο μιγαδικού αριθμού	29

Β΄ Μέρος (Ανάλυση)

Κεφάλαιο 1ο

Μάθημα 3ο: Συναρτήσεις	45
Μάθημα 4ο: Μονοτονία, Ακρότατα, “1-1”, Αντίστροφη συνάρτηση	57
Μάθημα 5ο: Όριο συνάρτησης	73
Μάθημα 6ο: Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$	87
Μάθημα 7ο: Συνέχεια συνάρτησης	99
Μάθημα 8ο: Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα	111

Κεφάλαιο 2ο

Μάθημα 9ο: Ορισμός παραγώγου, Εξίσωση εφαπτομένης	135
Μάθημα 10ο: Παράγωγος συνάρτησης, Κανόνες παραγωγίσης, Εξίσωση εφαπτομένης	149
Μάθημα 11ο: Ρυθμός μεταβολής	169
Μάθημα 12ο: Θεωρήματα Rolle - Μέσης Τιμής, Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής	175

Μάθημα 13ο: Μονοτονία, ακρότατα συνάρτησης	199
Μάθημα 14ο: Κυρτότητα, Σημεία καμπής συνάρτησης	209
Μάθημα 15ο: Κανόνες De l' Hospital	219
Μάθημα 16ο: Ασύμπτωτες	227
Μάθημα 17ο: Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης	235

Κεφάλαιο 3ο

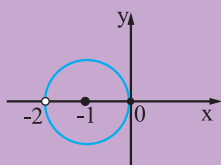
Μάθημα 18ο: Αόριστο ολοκλήρωμα , Μέθοδοι ολοκλήρωσης	251
Μάθημα 19ο: Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης, Η συνάρτηση $f(x) = \int_a^x f(t)dt$	265
Μάθημα 20ο: Εμβαδόν	289

Ερωτήσεις Κατανόησης – Επαναληπτικά - Συνδυαστικά Θέματα

Ασκήσεις κλειστού τύπου	305
Ασκήσεις ανοικτού τύπου	313

1ο μάθημα

Μιγαδικοί αριθμοί

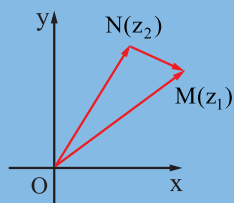


Α' Μέρος (Άλγεβρα)

2ο Κεφάλαιο

2ο μάθημα

Μέτρο Μιγαδικού αριθμού



Μύθημα 1

Μιγαδικοί αριθμοί

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$ στο $\mathbb{R}$ δημιούργησε ένα νέο σύνολο, υπερσύνολο του $\mathbb{R}$, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ στο οποίο θεωρήθηκε η ύπαρξη ενός νέου στοιχείου του i με την ιδιότητα $i^2 = -1$ και το οποίο ονομάστηκε φανταστική μονάδα. Στο νέο σύνολο $\mathbb{C}$ οι βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που γνωρίσαμε στο $\mathbb{R}$ διατηρούνται με τους κανόνες λογισμού (π.χ. επιμεριστική, αντιμεταθετική ιδιότητα) και επιπλέον κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (κανονική μορφή). Το α λέγεται **πραγματικό μέρος** και συμβολίζεται $\text{Re}(z) = \alpha$ ενώ το β λέγεται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται $\text{Im}(z) = \beta$. Οι μιγαδικοί της μορφής $z = \alpha + 0i$ αποτελούν το σύνολο $\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί). Οι μιγαδικοί της μορφής $z = 0 + \beta i$ αποτελούν το σύνολο I (φανταστικοί αριθμοί). Είναι φανερό ότι τα σύνολα $\mathbb{R}, I$ είναι γνήσια υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{C}$ (μιγαδικοί αριθμοί).

Συζυγείς μιγαδικοί

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$. Ονομάζουμε συζυγή του z και συμβολίζουμε με $\bar{z}$ τον $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

Ειδικά: αν $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

1. Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = (\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

2. Πολλαπλασιασμός: $z_1 z_2 = (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 =$
 $= \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$

3. Διάρθρωση: Η διαίρεση εκτελείται με τη βοήθεια του συζυγούς του μιγαδικού του παρονομαστή.

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i \neq 0$.

Τότε:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \dots = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Όμοια όπως στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε για τον μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$:

$$\text{i. } z^1 = z$$

$$\text{ii. } z^0 = 1, z \neq 0$$

$$\text{iii. } z^{-v} = \frac{1}{z^v}, v \in \mathbb{N}^*, z \neq 0$$

$$\text{iv. } z^v = z^{v-1} \cdot z, v \in \mathbb{N}, v > 1$$

Για τις δυνάμεις του i ειδικά ορίζουμε:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Γενικότερα, $i^v = i^{4\pi+v} = (i^4)^\pi \cdot i^v = 1 \cdot i^v = i^v$ όπου π το πηλίκο και v το υπόλοιπο της Ευκλεί-

$$\text{δειας διαίρεσης του } v \text{ με το } 4. \text{ Επειδή } v = 0, 1, 2, 3 \text{ έχουμε: } i^v = i^v = \begin{cases} 1, & \text{αν } v = 0 \\ i, & \text{αν } v = 1 \\ -1, & \text{αν } v = 2 \\ -i, & \text{αν } v = 3 \end{cases}$$

Ιδιότητες συζυγών

I. Για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ ισχύουν:

$$\text{i. } z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{ii. } z + \bar{z} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$\text{iii. } z - \bar{z} = 2\beta i = 2(\operatorname{Im}(z))i$$

II. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τότε:

i. Ο αριθμός z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\bar{z} = z$

ii. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\bar{z} = -z$

III. Για τους μιγαδικούς z, z_1, z_2 ισχύουν

$$\text{i. } \overline{\bar{z}} = z$$

$$\text{ii. } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \text{ και γενικότερα } \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_v} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_v$$

$$\text{iii. } \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \text{ και γενικότερα } \overline{z_1 \cdot z_2 \dots z_v} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \dots \bar{z}_v \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{iv. } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0) \quad \text{v. } \overline{(z^v)} = (\bar{z})^v \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } v.$$

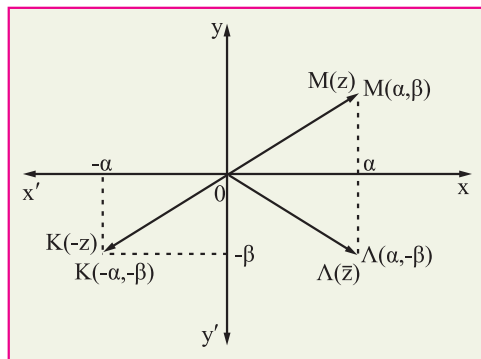
Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$. Στο μιγαδικό αριθμό z μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως σε κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού z συμβολίζεται τότε και με $\mathbf{M}(z)$ ή ακόμα με την διανυσματική ακτίνα $\overline{OM}$ του σημείου $M(\alpha, \beta)$.

Ένα επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών λέγεται μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(a, 0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $z = a + 0i = a$ ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού σ' αυτόν ανήκουν τα σημεία $M(0, \beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών αριθμών $z = 0 + \beta i = \beta i$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών $z = a + \beta i$ και $\bar{z} = a - \beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(a, \beta)$ και $\Lambda(a, -\beta)$ που είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών $z = a + \beta i$ και $-z = -a - \beta i$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $M(a, \beta)$ και $K(-a, -\beta)$ που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.



Επίλυση της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ (1) στο $\mathbb{C}$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $a \neq 0$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ (διακρίνουσα της (1))

- Αν $\Delta > 0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $z = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$ (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ισχύουν οι τύποι Vieta, δηλαδή $z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{a}$ και $z_1 z_2 = \frac{\gamma}{a}$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται να γραφεί στην κανονική μορφή $a + \beta i$ $a, \beta \in \mathbb{R}$ ένας μιγαδικός αριθμός.

Εκτελούμε τις πράξεις όπως τις ορίσαμε στη θεωρία (Δυνάμεις - Ταυτότητες κ.λ.π)

Παράδειγμα 1

Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ το μιγαδικό $z = \frac{5}{6} \left(\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} \right)$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } z &= \frac{5}{6} \left(\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} \right) = \frac{5}{6} \left[\frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(2-i)(2+i)} \right] = \frac{5}{6} \left[\frac{4+4i-1+4-4i-1}{4+1} \right] = \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{8-2}{5} \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1 = 1 + 0i \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1, z_2 είναι ίσοι ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι ίσοι.

Γράφουμε τους z_1, z_2 στην κανονική τους μορφή $z_1 = a + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ και διαπιστώνουμε ότι $a = \gamma$ και $\beta = \delta$ ή απαιτούμε $a = \gamma$ και $\beta = \delta$ όταν ζητούνται συνθήκες, ώστε να είναι ίσοι.

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (-2\alpha + 3\beta) + (2\alpha + \beta)i$ και $z_2 = (3-i)i$ να είναι ίσοι.

Λύση

$$\text{Είναι } z_2 = (3-i)i = 3i + 1 = 1 + 3i, \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 2\alpha + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Υπολογισμός παραστάσεων με δυνάμεις του i (ακέραιος εκθέτης).

Η παράσταση i^v ισούται με i^u όπου u είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του v δια 4.

Επομένως οι δυνατές τιμές της παράστασης i^v είναι $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τις τιμές της παράστασης A για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου n με

$$A = \frac{i^{10} + i^{50}}{i^{n+1}}.$$

Λύση

Είναι $i^{10} = i^{4 \cdot 2 + 2} = i^2 = -1$, $i^{50} = i^{4 \cdot 12 + 2} = i^2 = -1$, $i^{n+1} = i^n \cdot i = i^{4\pi + \nu} i = i^\nu \cdot i$

$$\text{-Για } n = 0 \quad A = \frac{-1-1}{i} = \frac{-2}{i} = \frac{-2(-i)}{-i^2} = 2i$$

$$\text{-Για } n = 1 \quad A = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

$$\text{-Για } n = 2 \quad A = \frac{-1-1}{-i} = \frac{-2}{-i} = \frac{-2i}{-i^2} = -2i$$

$$\text{-Για } n = 3 \quad A = \frac{-1-1}{-i \cdot i} = \frac{-2}{-i^2} = -2$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται να δείξουμε ότι δύο μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι συζυγείς.

Γράφουμε τους z_1, z_2 στην κανονική μορφή $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ και διαπιστώνουμε

ότι $\alpha = \gamma$ και $\beta + \delta = 0$ ή απαιτούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$ να έχει λύση στην περίπτωση συνθήκης ώστε οι z_1, z_2 να είναι συζυγείς.

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + i^3(ix - 2y)$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{11}$ να είναι συζυγείς.

Λύση

Είναι $z_1 = 2 - i(ix - 2y) = (2 + x) + 2yi$ και $z_2 = x^2 + 2yi^{4 \cdot 2 + 3} = x^2 + 2yi^3 = x^2 - 2yi$.

$$\text{Απαιτούμε } \begin{cases} 2 + x = x^2 \\ 2y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $(x, y) = (-1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $(x, y) = (2, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις όπου ζητείται ναδειχθεί ότι ένας μιγαδικός έστω z είναι πραγματικός ή φανταστικός ή ζητούνται οι συνθήκες ώστε να είναι z πραγματικός ή z φανταστικός.

α' τρόπος: Γράφουμε τον z στη μορφή $z = x + yi$ και διαπιστώνουμε ότι $y = 0$ ή $x = 0$ αντίστοιχα.

β' τρόπος: Διαπιστώνουμε ότι $z = \bar{z}$ ή απαιτούμε $z = \bar{z}$ όταν ζητούνται οι συνθήκες, ώστε $z \in \mathbb{R}$ ή $z = -\bar{z}$, αν ζητείται ο z να είναι φανταστικός.

Παράδειγμα 5

i. Να δείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $v \in \mathbb{N}^*$ ο $(\bar{z})^v + z^v$ είναι πραγματικός.

ii. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $\omega = \frac{3+\alpha i}{\beta-3i}$ να είναι φανταστικός.

Λύση

i. Έστω $\omega = (\bar{z})^v + z^v$, τότε $\bar{\omega} = \overline{(\bar{z})^v + z^v} = \overline{(\bar{z})^v} + \overline{z^v} = z^v + (\bar{z})^v = \omega$. Άρα $\omega \in \mathbb{R}$.

ii. Είναι $\omega = \frac{3+\alpha i}{\beta-3i} = \frac{(3+\alpha i)(\beta+3i)}{(\beta-3i)(\beta+3i)} = \dots = \frac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9} + \frac{9+\alpha\beta}{\beta^2+9}i$

Ο ω είναι φανταστικός αν $\frac{3\beta-3\alpha}{\beta^2+9} = 0$ δηλαδή αν $\alpha = \beta$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Λύση εξίσωσης της μορφής $az = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ή $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ ή άλλης μορφής.

Η εξίσωση $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ λύνεται με τη βοήθεια της διακρίνουσας όπως αναφέραμε στη θεωρία.

Για τις άλλες μορφές θέτουμε $z = x + yi$, εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε στη

μορφή $a + \beta i = 0$. Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. Επίσης η $az = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ μπορεί να λυθεί όπως ακριβώς και στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(1+2i)(i-z) - (4i-3)(1-iz) = 1+7i$

ii. $z^2 - 3\sqrt{3} \cdot z + 9 = 0$

iii. $\bar{z} = 3z - 1$

Λύση

i. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$i - z + 2i(i - z) - (4i - 4i^2 z - 3 + 3iz) = 1 + 7i \Leftrightarrow i - z - 2 - 2iz - 4i - 4z + 3 - 3iz = 1 + 7i$$

$$\Leftrightarrow -3i - 2 + 3 + z(-1 - 2i - 4 - 3i) = 1 + 7i \Leftrightarrow z(-5 - 5i) = 10i \Leftrightarrow -5z(1+i) = 10i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10i}{-5(1+i)} = \frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i+2i^2}{1+1} = \frac{-2-2i}{2}. \text{ Άρα } z = -1-i.$$

ii. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 9 = 27 - 36 = -9 < 0$ οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm i\sqrt{9}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm 3i}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

iii. Θέτουμε $z = x + yi$. Η εξίσωση $\bar{z} = 3z - 1$ γίνεται $x - yi = 3(x + yi) - 1 \Leftrightarrow$

$$1 + x - yi - 3x - 3yi = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x - 4yi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Άρα η λύση είναι $z = \frac{1}{2}$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις που ζητείται ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού αριθμού z τα $\operatorname{Re}(z)$ και $\operatorname{Im}(z)$ του οποίου δίνονται παραμετρικά ή δίνεται ισότητα που μας οδηγεί σε παραμετρικά $\operatorname{Re}(z)$ και $\operatorname{Im}(z)$.

Γράφουμε τον μιγαδικό z στην κανονική του μορφή και απαλείφουμε την παράμετρο από τα $\operatorname{Re}(z)$ και $\operatorname{Im}(z)$.

Παράδειγμα 7

Να βρείτε στο μιγαδικό επίπεδο το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z = (1+5i)\lambda + 2 - 3i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ο μιγαδικός z γράφεται $z = \lambda + 5\lambda i + 2 - 3i = (\lambda + 2) + (5\lambda - 3)i$. Αν $z = x + yi$ τότε $x = \lambda + 2$ και $y = 5\lambda - 3$. Προκύπτει λοιπόν $\lambda = x - 2$ και $y = 5(x - 2) - 3 = 5x - 13$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 5x - 13$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να λυθούν οι ανισώσεις $P_1(z) \leq P_2(z)$ ή $P_1(z) \geq P_2(z)$ όπου $P_1(z), P_2(z)$ παραστάσεις του z με $z \in \mathbb{C}$.

Θέτουμε $z = \alpha + \beta i$. Φέρνουμε την ανίσωση στην μορφή $x + yi \geq 0$ ή $x + yi \leq 0$ και απαιτούμε $y = 0$ διότι η διάταξη δεν έχει νόημα στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η ανίσωση $3z - 1 \geq z + 7$ (1), $z \in \mathbb{C}$.

Λύση

Αν $z = x + yi$ τότε $3(x + yi) - 1 \geq (x + yi) + 7 \Leftrightarrow (2x - 8) + 2yi \geq 0$. Πρέπει $y = 0$ και η ανίσωση (1) γράφεται $2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Άρα λύση της (1) είναι $z = x + 0i$ με $x \geq 4$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να καταλήξουμε από ισότητα μιγαδικών σε ισοδύναμη ισότητα διανυσμάτων

Παίρνουμε υπόψιν μας την εξής βασική πρόταση:

Αν ο λόγος δύο μιγαδικών z_1, z_2 είναι πραγματικός τότε οι εικόνες τους M_1, M_2 και η αρχή των αξόνων O είναι σημεία συνευθειακά.

Απόδειξη: $\frac{z_1}{z_2} = k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = kz_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM_2}$ άρα τα O, M_1, M_2 συνευθειακά.

Παράδειγμα 9

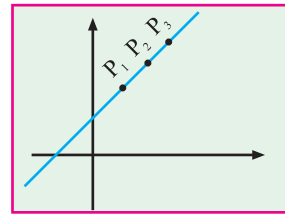
Αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα συνευθειακά σημεία P_1, P_2, P_3 να

δείξετε ότι $w = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$.

Λύση

Είναι $\overrightarrow{P_1P_2} = \kappa \overrightarrow{P_1P_3}$, $\kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \kappa(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}) \Leftrightarrow$

$z_2 - z_1 = \kappa(z_3 - z_1) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \kappa$ είναι προφανές ότι $w \in \mathbb{R}$.



Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Άσκηση 1**

Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο

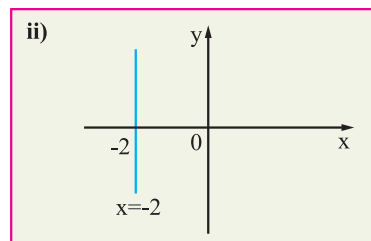
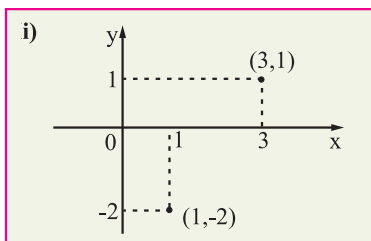
i. τους μιγαδικούς: $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$

ii. τους μιγαδικούς z με $\operatorname{Re}(z) = -2$

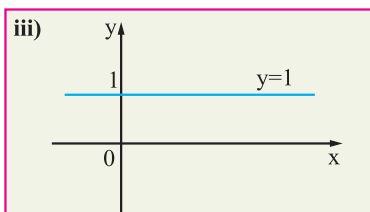
iii. τους μιγαδικούς z με $\operatorname{Im}(z) = 1$

iv. τους μιγαδικούς z με $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$

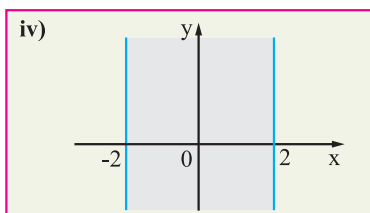
Λύση



Οι μιγαδικοί με $\operatorname{Re}(z) = -2$ είναι οι αριθμοί της μορφής $-2 + yi$, με $y \in \mathbb{R}$. Άρα, ανήκουν στην ευθεία $x = -2$



Οι μιγαδικοί με $\text{Im}(z) = 1$ είναι της μορφής $x + i$, $x \in \mathbb{R}$ άρα παριστάνονται με τα σημεία $(x, 1)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Είναι δηλαδή τα σημεία της ευθείας $y = 1$.



$-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $x = -2$ και $x = 2$ ή πάνω στις δύο ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τον $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $1 + 2\sqrt{2}i = 3 \frac{1+ai}{1-ai}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 1 + 2\sqrt{2}i &= 3 \frac{1+ai}{1-ai} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}i = 3 \frac{(1+ai)^2}{(1-ai)(1+ai)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}i = 3 \frac{1-a^2+2ai}{1+a^2} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}i = \frac{3(1-a^2)}{1+a^2} + \frac{6a}{1+a^2}i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3(1-a^2)}{1+a^2} = 1 \\ \frac{6a}{1+a^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3a^2 = 1+a^2 \\ 6a = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 = 2 \\ 2\sqrt{2}a^2 - 6a + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2}a^2 - 6a + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } a = \sqrt{2} \end{cases} \\ \text{Άρα } a &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε $z_1 \cdot z_2 = 0$ αν και μόνο αν $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$

Λύση

Έστω $z_1 \cdot z_2 = 0$. Αν $z_1 \in \mathbb{C}$ και $z_1 \neq 0$ τότε ορίζεται ο $\frac{1}{z_1}$.

Επειδή $z_1 \cdot z_2 = 0$, έχουμε $z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot (z_1 \cdot z_2) = \frac{1}{z_1} \cdot 0 = 0$.

Όμοια αν $z_2 \neq 0$ τότε $z_1 = 0$. Άρα $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$.

Αντίστροφα αν $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$ τότε προφανώς $z_1 z_2 = 0$.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta i)^{2002} + (\beta - \alpha i)^{2002} = 0$ (1)

Λύση

Προφανώς σε τέτοιες ασκήσεις πρέπει να αναζητηθεί κάποιος μετασχηματισμός ώστε ναδειχθεί ότι πρόκειται για άθροισμα αντίθετων αριθμών.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } (\beta - \alpha i)^{2002} &= [-(\alpha i - \beta)]^{2002} = (\alpha i - \beta)^{2002} = (\alpha i + \beta i^2)^{2002} = \\ &= [i(\alpha + \beta i)]^{2002} = i^{2002} (\alpha + \beta i)^{2002} \quad \text{Όμως } i^{2002} = i^{2000} \cdot i^2 = (i^4)^{500} \cdot i^2 = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Άρα $(\beta - \alpha i)^{2002} = -(\alpha + \beta i)^{2002}$. Οπότε η ισότητα (1) ισχύει.

Άσκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση $z^2 = \frac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i}$ (1), με $z \in \mathbb{C}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έστω } z = x + yi. \text{ Τότε η (1) γράφεται } (x + yi)^2 &= \frac{20\sqrt{3}-12i}{\sqrt{3}-9i} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi &= \frac{(20\sqrt{3}-12i)(\sqrt{3}+9i)}{(\sqrt{3}-9i)(\sqrt{3}+9i)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^2 - \frac{3}{x^2} = 2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Οι λύσεις της $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ είναι $x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$. Άρα $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$.

Επομένως οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι: $z_1 = \sqrt{3} + i$ ή $z_2 = -\sqrt{3} - i$

Άσκηση 6

Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **και** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **να δείξετε ότι ο** $z_1 = (az^2 + \beta z) \cdot (\beta z^2 + az)$ **είναι πραγματικός.**

Λύση

$$\text{Είναι } z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{z}$$

$$\text{Άρα, } z_1 = (\alpha\bar{z} + \beta z) \cdot (\beta\bar{z} + \alpha z) = \alpha\beta\bar{z}^2 + \alpha^2 \cdot z\bar{z} + \beta^2 \cdot z\bar{z} + \alpha\beta z^2 = \alpha\beta(\bar{z}^2 + z^2) + z\bar{z}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \bar{z}^2 = (\overline{z^2}) = (\overline{z})^2 = z^2 \text{ οπότε } \bar{z}^2 + z^2 = z + \bar{z}$$

$$\text{Αν } z = x + yi \text{ τότε } z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R} \text{ ενώ } z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Επειδή και $\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}$ από την (1) προκύπτει ότι ο z_1 ανήκει στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο αν ισχύει $z^3 \geq 1$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έστω } z = x + yi. \text{ Τότε } z^3 &= (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = \\ &= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i \end{aligned}$$

Επειδή $z^3 \geq 1$ απαιτούμε $z^3 \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Όπου τίθεται θέμα διάταξης γίνεται παραπομπή στο $\mathbb{R}$ αφού στο $\mathbb{C}$ δεν έχει νόημα η διάταξη.

$$\text{Για να ισχύει } z^3 \in \mathbb{R} \text{ πρέπει } 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } 3x^2 - y^2 = 0.$$

i. Αν $y = 0$ τότε $z^3 = x^3$ και επειδή $z^3 \geq 1$ πρέπει $x^3 \geq 1$, άρα $x \geq 1$.

Άρα σ' αυτήν την περίπτωση ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία $y = 0$ με $x \geq 1$.

ii. Αν $3x^2 - y^2 = 0$ τότε $y^2 = 3x^2$ (1). Άρα $y = \sqrt{3}x$ ή $y = -\sqrt{3}x$ και επειδή $z^3 \geq 1$ πρέπει

$$x^3 - 3xy^2 \geq 1 \text{ και λόγω (1) } x^3 - 9x^3 \geq 1. \text{ Άρα } -8x^3 \geq 1, \text{ άρα } x \leq -\frac{1}{2}.$$

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός τόπος είναι οι ημιευθείες $y = \sqrt{3}x$ με $x \leq -\frac{1}{2}$ και

$$y = -\sqrt{3}x \text{ με } x \leq -\frac{1}{2}.$$

Άσκηση 8

Θεωρούμε το μιγαδικό $\omega = \frac{z}{z+2}$ όπου $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

α. Να γράψετε τον ω στη μορφή $\alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία
i. ο ω είναι φανταστικός, ii. ο ω είναι πραγματικός

Λύση

α. Για να γράψουμε τον ω στη μορφή $\alpha + \beta i$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγή του παρονομαστή. Πρέπει $z \neq -2$ δηλαδή με $z = x + yi$ είναι $x \neq -2$ ή $y \neq 0$.

$$\text{Έχουμε: } \omega = \frac{z}{z+2} = \frac{x+yi}{x+2+yi} = \frac{(x+yi)[(x+2)-yi]}{(x+2+yi)(x+2-yi)} = \frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+2)^2+y^2}i$$

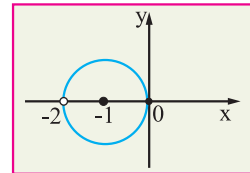
β.ι. Ο ω είναι φανταστικός αν $\operatorname{Re}(\omega) = 0$.

$$\text{Είναι } \operatorname{Re}(\omega) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα, ο ω είναι φανταστικός όταν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο

$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ με κέντρο } (-1, 0) \text{ και ακτίνα } 1, \text{ από τον οποίο}$$

εξαιρείται το σημείο $(-2, 0)$, διότι, αν $x = -2$ και $y = 0$ είναι $z = -2$.



ii. Ο ω είναι πραγματικός αν $\operatorname{Im}(\omega) = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ δηλαδή η εικόνα M του μιγαδικού z ανήκει στην ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) με εξαίρεση το σημείο $(-2, 0)$.

Άσκηση 9

Έστω το πολυώνυμο $P(z) = a_v z^v + a_{v-1} z^{v-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Να δείξετε ότι αν το $P(z)$ έχει ρίζα το z_0 τότε έχει ρίζα και το συζυγή του, δηλαδή τον $\bar{z}_0$.

Λύση

Επειδή ο z_0 είναι ρίζα του $P(z)$ ισχύει $P(z_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε } P(\bar{z}_0) = a_v \overline{z_0^v} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = \overline{a_v z_0^v + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0.$$

Άρα ο $\bar{z}_0$ είναι ρίζα του $P(z)$.

Άσκηση 10

Έστω το τριώνυμο $P(z) = az^2 + \beta z + \gamma$ με $a \neq 0$, διακρίνουσα $\Delta < 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ενώ ο $z \in \mathbb{C}$. Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της $P(z) = 0$:

α. Να δείξετε ότι $(z_1 + z_2) \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι $(z_1^v + z_2^v)$ με $v \in \mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Με $A(z_1), B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι $d(A, B) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|a|}$.

δ. Αν $\Gamma(z_1 + z_2)$ η εικόνα του $z_1 + z_2$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$E_{(AB\Gamma)} = \frac{|\beta| \sqrt{|\Delta|}}{4a^2}.$$

Λύση

α. Τρόπος 1: $z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{a}$ που ανήκει στο $\mathbb{R}$ από υπόθεση

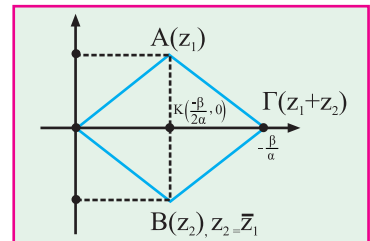
Τρόπος 2: Οι z_1, z_2 είναι συζυγείς (δηλαδή $\bar{z}_1 = z_2$) άρα $z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1)$

$$\beta. z_1^v + z_2^v = z_1^v + \overline{z_1^v} = z_1^v + z_1^v = 2 \operatorname{Re}(z_1^v) \in \mathbb{R}$$

$$\gamma. z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \text{ άρα } A = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \text{ και}$$

$$B = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \text{ συνεπώς}$$

$$d(A, B) = \left| \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} - \left(\frac{-\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \right| = \left| \frac{2\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right| = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$$



$$\delta. z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ οπότε είναι } E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2} AB \cdot K\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|} \left| -\frac{\beta}{2\alpha} \right| = \frac{|\beta| \sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

Α. Έστω $z = \alpha + \beta i$ τότε ισχύουν

i. $z + \bar{z} = 2\beta i$

ii. $z - \bar{z} = 2\alpha$

iii. $(\overline{\bar{z}}) = z$

iv. $(\alpha + \beta i)^2 = -i(\beta - \alpha i)^2$

v. $(\alpha + \beta i)^2 = \overline{(\alpha - \beta i)^2}$

Β. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z + 2i = 5 + \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $z = 5$ και $\lambda = -2$

Γ. i. $i^{2003} = i$

ii. $\frac{i^3}{i} = 1$

iii. $\frac{i^{22} + 1}{i^v} = 0$

(Απ: Α. i. Λ, ii. Λ, iii. Σ, iv. Λ, v. Σ, Β. Λ, Γ. i. Λ, ii. Λ, iii. Σ)

2. Ο μιγαδικός $z = \frac{2-i}{1+2i}$ είναι ίσος με:

α. $2i$

β. i

γ. $-i$

δ. $-2i$

ε. $3i$

(Απ: γ.)

3. Οι εικόνες των z , $-\bar{z}$, $\bar{z}$, $-z$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές

α. τετραγώνου

β. ρόμβου

γ. τραπεζίου

δ. ορθογωνίου

(Απ: δ.)

4. Να γράψετε σε κανονική μορφή τους μιγαδικούς.

α. $\frac{5-2i}{1-2i}$

β. $\frac{2+3i}{4+i}$

γ. $\frac{3i}{i-7}$

(Απ: α. $\frac{9}{5} + \frac{8}{5}i$, β. $\frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$, γ. $\frac{3}{50} - \frac{21}{50}i$)

5. Αν $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 3 - 2i$ να βρείτε τους μιγαδικούς:

i. $z_1 + z_2$ ii. $z_1 \cdot z_2$ iii. $\frac{z_1}{z_2}$ iv. $\frac{z_1^2}{z_2^2}$
 (Απ: i. $5 - i$, ii. $8 - i$, iii. $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$, iv. $\frac{-33}{169} + \frac{56}{169}i$)

6. Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι μιγαδικοί $z = -3 + (2\alpha - \beta)i$ και $w = \alpha - 5\beta - 3i$ να είναι συζυγείς.

(Απ: $\alpha = 2$, $\beta = 1$)

7. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z^2 = \bar{z}^2$ να δείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$ ή $z \in \mathbb{R}$.

8. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(i - \alpha)^2 - (i + \alpha)^2 + \beta + 1 = \frac{1}{i}$.
 (Απ: $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = -1$)

9. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 + z_2 \neq 0$ και $z = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$. Να δείξετε ότι $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$.

10. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:

i. $z^2 - 2z + 2 = 0$ ii. $4z^2 + 4z + 5 = 0$ iii. $2z + \bar{z} - 1 = 0$ iv. $2z + 1 = 3\bar{z}$

(Απ: i. $z_2 = 1 - i$ ii. $z_2 = -\frac{1}{2} - i$ iii. $z = \frac{1}{3} + 0i$ iv. $z_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{35}4}{i}$ και $z_4 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{35}}{4}i$)

11. Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{1 - z_1}{1 - \bar{z}_1}$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να βρεθούν οι z_1 και z_2 ώστε $z_1 - z_2$ και z_2^2 να είναι πραγματικοί.

(Απ: $\beta = 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = \pm\sqrt{3}$)

12. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z = 5\sin\varphi + 3i\eta\mu\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(Απ: Έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$)

13. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 2$. Αν $w = \frac{z - 4i}{z - 2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $w \in \mathbb{R}$.

(Απ: $2x + y = 4$ εκτός του $(2, 0)$)

14. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z = x + yi$ αν $z\bar{z} - (z^2 + \bar{z}^2) + 1 = 0$.

$$(\text{Απ: Υπερβολή } x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1)$$

15. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq i$. Αν ο αριθμός $w = \frac{z}{z^2 + 1}$ είναι φανταστικός. Να βρεθεί ο γ. τόπος του z .
(Απ: ο άξονας $y'y$, εκτός των σημείων $(0, 1)$ και $(0, -1)$)

16. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = (1 + 2i)^k + 1 - i$, $k \in \mathbb{R}$ και $M(z)$ η εικόνα του z
i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$
ii. Να βρεθεί το k ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

$$(\text{Απ: } \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) \text{ και } k = \frac{1}{5})$$

17. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $w = \frac{z + 8i}{z + 6}$ και $\operatorname{Re}(w) = 0$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος που περνά από την αρχή των αξόνων.

18. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει: $z^2 - 1 \geq 0$.
(Απ: $z \in \mathbb{R}$, $z \leq -1$ ή $z \geq 1$)

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

- A. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z = e^{i\theta} + i \frac{1}{\sin \theta}$ όπου $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z .

- B. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 = z_2 + \frac{1}{z_2}$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho \neq 1$ τότε να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z_1 ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

- Γ. Αν $z^3 = 1$ και $z \notin \mathbb{R}$ τότε

α. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z .

β. Να δείξετε ότι $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 4$

γ. Να δείξετε ότι $(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^5) = 9$

(Απ.: A. Το τμήμα της ισοσκελούς υπερβολής $y^2 - x^2 = 1$ πάνω από τον $x'x$,

$$\text{B. } \frac{x^2}{\left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho}\right)^2} = 1, E'(-2, 0), E(2, 0), \text{ Γ. } z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2})$$

Μύθημα 2

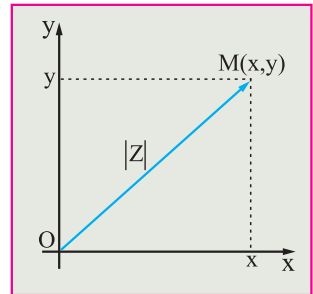
Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $M(z)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού z την απόσταση του $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων και συμβολίζουμε $|z| = (OM) = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

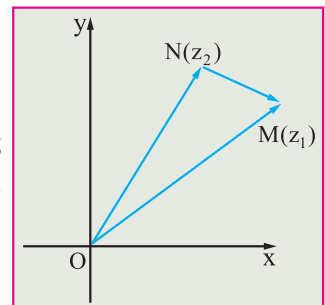


Ιδιότητες του μέτρου

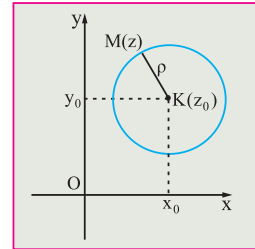
- Έστω $z = x + yi$ τότε $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Για κάθε μιγαδικό $z = x + yi$ ισχύει $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και γενικότερα
 $|z_1 \cdot z_2 \dots z_v| = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_v|$ και $|z^v| = |z|^v \quad v \in \mathbb{N}^*$
- Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ τότε $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
- Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ανισότητα)

- Για τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 , ισχύει ακόμα

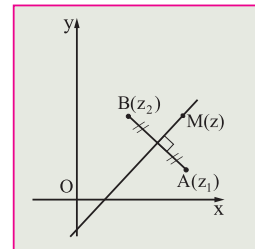
$\overline{OM} - \overline{ON} = \overline{NM}$ ή $|\overline{MN}| = |z_1 - z_2|$ δηλαδή το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.



- Έστω ο μιγαδικός $z_0 = x_0 + y_0i$ και ένας θετικός πραγματικός ρ . Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $K(x_0, y_0)$ του z_0 και ακτίνα ρ .



- Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 . Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις όπου ζητείται το μέτρο ενός μιγαδικού ή το μέτρο μιας παράστασης μιγαδικών αριθμών.

- Φέρνουμε τον μιγαδικό αριθμό ή την παράσταση στην κανονική μορφή $x + yi$ οπότε υπολογίζουμε εύκολα το μέτρο που είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$
- Όταν η παράσταση προσφέρεται εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του μέτρου.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: i. $z_1 = \frac{4+3i}{4-3i}$ ii. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Λύση**α' τρόπος**

$$\text{i. } z_1 = \frac{4+3i}{4-3i} = \frac{(4+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{16-9+24i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i.$$

$$\text{Οπότε } |z_1| = \sqrt{\frac{7^2}{25^2} + \frac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{49+576}{625}} = 1$$

β' τρόπος

$$|z_1| = \left| \frac{4+3i}{4-3i} \right| = 1, \text{ (Αφού } |4+3i| = |\overline{4+3i}| = |4-3i| \text{)}$$

$$\text{ii. } |z_2| = \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^v \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right|^v = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \right)^v = 1^v = 1$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις όπου ζητείται να λυθούν εξισώσεις ή ανισώσεις που περιέχουν μέτρα μιγαδικών.

α. Θέτουμε $z = x + yi$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου και οδηγούμαστε έτσι σε άρρητες εξισώσεις με άγνωστους τους $x, y \in \mathbb{R}$ τους οποίους και προσδιορίζουμε.

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο κατά μέλη κάνοντας χρήση της ιδιότητας $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ή γενικότερα $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

γ. Μπορούμε να λύσουμε γεωμετρικά τις εξισώσεις - ανισώσεις λαμβάνοντας υπόψη μας την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου.

Παράδειγμα 2

Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία στα επόμενα:

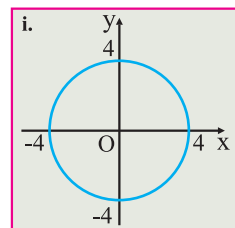
i. $|\bar{z}| = 4$ ii. $|4z + 8i + 4| = 4$ iii. $2 < |z - 1 + 2i| < 3$ iv. $|z - 2| = |z - 3i|$

Λύση

i. Έστω $z = x + yi$ και επειδή $|\bar{z}| = 4$ έχουμε:

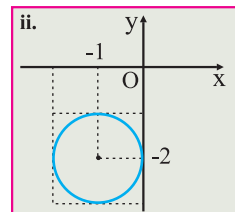
$$|x - yi| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2.$$

Άρα το σημείο $M(z)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$



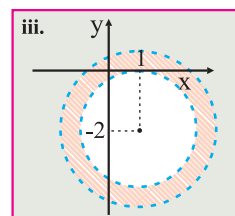
ii. Είναι $|4z + 8i + 4| = 4 \Leftrightarrow |z - (-1 - 2i)| = 1$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, -2)$ και $\rho = 1$



iii. Έχουμε $|z - (1 - 2i)| > 2$ και $|z - (1 - 2i)| < 3$ (2)

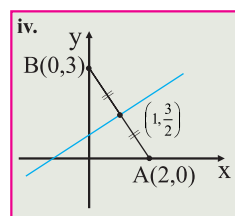
Η ανίσωση (1) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται έξω από τον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 2. Η ανίσωση (2) παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα 3. Άρα η δοθείσα ανίσωση παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στο εσωτερικό του δακτυλίου που ορίζουν αυτοί οι ομόκεντροι κύκλοι.



iv. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει την μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,3)$. Για να βρούμε την εξίσωση της θέτουμε $z = x + yi$ οπότε:

$$|z - 2| = |z - 3i| \Leftrightarrow |x - 2 + yi| = |x + (y - 3)i|$$

$$|(x - 2) + yi|^2 = |x + (y - 3)i|^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6y \Leftrightarrow -4x + 6y = 5$$



Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου ζητείται να αποδειχτεί μια ισότητα ή ανισότητα μέτρων με ή χωρίς συνθήκες.

α. Θέτουμε $z = x + yi$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου.

β. Υψώνουμε στο τετράγωνο εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ή $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$.

Σημείωση: Όταν μας δίνεται ως συνθήκη $|f(z)| = 1$ όπου $z \in \mathbb{C}$ τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |f(z)|^2 = 1 \Leftrightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = 1 \text{ οπότε } f(z) = \frac{1}{\overline{f(z)}} \text{ ή } \overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}.$$

(Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 1)

Τα πιο πάνω ισχύουν και γενικότερα αν $|f(z)| = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ οπότε:

$$|f(z)|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow f(z) \cdot \overline{f(z)} = \alpha^2 \text{ οπότε } f(z) = \frac{\alpha^2}{\overline{f(z)}} \text{ ή } \overline{f(z)} = \frac{\alpha^2}{f(z)}$$

(βλέπε στις λυμένες ασκήσεις την 2).

Παράδειγμα 3

Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|3z - 9| = |z - 11|$ να δείξετε ότι $|z - 2| = 3$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει: } |3z - 9| = |z - 11| &\Leftrightarrow |3z - 9|^2 = |z - 11|^2 \Leftrightarrow (3z - 9)(\overline{3z - 9}) = (z - 11)(\overline{z - 11}) \Leftrightarrow \\ &(3z - 9)(3\bar{z} - 9) = (z - 11)(\bar{z} - 11) \Leftrightarrow 9z\bar{z} - 27z - 27\bar{z} + 81 = z\bar{z} - 11z - 11\bar{z} + 121 \\ &\Leftrightarrow 8z\bar{z} - 16\bar{z} - 16z - 40 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - 2\bar{z} - 2z - 5 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε ακόμα: } |z - 2| = 3 &\Leftrightarrow |z - 2|^2 = 9 \Leftrightarrow (z - 2)(\bar{z} - 2) = 9 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \text{ που ισχύει απο (1).} \end{aligned}$$

Άρα αν $|3z - 9| = |z - 11|$ τότε $|z - 2| = 3$

Παράδειγμα 4

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και $\kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa > 0$.

$$\text{Να δείξετε ότι: } |z_1 + z_2|^2 \leq (1 + \kappa) \cdot |z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) |z_2|^2.$$

Λύση

α' τρόπος

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχουμε: } |z_1 + z_2|^2 \leq (1 + \kappa) \cdot |z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i|^2 \leq (1 + \kappa)|\alpha + \beta i|^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) |\gamma + \delta i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2 &\leq (1 + \kappa)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)(\gamma^2 + \delta^2) \Leftrightarrow \\
 \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma + \beta^2 + \delta^2 + 2\beta\delta &\leq \alpha^2 + \beta^2 + \kappa\alpha^2 + \kappa\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{\gamma^2}{\kappa} + \frac{\delta^2}{\kappa} \Leftrightarrow \\
 2\alpha\gamma + 2\beta\delta &\leq \kappa\alpha^2 + \kappa\beta^2 + \frac{\gamma^2}{\kappa} + \frac{\delta^2}{\kappa} \quad (\kappa > 0) \Leftrightarrow 2\alpha\kappa\gamma + 2\beta\kappa\delta \leq \kappa^2\alpha^2 + \kappa^2\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \Leftrightarrow \\
 (\kappa^2\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\kappa\gamma) + (\kappa^2\beta^2 + \delta^2 - 2\beta\kappa\delta) &\geq 0 \Leftrightarrow (\kappa\alpha - \gamma)^2 + (\kappa\beta - \delta)^2 \geq 0 \text{ που αληθεύει}
 \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\text{Επειδή } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ αρκεί να δείξουμε ότι: } (|z_1| + |z_2|)^2 \leq (1 + \kappa)|z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)|z_2|^2 \quad (1)$$

$$\text{Πράγματι η (1) γίνεται } |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \leq |z_1|^2 + \kappa|z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{\kappa}|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\kappa|z_1||z_2| \geq 0 \Leftrightarrow (\kappa|z_1| - |z_2|)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις όπου ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μέτρου $|f(z)|$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα ή τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου μιγαδικού. $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Παράδειγμα 5

Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και $\omega = 3 + 4i$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z + \omega|$.

Λύση

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ έχει κέντρο το $O(0,0)$ και $\rho = 1$. Αφού το $M(z)$ ανήκει στον κύκλο ισχύει $|z| = 1$. Επίσης $|\omega| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left||z| - |\omega|\right| \leq |z + \omega| \leq |z| + |\omega| \quad \text{ή} \quad |1 - 5| \leq |z + \omega| \leq 1 + 5 \quad \text{ή} \quad 4 \leq |z + \omega| \leq 6$$

Άρα η μέγιστη τιμή του $|z + \omega|$ είναι 6, ενώ η ελάχιστη 4.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν $|z - 3| \leq 1$ (1)

Λύση

$$\text{Είναι } |z| = \left|(z - 3) + 3\right| \stackrel{(1)}{\leq} |z - 3| + 3 \leq 1 + 3 = 4.$$

$$\text{Επίσης: } |z| = \left|(z - 3) + 3\right| \stackrel{(1)}{\geq} \left||z - 3| - |3|\right| \geq |1 - 3| = 2 \quad \text{Άρα: } 2 \leq |z| \leq 4$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ισχύει: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ να δείξετε ότι:

α. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$

β. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1.

γ. $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

δ. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

Λύση

α. Όταν $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (1) οπότε:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \text{ λόγω της (1).}$$

β. Για να δείξουμε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου αρκεί να

δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 - z_3$ οπότε

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - (-z_1 - z_3)| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3| \Leftrightarrow$$

$$|2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(\overline{2z_1 + z_3}) = (z_1 + 2z_3)(\overline{z_1 + 2z_3})$$

$$\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3) \Leftrightarrow$$

$$4z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_1 + 4z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2 + 4|z_3|^2 \Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3| \text{ που ισχύει.}$$

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Ομοίως αποδεικνύουμε και τις άλλες ισότητες οπότε το τρίγωνο που

σχηματίζουν οι εικόνες M_1, M_2, M_3 των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα είναι ισόπλευρο.

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ το $M_1 M_2 M_3$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$.

γ. Από την σχέση (α) έχουμε:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} = 0 \Leftrightarrow z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2 = 0 \quad (2)$$

δ. Επειδή $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ τότε και

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1 z_2 + 2z_2 z_3 + 2z_1 z_3 = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Επειδή $z_1 + z_3 = -z_2$, έχουμε: $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2(z_1 + z_3) + z_1 z_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$z_2(-z_2) + z_1 z_3 = 0 \Leftrightarrow -z_2^2 + z_1 z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2^2 = z_1 z_3 \Leftrightarrow z_2^2 \cdot z_2 = z_1 z_2 z_3 \Leftrightarrow z_2^3 = z_1 z_2 z_3$$

Όμοια δείχνουμε ότι $z_1^3 = z_1 z_2 z_3$ και $z_3^3 = z_1 z_2 z_3$. Άρα $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$.

Άσκηση 2

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w με

$$w = \frac{z - \alpha}{z + \alpha} \text{ είναι φανταστικός.}$$

Λύση

Για να δείξουμε ότι $w \in i\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι $w = -\bar{w}$

$$\text{Είναι: } \bar{w} = \overline{\left(\frac{z - \alpha}{z + \alpha}\right)} = \frac{\overline{z - \alpha}}{\overline{z + \alpha}} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\bar{z} + \bar{\alpha}} = \frac{\bar{z} - \alpha}{\bar{z} + \alpha} \quad (1) \text{ διότι } \bar{\alpha} = \alpha \text{ αφού } \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Επίσης $|z| = \alpha \Leftrightarrow |z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$ οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\bar{w} = \frac{\frac{\alpha^2}{z} - \alpha}{\frac{\alpha^2}{z} + \alpha} = \frac{\frac{\alpha^2 - \alpha z}{z}}{\frac{\alpha^2 + \alpha z}{z}} = \frac{\alpha(\alpha - z)}{\alpha(\alpha + z)} = \frac{\alpha - z}{\alpha + z} = -\frac{z - \alpha}{z + \alpha} = -w. \text{ Δηλαδή } \bar{w} = -w \Leftrightarrow w \text{ φανταστικός.}$$

Άσκηση 3

Αν ισχύει ότι $\left|\frac{z + |z|}{2}\right| + \left|\frac{z - |z|}{2}\right| = |z|$ τότε ο z είναι πραγματικός.

Λύση

(Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε)

$$(z + |z|)(\bar{z} + |z|) + (z - |z|)(\bar{z} - |z|) + 2|z^2 - |z|^2| = 4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} + z|z| + \bar{z}|z| + |z|^2 + z\bar{z} - z|z| - \bar{z}|z| + |z|^2 + 2|z^2 - |z|^2| = 4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 + |z|^2 + |z|^2 + |z|^2 + 2|z^2 - |z|^2| = 4|z|^2 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 2|z^2 - |z|^2| = 4|z|^2 \Leftrightarrow$$

$$2|z^2 - |z|^2| = 0 \Leftrightarrow z^2 - |z|^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = \bar{z} \end{cases}$$

Άρα $z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $|z|^2 - 2iz + 2\alpha(1+i) = 0$ όπου $\alpha \geq 0$.

Λύση

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } |z|^2 - 2iz + 2\alpha(1+i) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 - 2i(x + yi) + 2\alpha(1+i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha) + 2(\alpha - x)i = 0 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha = 0 \\ 2(\alpha - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + 2\alpha + \alpha^2 = 0 \\ x = \alpha \end{cases}$$

$$\text{Επειδή } y \in \mathbb{R} \text{ πρέπει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 - \sqrt{2} \leq \alpha \leq -1 + \sqrt{2} \text{ και επειδή } \alpha \geq 0 \text{ είναι } 0 \leq \alpha \leq -1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Έτσι } y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha + 1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha + 1}.$$

Άρα οι λύσεις τις εξισώσεις είναι

$$z_1 = \alpha + (-1 + \sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha + 1})i \text{ και}$$

$$z_2 = \alpha + (-1 - \sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha + 1})i$$

με την προϋπόθεση $0 \leq \alpha \leq -1 + \sqrt{2}$.

α	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$\alpha^2+2\alpha-1$	+	0	0	+

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε τα σημεία $M(z)$ του επιπέδου όταν ο αριθμός z ικανοποιεί τη σχέση

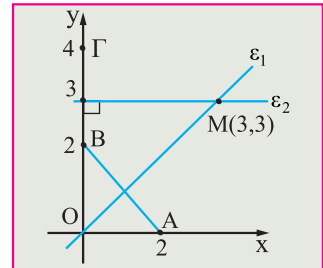
$$|z - 4i| = |z - 2| = |z - 2i|$$

Λύση

Εφ' όσον ο z ικανοποιεί την ισότητα $|z - 2| = |z - 2i|$ το $M(z)$ θα βρίσκεται στην μεσοκάθετη του τμήματος AB όπου $A(2,0)$ και $B(0,2)$, δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_1: y = x$ (1).

Εφ'όσον ο z ικανοποιεί τη σχέση $|z - 4i| = |z - 2i|$ το $M(z)$ θα βρίσκεται στη μεσοκάθετη του τμήματος $B\Gamma$ όπου $B(0,2)$ και $\Gamma(0,4)$, δηλαδή επί της ευθείας $\varepsilon_2 : y = 3$ (2).

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) δηλαδή $\begin{cases} y = x \\ y = 3 \end{cases}$ και βρίσκουμε ότι το $M(z)$ είναι το $(3,3)$ και είναι μοναδικό.



Άσκηση 6

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $|z_1 + \bar{z}_2| = |\bar{z}_1 - z_2|$ να δείξετε ότι ο $z_1 \cdot z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

Λύση

Επειδή $|z_1 + \bar{z}_2| = |\bar{z}_1 - z_2|$ έχουμε $|z_1 + \bar{z}_2|^2 = |\bar{z}_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$(z_1 + \bar{z}_2)(\overline{z_1 + \bar{z}_2}) = (\bar{z}_1 - z_2)(\overline{\bar{z}_1 - z_2}) \Leftrightarrow (z_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 + z_2) = (\bar{z}_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2)$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_1z_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2z_2 = z_1\bar{z}_1 - z_2z_1 - \bar{z}_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow 2z_1z_2 = -2\bar{z}_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1z_2 = -\overline{z_1z_2}.$$

Άρα $z_1z_2 \in i$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις:

$$|z| = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad |z - 1| = 2|z + 1| \quad (2)$$

Λύση

Θέτουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Από την (1) έχουμε $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$ (3).

Από την (2) έχουμε $|(x - 1) + yi| = 2|(x + 1) + yi| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4[(x + 1)^2 + y^2] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2) \text{ που λόγω της (3) γράφεται } 1 - 2x + 1 = 4(1 + 2x + 1).$$

$$\text{Άρα } x = -\frac{3}{5} \text{ οπότε } y^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow y = \frac{4}{5} \text{ ή } y = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Έτσι οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι } z_1 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \text{ ή } z_2 = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Άσκηση 8

Αν $\left|z + \frac{1}{|z|}\right| = 1$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$, ναδειχθεί ότι $|z| + \frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5}$.

Λύση

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$|z| + \frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(|z| + \frac{1}{|z|} \right)^2 \leq \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + 2|z| \frac{1}{|z|} \leq 5 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} \leq 3 \quad (1)$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (1).

$$\text{Από υπόθεση έχουμε } \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1 \text{ και επειδή } \left| z + \frac{1}{z} \right| \geq \left| |z| - \left| \frac{1}{z} \right| \right| \text{ έχουμε } 1 \geq \left(|z| - \left| \frac{1}{z} \right| \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} - 2 \Leftrightarrow 3 \geq |z|^2 + \frac{1}{|z|^2}. \text{ Επομένως η (1) ισχύει.}$$

Άσκηση 9

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_1, z_2 \neq 0$ να δειχθεί ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} > 0$.

Λύση

α' τρόπος (γεωμετρικά)

Έστω $M_1(z_1), M_2(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 , τότε:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |\overline{OM_1} + \overline{OM_2}| = |\overline{OM_1}| + |\overline{OM_2}| \Leftrightarrow$$

$$\overline{OM_1} \uparrow \overline{OM_2} \Leftrightarrow \overline{OM_1} = \kappa \overline{OM_2} \text{ με } \kappa > 0 \Leftrightarrow z_1 = \kappa z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \kappa > 0, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

β' τρόπος (αλγεβρικά)

$$\text{Είναι } |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$

$$|z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2|z_1||z_2| \quad (1)$$

Υψώνουμε τα μέλη της (1) στο τετράγωνο: $z_1^2\bar{z}_2^2 + z_2^2\bar{z}_1^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2$

$$z_1^2\bar{z}_2^2 + z_2^2\bar{z}_1^2 - 2z_1^2\bar{z}_2^2z_2^2\bar{z}_1^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}. \text{ Έστω τώρα } \frac{z_1}{z_2} = \kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = \kappa z_2 \text{ ή } \bar{z}_1 = \kappa \bar{z}_2.$$

$$\text{Η (1) γίνεται } \kappa z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \kappa \bar{z}_2 = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \kappa |z_2|^2 + \kappa |z_1|^2 = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow$$

$$\kappa(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2|z_1z_2| \Leftrightarrow \kappa = \frac{2|z_1z_2|}{|z_1|^2 + |z_2|^2}. \text{ Άρα } \kappa > 0.$$

Άσκηση 10

α. Αν $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ να δείξετε ότι $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| < 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) < 0$

β. Αν $z_1, z_2, \dots, z_v \in \mathbb{C} - \{i\}$ και ισχύει η σχέση $\left| \frac{z_1+i}{z_1-i} \right| + \left| \frac{z_2+i}{z_2-i} \right| + \dots + \left| \frac{z_v+i}{z_v-i} \right| < 1$ να δείξετε ότι $\left| \frac{(z_1+z_2+\dots+z_v)+i}{(z_1+z_2+\dots+z_v)-i} \right| < 1$.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. \left| \frac{z+i}{z-i} \right| < 1 &\Leftrightarrow |z+i| < |z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2 < |z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i) < (z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 < z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 \Leftrightarrow 0 < 2iz - 2i\bar{z} \Leftrightarrow 0 < 2i(z - \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 0 < 2i[2\text{Im}(z)]i \Leftrightarrow 0 < -4\text{Im}(z) \Leftrightarrow \text{Im}(z) < 0 \end{aligned}$$

β. Αφού $\left| \frac{z_1+i}{z_1-i} \right| + \left| \frac{z_2+i}{z_2-i} \right| + \dots + \left| \frac{z_v+i}{z_v-i} \right| < 1$ συνεπάγεται ότι

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{z_1+i}{z_1-i} \right| < 1 &\Leftrightarrow \text{Im } z_1 < 0 \\ \left| \frac{z_2+i}{z_2-i} \right| < 1 &\Leftrightarrow \text{Im } z_2 < 0 \\ \left| \frac{z_v+i}{z_v-i} \right| < 1 &\Leftrightarrow \text{Im } z_v < 0 \end{aligned} \right\} \text{ Άρα } \text{Im}(z_1) + \dots + \text{Im}(z_v) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Im}(z_1 + \dots + z_v) < 0 \Leftrightarrow \left| \frac{(z_1 + \dots + z_v) + i}{(z_1 + \dots + z_v) - i} \right| < 1 \text{ (λόγω του α. ερωτήματος)}$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις, που αφορούν τους μιγαδικούς αριθμούς z, z_1 και z_2 .

i. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, ii. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, iii. $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{z}$, iv. $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = z_2$

v. Αν $|z| = k$ και $k \neq 0$ τότε $\bar{z} = \frac{k^2}{z}$, vi. Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ τότε: α. $z_1 = z_2 = 0$ β. $|z_1| = |z_2|$,

vii. Αν $z = \sin \frac{\pi}{8} + i + \frac{\pi}{8}$ τότε $z = \frac{1}{z}$

(Απ.: v. Σ, vi. α. Λ β. Σ, vii. Σ)

2. Αν $|z| = 2$, $z \in \mathbb{C}$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών $w = z + 3$.

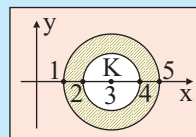
- α. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $(2,0)$ και ακτίνα 3
- β. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $(3,0)$ και ακτίνα 2.
- γ. βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $(3,0)$ και ακτίνα 3.
- δ. βρίσκονται σε ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$.

3. Οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 10| = |z + 10|$ βρίσκονται πάνω στη ευθεία.

- α. $x = 0$
- β. $y = x$
- γ. $y = 0$
- δ. $y = -x$

(Απ.: Σωστή απάντηση α)

4. Οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή (δακτύλιος ομόκεντρων κύκλων κέντρου Κ) ικανοποιούν τις σχέσεις



- α. $|z - 3| < 2$ και $|z - 3| < 1$
- β. $|z - 3| > 2$ και $|z - 3| < 1$
- γ. $|z - 3| < 2$ και $|z - 3| > 1$
- δ. $|z - 2| > 3$ και $|z - 1| < 3$

(Απ.: Σωστή απάντηση γ)

5. Να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίες.

A. $\left| \frac{x+i}{-x+i} \right| + \left| \frac{x-i}{-x-i} \right|, x \in \mathbb{R}$

1. 2

β. $\left| \frac{\left(\frac{2+2i}{i} \right)^v}{1+i} \right|$

2. $\frac{3}{5}$

Γ. $\left| \frac{(\bar{z})^6}{-z^2 \cdot (\bar{z})^4} \right|$

3. $\frac{5}{3}$

Δ. $\frac{5 \cdot z \cdot \bar{z}}{3|z|^2}$

4. 1

5. 2^v

(Απ.: $A \rightarrow 1, B \rightarrow 5, \Gamma \rightarrow 4, \Delta \rightarrow 3$)

6. Έστω $z = x + yi$, $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 2$. Αν $w = 2z - 2$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού w .

(Απ.: Η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(-2, 0)$ και ακτίνα 4)

7. Αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ και $\left| \frac{z-4}{z-1} \right| = 2$ να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο.

(Απ.: Η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα 2)

8. Αν M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 που είναι λύσεις της εξίσωσης

$|z|^2 - 5z + 6 = 0$, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα M_1 και M_2 και έχει το

κέντρο του στην ευθεία με εξίσωση $-3x - 5y + 15 = 0$.

$$\left(\text{Απ.: } \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{10}{4} \right)$$

9. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z + 1 - i| = 2$ να βρείτε:

i. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .

ii. Τους μιγαδικούς αριθμούς του γεωμετρικού τόπου με το μικρότερο και το μεγαλύτερο μέτρο.

$$(\text{Απ.: i. κύκλος } k(-1,1), \rho = 2, \text{ ii. } z_1 = (-1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})i \quad z_2 = (-1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})i)$$

10. Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ αποδείξτε ότι ο $\omega = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ (με $z_1 \cdot z_2 \neq -1$) ανήκει στο $\mathbb{R}$.

$$(\text{Υπ.: Δείξτε ότι } \bar{\omega} = \omega. \text{ Αποδείξτε και χρησιμοποιείστε ότι } \bar{z_k} = \frac{1}{z_k})$$

11. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 . Αν $z_1 = \frac{\lambda z_2 + \mu z_3}{\lambda + \mu}$ (1), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda\mu > 0$ να αποδείξετε ότι $|z_2 - z_1| + |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

$$(\text{Υπ.: Να αντικαταστήσετε στο πρώτο μέλος την (1). Θα βρείτε } \frac{|z_2 - z_3|(|\lambda| + |\mu|)}{|\lambda + \mu|}.$$

Προσέξτε ότι λ, μ ομόσημοι.)

12. Αν $z \in \mathbb{C}$ και ισχύει $|\sqrt{2}z - 3\sqrt{2}| = |z - 5|$ να αποδείξετε ότι $|z - 1| = 2\sqrt{2}$.

$$(\text{Υπ.: Ψώστε τη δοθείσα σχέση στο τετράγωνο και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα. } |w|^2 = w \cdot \bar{w}.)$$

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1 - \lambda i)^v = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$ δεν έχει λύση.

(Υπ.: Θεωρήστε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (1). Από την ισότητα των μέτρων της (1) καταλήξτε σε άτοπο.)

14. Αν $\omega = 1 + (1 - i) + (1 - i)^2 + \dots + (1 - i)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $2^{\frac{v+1}{2}} - 1 \leq |\omega| \leq 2^{\frac{v+1}{2}} + 1$

(Υπ.: Προσέξτε ότι ο ω είναι το άθροισμα $v + 1$ πρώτων όρων γεωμ. προόδου.)

15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την ισότητα $|z - 20| = 24 + |z + 20|$

$$(\text{Απ.: Κλάδος της υπερβολής } \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1 \text{ με } x < 0)$$

16. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z^2 + z = -1$ να δείξετε ότι $|z + 1| = |z| = 1$

$$(\text{Υπ.: } |z + 1| = |-z^2| = |z|^2 = 1)$$

17. Αν $|z - 2i| = 1$ και $|z - i| \leq 1$ να δείξετε ότι $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$

(Απ.: Ο μιγαδικός με μικρότερο μέτρο είναι ο $z_3 = i$ του οποίου η εικόνα είναι σημείο $\Gamma(0,1)$

σημείο τομής του τόξου $\widehat{AB}$ με τον άξονα $y'y$)

18. Να δείξετε ότι ισχύει $|z_1 - z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$(\text{Απ.: } |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}))$$

19. i. Να δείξετε ότι $z + w - z \cdot w = -1 \Leftrightarrow z + w + z \cdot w = 1$ όπου z, w μιγαδικοί με $|z| = |w| = 1$

ii. Αν θέσουμε $z_1 = z + w + kz\bar{w} + 1$ να δείξετε ότι: α. $z_1 = zw\bar{z}_2$ β. $|z_1| = |z_2|$

$$(\text{Απ.: i. } |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z}z = 1 \text{ ii. α. } \overline{w + z + kz\bar{w}} = \dots \text{ β. } |\bar{z}_1| = |zw\bar{z}_2| = \dots)$$

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A. Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ και M_1, M_2, M_3, M_4 οι εικόνες τους αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο.

α. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 // M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι: $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in i\mathbb{R}$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι συνευθειακά όταν $I_M \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right) = 0$.

δ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία οι εικόνες των $1, z, 1 + z^2$ είναι συνευθειακά σημεία.

B. Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τέσσερα σημεία A, B, C, D τα οποία είναι εικόνες των αριθμών $1, i, -1, -i$ αντιστοίχως. Έστω M το σημείο που είναι εικόνα κάποιου μιγαδικού z.

α. Να εκφράσετε συναρτήσει του z τον πραγματικό αριθμό: $p = MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD$.

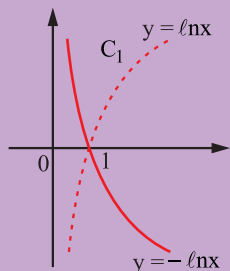
β. Υποθέτουμε ότι $p^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ με $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Να βρείτε αναγκαία και ικανή

συνθήκη ώστε να είναι: $p = 1$.

γ. Αναζητήστε τους αριθμούς που έχουν εικόνες τα σημεία M του πραγματικού άξονα που είναι λύσεις της εξίσωσης $p = 1$. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν εικόνες σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που είναι ταυτόχρονα λύσεις της εξίσωσης $p = 1$.

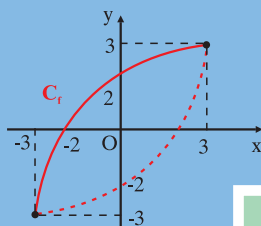
3ο μάθημα

Συναρτήσεις



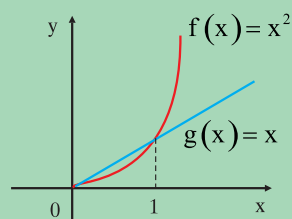
4ο μάθημα

Μονοτονία - Ακρότατα “1 – 1” Αντίστροφη Συνάρτηση



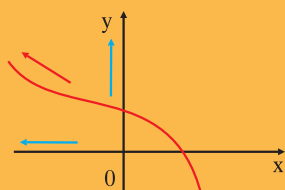
5ο μάθημα

Όριο συνάρτησης



6ο μάθημα

Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$

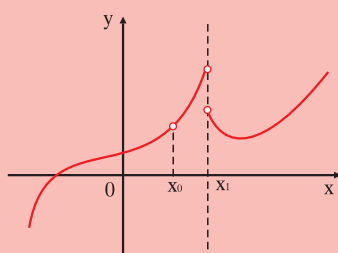


Β' Μέρος (Ανάλυση)

1ο Κεφάλαιο

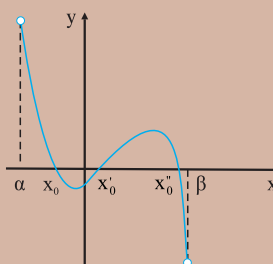
7ο μάθημα

Συνέχεια συνάρτησης



8ο μάθημα

Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα



Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του R . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία **κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σ' ένα μόνο πραγματικό αριθμό y** . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$, γράφουμε $y = f(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Στη σχέση $y = f(x)$ το γράμμα x λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή, ενώ το γράμμα y που παριστάει την τιμή της f στο x λέγεται **εξαρτημένη** μεταβλητή.
2. Στην αρχή είναι σημαντικό να εκφράζουμε λεκτικά τον κανόνα (τη συνάρτηση).

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

- Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό εκτός από το 0 στον αντίστροφό του είναι η συνάρ-

τηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Ο κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε άρρητο αριθμό το 0 και σε κάθε ρητό το 1 είναι η συνάρ-

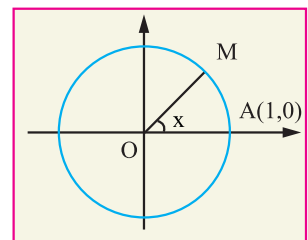
τηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

- Ο κανόνας που αντιστοιχεί κάθε αριθμό $x \in [0, 2\pi]$ στην τετμημένη του πέρατος του τόξου $\widehat{AM}$ όπως φαίνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$.

3. Επίσης είναι σημαντικό να χαρακτηρίζουμε τις μεταβλητές.

- Έτσι στην συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x$ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x και η τιμή της f στο π είναι $f(\pi) = \eta\mu\pi - \pi = -\pi$.

- Στην συνάρτηση $g(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το h ενώ το γράμμα x



είναι μια σταθερά. Κι έτσι $g(2) = \frac{(x+2)^2 - x^2}{2} = \frac{4x+4}{2} = 2x+2$

4. Μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη δεν είναι πάντα συνάρτηση.

Έτσι από τις παρακάτω σχέσεις

(1) $x^2 + y^2 = 4$, (2) $x^2 + 3y = 1$, (3) $x^2 - y^2 = 1$ μόνον η (2) είναι συνάρτηση

$y = \frac{1-x^2}{3} = f(x)$. Η (3) για παράδειγμα δεν είναι αφού για $x=2$ έχουμε $y = \sqrt{3}$ ή $y = -\sqrt{3}$.

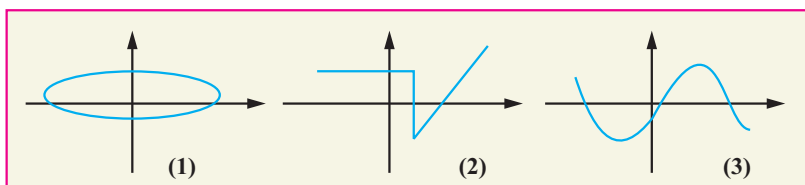
Το πεδίο ορισμού “ A_f ”

Αν η συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της, πεδίο ορισμού της θα θεωρείται συμβατικά το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους η τιμή $f(x)$ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Συμβολικά γράφουμε $A_f = \{x \in \mathbb{R} : y = f(x) \in \mathbb{R}\}$

Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση της f (C_f) με πεδίο ορισμού το A είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που αντιστοιχούν στα ζεύγη $(x, f(x))$, $x \in A$.

Από τις γραμμές των σχημάτων μόνο η (3) αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση συνάρτησης.



Συμμετρίες και παράλληλες μετατοπίσεις

1. $g(x) = -f(x)$. Είναι συμμετρική της C_f ως προς $x'x$.

2. $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & x : f(x) \geq 0 \\ -f(x), & x : f(x) < 0 \end{cases}$

Άρα η $C_{|f|}$ είναι κοινή με την C_f πάνω από τον άξονα $x'x$ και συμμετρική της C_f ως προς τον $x'x$ για τα σημεία που είναι κάτω απ' αυτόν.

3. $g(x) = f(x) + K$. προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά K μονάδες.

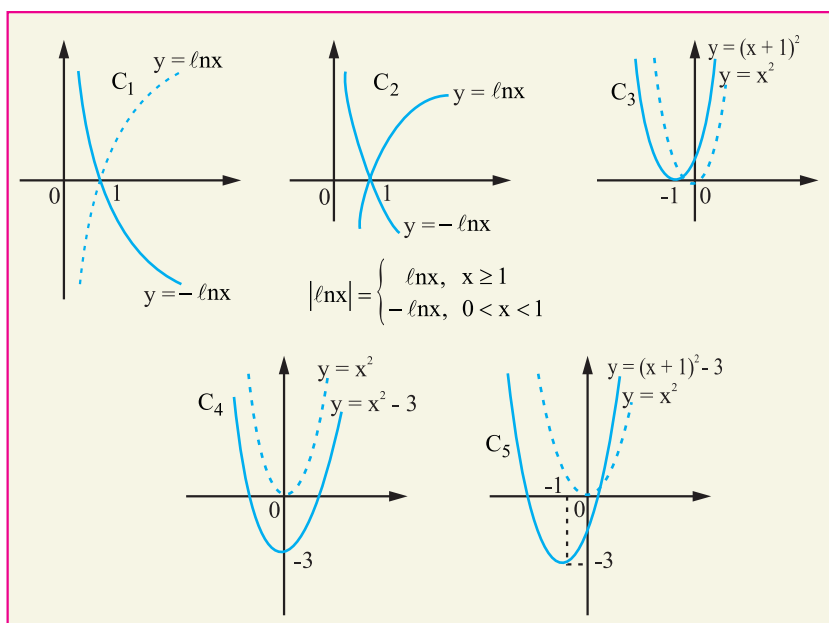
προς τα πάνω αν $K > 0$ και $|K|$ μονάδες προς τα κάτω αν $K < 0$.

4. $g(x) = f(x - x_0)$, $x_0 > 0$, προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες δεξιά και

$g(x) = f(x + x_0)$, $x_0 > 0$ προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες αριστερά.

5. $g(x) = f(x - x_0) + K$. Εδώ έχουμε συνδυασμό, οριζόντια μετατόπιση κατά x_0 και κατακόρυφη μετατόπιση κατά K μονάδες.

Παραδείγματα που αντιστοιχούν στα προηγούμενα



Σύνολο τιμών “f(A)”

Σύνολο τιμών “f(A)” είναι το σύνολο που στοιχείά του είναι οι τιμές της f για κάθε $x \in A$.

Δηλαδή $f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ για ένα τουλάχιστον } x \in A\}$

Διαβάζουμε το σύνολο τιμών περιλαμβάνει εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς y για τους οποίους υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ίσες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες όταν ισχύουν:

- i. έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A
- ii. για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = g(x)$

Σχόλιο

Μπορούμε να αναφερόμαστε σε ισότητα συναρτήσεων ακόμα και όταν είναι ίσες μόνο σ' ένα υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους (αρκεί να διευκρινίζεται).

Πράξεις με συναρτήσεις

Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα.

Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις (με τη προϋπόθεση ότι $A \cap B \neq \emptyset$)

1. **Πρόσθεση** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$
2. **Αφαίρεση** $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$
3. **Πολλαπλασιασμός** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$

4. Διαίρεση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A \cap B$ και $g(x) \neq 0$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έχουμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Η αντιστοίχιση του x γίνεται σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη ο x απεικονίζεται στο x^2

Στη δεύτερη ο x^2 (που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 0) απεικονίζεται στην τετραγωνική του ρίζα.

Έχουμε $x \xrightarrow{h(x)=x^2} x^2 \xrightarrow{g(x)=\sqrt{x}} \sqrt{x^2} = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Για την $f(x) = (\sqrt{x})^2$. Είναι

$$x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x} \xrightarrow{()^2} (\sqrt{x})^2 = x \text{ αφού } x \geq 0$$

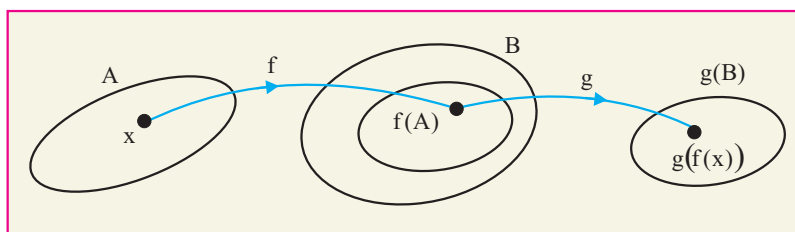
Ορίζουμε σαν σύνθεση της f με τη g που έχουν πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα την συνάρτηση $g(f(x))$ εφόσον τα πεδία ορισμού τους το επιτρέπουν. Συμβολίζουμε $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ “ $A_{g \circ f}$ ”

Ας προσέξουμε τη διαδικασία απεικόνισης κάποιου x

$$x \xrightarrow[1\text{η φάση}]{f} y = f(x) \xrightarrow[2\text{η φάση}]{g} g(y) = g(f(x))$$

Είναι φανερό από τον τρόπο που ορίζουμε την σύνθεση το πεδίο ορισμού της αρχικά θα είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που ξεκινά πρώτη τη διαδικασία απεικόνισης. Δηλαδή $A_{g \circ f} \subseteq A_f$. Για να συνεχιστεί η απεικόνιση θα πρέπει η τιμή $f(x)$ ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $f(x) \in A_g$. Αν για κάποιο x_0 , η τιμή $f(x_0) \notin A_g$ τότε το x_0 αποκλείεται από το πεδίο ορισμού της σύνθεσης. Μετά απ' αυτά είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης ορίζεται ως το σύνολο $A_{g \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\}$ με την προϋπόθεση φυσικά ότι αυτό το σύνολο είναι διάφορο του κενού.



Παρατήρηση: Για δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αποδυναμώνεται ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσής του είναι το $\mathbb{R}$.

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης απαιτούμε:

1. Οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός
2. Οι υπόριζες παραστάσεις μη αρνητικές δηλαδή αν $y = \sqrt[n]{f(x)}$ πρέπει $f(x) \geq 0$.
3. Για την $f(x) = \ln(g(x))$ απαιτούμε $g(x) > 0$.
4. Για την $f(x) = \varepsilon\varphi(\varphi(x))$ απαιτούμε $\varphi(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
5. Για την $f(x) = \sigma\varphi(h(x))$ απαιτούμε $h(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x} - \ln(5-x)$.

Λύση

Είναι $A_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$. Πρέπει $x-1 \geq 0$, $x \geq 0$ και $5-x > 0$ οπότε $A_f = [1, 5)$.

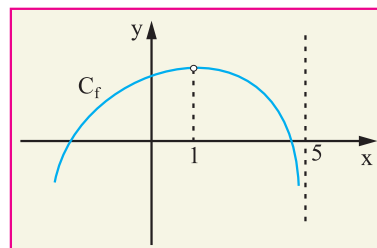
Παρατηρήσεις

- Κάποιες φορές το ενδιαφέρον μας για μια συνάρτηση περιορίζεται μόνο σ' ένα υποσύνολο Γ του πεδίου ορισμού της.
- Για συναρτήσεις πολλαπλού τύπου πεδίο ορισμού είναι η ένωση όλων των διαστημάτων που αφορούν τον κάθε τύπο της f .

$$\text{Έτσι για την } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{αν } x \in A_2 \\ f_3(x) & \text{αν } x \in A_3 \end{cases}$$

Είναι $A_f = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Θυμίζουμε ότι για να είναι καλά ορισμένη η f πρέπει $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ και $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ και $A_1 \cap A_3 = \emptyset$.

- Το πεδίο ορισμού από την C_f προκύπτει ως το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον x' αξ. Στην γραφική παράσταση που βλέπουμε είναι:
 $A_f = (-\infty, 1) \cup (1, 5)$

**Κατηγορία – Μέθοδος 2**

Εύρεση του συνόλου τιμών από τον ορισμό

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ (1)

Το σύνολο τιμών είναι οι τιμές της παραμέτρου y ώστε η (1) να έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x μέσα στο A .

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Παίρνουμε την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = y \Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma - y = 0$ (1) η οποία για να έχει λύση ως προς $x \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

$$\text{Είναι } \Delta = \beta^2 - 4a(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4a\gamma + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{-(\beta^2 - 4a\gamma)}{4a}, \text{ αφού } a > 0.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, με $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

Παρατηρήσεις

- Αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για την εύρεση του συνόλου τιμών και ούτε πλήρης. Σ'επόμενα μαθήματα θα προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών με χρήση της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης.
- Το σύνολο τιμών με την βοήθεια της C_f εμφανίζεται σαν το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον άξονα $y'y$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Γνωρίζουμε τις f, g και ζητάμε την $f \circ g$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ και $g(x) = 2\eta\mu x - 1$.

i. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της $f \circ g$.

Λύση

i. Ορισμός της σύνθεσης

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 - 2x + 3 \geq 0\}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$-x^2-2x+3$	-	$\begin{array}{c} \\ \circ \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ \circ \end{array}$	-

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι $x \in [-3, 1]$ και $A_f = [-3, 1]$.

Είναι $A_g = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $A_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1\}$

Έχουμε $-3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $A_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{3 - 2g(x) - g^2(x)} = \sqrt{3 - 2(2\eta\mu x - 1) - (2\eta\mu x - 1)^2} = \\ &= \sqrt{4 - 4\eta\mu^2 x} = 2\sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = 2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2|\sigma\upsilon\nu x|, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν γνωρίζουμε τις $f \circ g$ και g και αναζητούμε την f θέτουμε $g(x) = \omega$ και λύνουμε ως προς x .

Παράδειγμα 4

Έστω $(f \circ g)(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 15$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - 2$. Να βρεθεί η f .

Λύση

Θέτουμε $g(x) = x - 2 = \omega \Leftrightarrow x = \omega + 2$ (1). Επειδή $x \in \mathbb{R}$ και $(x - 2) \in \mathbb{R}$ οπότε $\omega \in \mathbb{R}$.

Άρα $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^3 - 6x^2 + 12x + 15$ γίνεται

$$f(\omega) = (\omega + 2)^3 - 6(\omega + 2)^2 + 12(\omega + 2) + 15 \quad \text{ή}$$

$$f(\omega) = \omega^3 + 23, \quad \omega \in \mathbb{R}, \text{ Επομένως } f(x) = x^3 + 23, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5

Έστω $f(\ln 2x) = x + 3$, $x > 0$. Να βρεθεί η f .

Λύση

Θέτουμε $\left. \begin{array}{l} \ln 2x = \omega \\ x > 0, \omega \in \mathbb{R} \end{array} \right\} 2x = e^\omega \Leftrightarrow x = \frac{e^\omega}{2}$ (1). Άρα από $f(\ln 2x) = x + 3$, έχουμε:

$$f(\omega) = \frac{e^\omega}{2} + 3 \text{ και γράφουμε } f(x) = \frac{e^x}{2} + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Όταν γνωρίζουμε τις $f \circ g$, f και αναζητούμε την g

(1) Η $f(g(x))$ με μεταβλητή το x .

(2) Η $f(g(x))$ από τον τύπο της f με μεταβλητή $g(x)$.

Εξισώνουμε τις (1), (2) λύνουμε ως προς $g(x)$.

Παράδειγμα 6

Έστω $f(g(x)) = x^4 - 3x^2 + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 4x - 5$. Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ να βρεθεί ο τύπος της.

Λύση

$$\text{Είναι } f(g(x)) = x^4 - 3x^2 + x - 2 \quad (1) \text{ και } f(g(x)) = 4g(x) - 5 \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2) έχουμε: } 4g(x) - 5 = x^4 - 3x^2 + x - 2 \Leftrightarrow g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = x^2$, $s(x) = e^x$, $p(x) = \eta \mu x$. Εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιώντας μόνο σαν πράξη τη σύνθεση.

i. $f(x) = e^{\eta \mu x}$

ii. $f(x) = \eta \mu e^x$

iii. $f(x) = \eta \mu x^2$

iv. $f(x) = \eta \mu^2 x$

v. $f(x) = \eta \mu(\eta \mu(e^x))$

vi. $f(x) = e^{2\eta \mu x}$

Λύση

i. $f = \text{sop}$

ii. $f = \text{pos}$

iii. $f = \text{pog}$

iv. $f = \text{gop}$

v. $f = \text{poposos}$

vi. $f = \text{gosop}$

Όλες οι συναρτήσεις f, s, p και οποιεσδήποτε συνθέσεις μεταξύ τους έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Μέθοδος σύνθεσης συναρτήσεων πολλαπλού τύπου:

$$\text{Έχουμε } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in B_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση της $f \circ g$ ορίζουμε όπου επιτρέπουν τα πεδία ορισμού διαδοχικά τις συναρτήσεις $f_1 \circ g_1, f_1 \circ g_2, f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_2$.

Παράδειγμα 8

Έστω $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, 3) \\ 5-x^2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$ **και** $g(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \in (-\infty, 2] \\ 7-x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$. **Να βρεθεί η $f \circ g$.**

Λύση

$$\text{Είναι } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+1, & x \in (-\infty, 3) \\ f_2(x) = 5-x^2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x+5, & x \in (-\infty, 2] \\ g_2(x) = 7-x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

• $f_1 \circ g_1$

$$A_{f_1 \circ g_1} = \{x \in A_{g_1} / g_1(x) = 2x+5 \in A_{f_1}\} =$$

$$\{x \leq 2 \text{ και } 2x+5 < 3\} = \{x \leq 2 \text{ και } x < -1\} = (-\infty, -1)$$

$$\text{Άρα } f_1(g_1(x)) = g_1(x) + 1 = 2x + 5 + 1 = 2x + 6, x < -1$$

• $f_1 \circ g_2$

$$A_{f_1 \circ g_2} = \{x \in A_{g_2} / g_2(x) \in A_{f_1}\} = \{x \in (2, +\infty) / g_2(x) = 7-x < 3\} =$$

$$\{x > 2 \text{ και } x > 4\} = (4, +\infty). \text{ Άρα } f_1(g_2(x)) = 7-x+1 = 8-x \text{ με } x > 4$$

• $f_2 \circ g_1$

$$A_{f_2 \circ g_1} = \{x \leq 2 \text{ και } 2x+5 \geq 3\} = \{x \leq 2 \text{ και } x \geq -1\} = [-1, 2]$$

$$\text{Άρα } f_2(g_1(x)) = 5 - g_1^2(x) = 5 - (2x+5)^2, x \in [-1, 2]$$

• $f_2 \circ g_2$

$$A_{f_2 \circ g_2} = \{x > 2 \text{ και } 7-x \geq 3\} = (2, 4]. \text{ Άρα } f_2(g_2(x)) = 5 - g_2^2(x) = 5 - (7-x)^2, x \in (2, 4]$$

$$\text{Άρα είναι } f(g(x)) = \begin{cases} 2x+6, & x < -1 \\ 5-(2x+5)^2, & -1 \leq x \leq 2 \\ 5-(7-x)^2, & 2 < x \leq 4 \\ 8-x, & x > 4 \end{cases}$$

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Λύση

Πρέπει $x \geq 0$ και $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [0, 1)$.

Το σύνολο τιμών $f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ με } x \in A\}$

$$\text{Έχουμε } y = \ln \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x}(e^y+1) = 1-e^y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1-e^y}{e^y+1}$$

$$\text{Επειδή } x \in [0, 1) \text{ και } 0 \leq \sqrt{x} < 1 \text{ άρα } 0 \leq \frac{1-e^y}{e^y+1} < 1$$

$$\text{Λύνουμε τις ανισώσεις } \frac{1-e^y}{e^y+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^y+1 > 0}{1-e^y \geq 0} \Leftrightarrow 1-e^y \geq 0 \Leftrightarrow e^y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 0 \text{ (1) και}$$

$$\frac{1-e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow 1-e^y < e^y+1 \Leftrightarrow 2e^y > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ (2).}$$

Από την συναλγήθεση των (1), (2) έχουμε $y \leq 0$ και $f(A) = (-\infty, 0]$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Λύση

A' τρόπος : Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = y \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 2e^x y + 1 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Θέτουμε $e^x = \omega$, $\omega > 0$ και (1) γίνεται $\omega^2 - 2y\omega + 1 = 0$ (2). Για να έχει λύση η (1) ως προς x αρκεί να έχει λύση η (2) ως προς ω είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -1$ ή $y \geq 1$ και επειδή $y > 0$ το σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$.

B' τρόπος

Γνωρίζουμε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για $x > 0$ (πράγματι $x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για $x > 0$)

Οπότε $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \stackrel{e^x = \omega}{=} \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Άρα είναι $f(x) \geq 1$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}$ (1) με $x \neq 0$

Λύση

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$. Έτσι η (1) γίνεται: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα (Σ)

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad (3) \\ -4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x} \quad (4) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε:

$$-3f(x) = x - \frac{2}{x} \Leftrightarrow -3f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2 - x^2}{3x}, x \neq 0$$

Άσκηση 4

Κατασκευάστε μια συναρτησιακή εξίσωση που να έχει λύση την $\sin x$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\sin 2x = 2\sin x \cos x - 1$ οπότε η εξίσωση $f(2x) = 2f^2(x) - 1$ έχει σαν λύση την $\sin x$.

Άσκηση 5

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f(x) \leq x$, $x \in \mathbb{R}$ (1) και $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ (2) να δείξετε ότι: α. $f(0) = 0$ και β. $f(x) = x$

Λύση

α. Από την (1) για $x = 0$ είναι $f(0) \leq 0$.

Από την (2) για $x = y = 0$ είναι $f(0) \leq 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0$. Άρα τελικά $f(0) = 0$ (3)

β. Έχουμε $f(x) \leq x$ (1) οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq x$.

Στην (2) θέτουμε όπου y το $-x$ και έχουμε $f(0) \leq f(x) + f(-x)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow -f(-x) \leq f(x) \quad (4)$$

Στην (1) θέτουμε όπου x το $-x$ και έχουμε $f(-x) \leq -x \Leftrightarrow -f(-x) \geq x$ (5)

Από τις (4), (5) έχουμε $f(x) \geq x$ (6). Από τις (1), (6) προκύπτει τελικά ότι $f(x) = x$.

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους:

$$\alpha. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ και } g(x) = x + 3, \beta. f(x) = \ln(x^2 - 9) \text{ και } g(x) = \ln(x - 3) + \ln(x + 3)$$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι ίσες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$ και $g(x) = \frac{x+5}{x-5}$ αντίστοιχα. Να

ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $\frac{f}{g}$ και να λύσετε την ανίσωση $(f + g)(x) \leq \frac{26}{x^2 - 25}$.

3. Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ και $g(x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ είναι ίσες. Είναι η συνάρτηση f περιττή; (Απ.: Είναι $A_f = A_g = \mathbb{R}$. Θεωρείστε τη διαφορά $f(x) - g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις είναι ίσες)

4. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

- Οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ είναι ίσες.
- Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι άρτια.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x^4$ έχει άξονα συμμετρίας τον y' .
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ δεν τέμνει τον άξονα y' .

5. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \sqrt{|x| - 2x} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{2x+1}{|x|+x} \quad \text{iii. } f(x) = \ln\left(\frac{1-|x|}{|x|-2}\right) \quad \text{iv. } f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^3+x-10}}$$

$$(\text{Απ.: i. } D_f = (-\infty, 0] \quad \text{ii. } D_f = (0, +\infty) \quad \text{iii. } D_f = (-2, -1) \cup (1, 2) \quad \text{iv. } D_f = (2, +\infty))$$

6. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = |\eta\mu x| \quad \text{ii. } f(x) = \eta\mu|x| \quad \text{iii. } f(x) = 2x + \frac{|x-1|}{x-1} \quad \text{iv. } f(x) = |x| \cdot x^2$$

7. Ένα κουτί από χρυσάφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τετραγωνική βάση πλευράς x και όγκο 324cm^3 . Το υλικό τις βάσεις κοστίζει 2€/cm^2 ενώ των άλλων εδρών 1€/cm^2 . Να εκφράσετε το συνολικό κόστος κατασκευής του κουτιού συναρτήσει του x .

$$(\text{Απ.: } f(x) = 3x^2 + \frac{1296}{x}, x > 0)$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \sqrt{4-|x|}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f + g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$.

9. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f , αν:

$$\alpha. f(x) = 2x + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu x$$

$$\beta. f(x) = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$\gamma. f(x) = |x| \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$10. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 2 \\ x + 1, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{αν } x < 3 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}.$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

$$11. \text{ Αν το πεδίο ορισμού της } f \text{ είναι το } [-11, 1] \text{ τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της } f(x^2 - 7x + 1). \text{ (Απ.: } [0, 3] \cup [4, 7])$$

$$12. \text{ Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f \text{ είναι το } [1, 6], \text{ τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } g(x) = f(5 + 2\eta\mu x).$$

$$13. \text{ Έστω συνάρτηση } f \text{ για την οποία ισχύει } f(x - 1) = x^2 - 7x + 12, x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

$$14. \text{ Να βρεθεί συνάρτηση } f \text{ για την οποία ισχύει: } xf(x) + f(-x) = x \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

$$(\text{Απ.: Βλέπε την λυμένη άσκηση 3. Θέτουμε όπου } x \text{ το } -x. \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R})$$

$$15. \text{ Αν } f(x + \lambda) \leq x \leq f(x) + \lambda \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \text{ σταθερό αριθμό να δείξετε ότι } f(x) = x - \lambda.$$

$$(\text{Υπ.: Αξιοποιώντας την υπόθεση, να αποδείξετε ότι } f(x) \geq x - \lambda)$$

$$16. \alpha. \text{ Να δείξετε ότι } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ για τα } x > 0.$$

$$\beta. \text{ Έστω } f(x) = (9 + \sqrt{80})^x + (9 - \sqrt{80})^x. \text{ i. Να δείξετε ότι η } f \text{ είναι άρτια,}$$

$$\text{ii. Να δείξετε ότι } f(x) \geq 2. (\text{Απ.: } \beta. \text{ii. Είναι } (9 - \sqrt{80})^x = \frac{1}{(9 + \sqrt{80})^x} \text{ και αξιοποιείστε το } \alpha)$$

$$17. \text{ Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της } f(x) = |\ln|x|| \text{ να υπολογίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης } f(x) = 10^{-6}. (\text{Απ.: Τέσσερις})$$

$$18. \text{ Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση } f^2(x) + f(x) + 1 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. (\text{Απ.: Είναι } \Delta < 0 \text{ άρα δεν έχει λύση η εξίσωση})$$

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού A , τέτοιες ώστε $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in A$.

$$\text{i. Αν ισχύει } \frac{f^4(x)}{\alpha} + \frac{g^4(x)}{\beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha + \beta \neq 0 \text{ να δείξετε ότι}$$

$$\frac{f^8(x)}{\alpha^3} + \frac{g^8(x)}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha + \beta)^3}. \text{ ii. Να αποδείξετε ότι } |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$



Μονοτονία - Ακρότατα - “1 – 1” Αντίστροφη Συνάρτηση

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται:

Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Οι γνησίως αύξουσες και οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις γενικά λέγονται **γνησίως μονότονες**.

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα) και δεν αναφέρεται το διάστημα, θα εννοούμε ότι είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Αποδεικνύεται ότι η μονοτονία των συναρτήσεων ακολουθεί κάποιους κανόνες όσον αφορά τις πράξεις και τη σύνθεση μεταξύ των συναρτήσεων.

Έτσι, για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σ' ένα διάστημα Δ και $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Ακρότατα συνάρτησης

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα**. Είναι φανερό ότι μία συνάρτηση μπορεί να μην έχει ακρότατα.

Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα, τα άκρα του είναι τα ακρότατα της συνάρτησης

Συνάρτηση 1-1

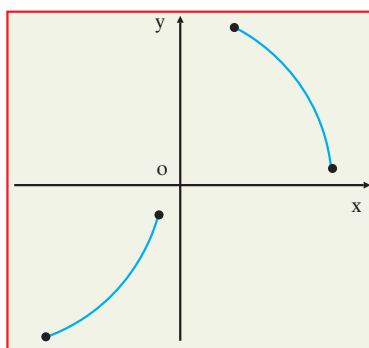
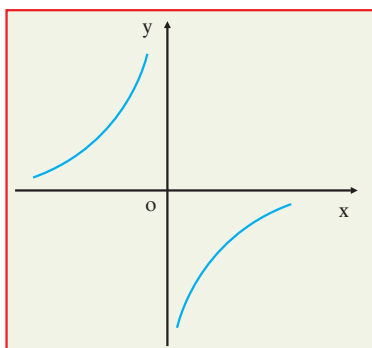
Μια συνάρτηση λέγεται **1-1 (ένα προς ένα)** στο πεδίο ορισμού της αν όταν και μόνον όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 \neq x_2$ έπεται $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Συνέπεια του ορισμού είναι η πρόταση:

Μια συνάρτηση είναι **1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει: $x_1 = x_2$

Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε σε κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο x του πεδίου ορισμού της. Γραφικά αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x' , δηλαδή της μορφής $y = a$, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ συμπεραίνουμε ότι είναι και 1-1 στο Δ (επειδή λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς μια φορά).



Το αντίστροφο δεν ισχύει, για παράδειγμα οι παραπάνω συναρτήσεις είναι 1 - 1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τις γραφικές τους παραστάσεις το πολύ σε ένα σημείο και όμως δεν είναι γνησίως μονότονες.

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών $f(A)$ η οποία είναι 1-1 στο A .

Ορίζεται τότε η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού $f(A)$ και σύνολο τιμών A και ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Η f^{-1} λέγεται **αντίστροφη** συνάρτηση της f .

Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίζεται η αντίστροφη μιας συνάρτησης f , έχουμε ότι:

- i. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , και
- ii. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f .
- iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας.

Η σύνθεση δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Έτσι, αν f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών $f(A)$ ισχύουν:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ για κάθε } x \in A \quad f(f^{-1}(y)) = y, \text{ για κάθε } y \in f(A)$$

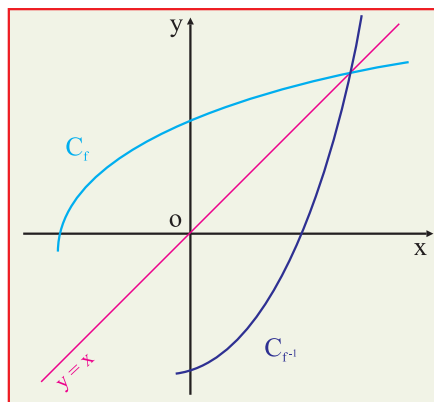
Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Αποτέλεσμα αυτού, είναι ότι οι εξισώσεις :

$$f(x) = f^{-1}(x), f(x) = x \quad \text{ή} \quad (f^{-1}(x) = x) \quad \text{είναι}$$

ισοδύναμες στο σύνολο $A \cap f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού της f μόνο όταν η f (ή f^{-1}) είναι γνησίως αύξουσα. (Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις, άσκηση 9)

Αν γνωρίζουμε δε, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.



Σχόλιο: Μια συνάρτηση μπορεί να μην αντιστρέφεται στο πεδίο ορισμού της αλλά σε ένα υποσύνολο του π.χ. $f(x) = x^2$ δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ (όχι 1 – 1) όμως αντιστρέφεται στο $(-\infty, 0)$ και στα διαστήματα $(0, +\infty)$ και $(1 - 1)$.

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη εργαζόμαστε ως εξής :

Θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και προσπαθούμε να "δημιουργήσουμε" μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Αν καταλήξουμε σε $f(x_1) < f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , ενώ αν καταλήξουμε σε $f(x_1) > f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους : $f(x) = 2x^3 + 1$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{3}$

Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

$$\text{Τότε } x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 + 1 < 2x_2^3 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $4 - x \geq 0$

$$\text{Είναι } 4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad \text{οπότε} \quad A_g = (-\infty, 4].$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Έστω μια συνάρτηση f με $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα Δ .

Βρίσκουμε το πρόσημο του λόγου $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ με $x_1, x_2 \in \Delta$ και $x_1 \neq x_2$

Αν $\lambda > 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Αν $\lambda < 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Αν $\lambda = 0$ η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ .

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{3x}{x+2}$. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Πρέπει $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$).

$$\text{Είναι: } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{3x_2}{x_2+2} - \frac{3x_1}{x_1+2}}{x_2 - x_1} = \frac{6}{(x_2+2)(x_1+2)}$$

Για $x_1 < x_2 < -2$ είναι $x_1+2 < 0$ και $x_2+2 < 0$ οπότε $\lambda > 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -2)$. Αν $-2 < x_1 < x_2$ τότε $x_1+2 > 0$ και $x_2+2 > 0$ οπότε $\lambda > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της.

Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της αφού για παράδειγμα από $-4 < 1$ παίρνουμε $f(-4) = 6 > f(1) = 1$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα μιάς συνάρτησης (αν έχει τέτοια) εργαζόμαστε ως εξής:

Προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αν για παράδειγμα $f(A) = [k, \lambda]$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης το k είναι το ελάχιστο και το λ το μέγιστο, ενώ αν $f(A) = [k, +\infty)$ ή $[k, \lambda)$ το k είναι το ελάχιστο της συνάρτησης ενώ η συνάρτηση δεν έχει μέγιστο. Ανάλογα ισχύουν όταν $f(A) = (-\infty, \lambda]$ ή $(\kappa, \lambda]$ ή

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 3 + \sqrt{1-x}$. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f (αν υπάρχουν).

Λύση

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $A_f = (-\infty, 1]$.

Επομένως : $x \leq 1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow 3+\sqrt{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = [3, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 3$ η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή το 3 για $x = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να δείξουμε, ότι μία συνάρτηση είναι 1-1:

1. Δεχόμαστε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και δείχνουμε, ότι $x_1 = x_2$ ή δεχόμαστε ότι $x_1 \neq x_2$ και δείχνουμε, ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.
3. Δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
4. Εκμεταλλευόμαστε την γραφική παράσταση (αν είναι γνωστή).

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ είναι 1-1.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-1\}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in A_f \text{ με: } f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow 2x_1(x_2+1) = 2x_2(x_1+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 = 2x_1x_2 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη μια συνάρτησης f κάνουμε τα εξής βήματα:

- i. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.
- iii. Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης. Οι περιορισμοί για το y που τυχόν θα προκύψουν μας δίνουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f που είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^x - 1$. Να βρεθεί η αντίστροφή της f^{-1} (εφόσον υπάρχει).

Λύση

Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Εξετάζουμε αν η f είναι 1-1.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2e^{x_1} - 1 = 2e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$

$$\text{Είναι: } y = f(x) \Leftrightarrow y = 2e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{2} \quad (1)$$

Επειδή $e^x > 0$ πρέπει $\frac{y+1}{2} > 0 \Leftrightarrow y > -1$. Έτσι η (1) γίνεται $x = \ln \frac{y+1}{2}$ με $y > -1$ και ο

τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{2}$ με $x > -1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Επίλυση εξισώσεων

Αν η f είναι 1-1 ισχύει η ισοδυναμία $f(g(\lambda)) = f(h(\lambda)) \Leftrightarrow g(\lambda) = h(\lambda)$

Επίλυση ανισώσεων

Αν η f είναι γνησίως μονότονη ισχύει η ισοδυναμία

$$f(g(\lambda)) < f(h(\lambda)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(\lambda) < h(\lambda) \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \\ g(\lambda) > h(\lambda) \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$$

Παράδειγμα 6

Έστω $f(x) = a^x - x$, με $0 < a < 1$ και $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $a^{\lambda^3-\lambda} + (\lambda^2 - 1) = a^{\lambda^2-1} + \lambda^3 - \lambda$.

Λύση

i. Η $f(x) = a^x + (-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ διότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\left. \begin{matrix} a^{x_1} > a^{x_2} \\ -x_1 > -x_2 \end{matrix} \right\}$ οπότε

$$a^{x_1} - x_1 > a^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

ii. Η εξίσωση $a^{\lambda^3-\lambda} + (\lambda^2 - 1) = a^{\lambda^2-1} + \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow a^{\lambda^3-\lambda} - (\lambda^3 - \lambda) = a^{\lambda^2-1} - (\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow$

$$f(\lambda^3 - \lambda) = f(\lambda^2 - 1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1 στο $\mathbb{R}$ οπότε:

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης f^{-1} όταν γνωρίζουμε μια συναρτησιακή σχέση για την f .

Παράδειγμα 7

Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) + x = 0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Λύση

Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται.

Έστω $f(x) = y$ η εξίσωση γίνεται $y^3 + y + x = 0 \Leftrightarrow x = -y - y^3, y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(x) = -x - x^3, x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 8

Για την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα παρακάτω:

- i. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ii. $f(ax + by) = af(x) + bf(y), x, y \in \mathbb{R}$ (1), iii. Η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f^{-1}(ax + by) = af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)$.

Λύση

Στη σχέση (1), θέτουμε όπου $x, f^{-1}(x)$ και όπου $y, f^{-1}(y)$ οπότε έχουμε:

$$f(af^{-1}(x) + bf^{-1}(y)) = af(f^{-1}(x)) + bf(f^{-1}(y)) = ax + by$$

(αφού $f(f^{-1}(x)) = x$ και $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Επομένως } f^{-1}(f(af^{-1}(x) + bf^{-1}(y))) = f^{-1}(ax + by) \Leftrightarrow af^{-1}(x) + bf^{-1}(y) = f^{-1}(ax + by).$$

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \ln x$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$. Έστω $0 < x_1 < x_2$ (1) και επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ έχουμε $\ln x_1 < \ln x_2$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε: $x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2$ που σημαίνει ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 2

Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ αφού $e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } \lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} - \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1}}{x_2 - x_1} = \frac{2(e^{x_2} - e^{x_1})}{x_2 - x_1}$$

Αν $x_1 < x_2$ τότε και $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} - e^{x_1} > 0$, οπότε είναι $\lambda > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + f(x) + 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (1), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

Η συνάρτηση e^x είναι και αυτή γνησίως αύξουσα και επειδή είναι $f(x_1) < f(x_2)$ θα είναι και

$$e^{f(x_1)} < e^{f(x_2)} \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατα μέλη και έχουμε:

$$e^{f(x_1)} + f(x_1) < e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} + f(x_1) + 3 < e^{f(x_2)} + f(x_2) + 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4

α. Να δείξετε ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της f και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματός.

β. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ (1)

Λύση

α. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι 1-1, που σημαίνει ότι, για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Αν η f έχει δύο σημεία μηδενισμού, έστω x_1, x_2 , με $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, που είναι άτοπο. Επομένως η f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της και αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

β. Η εξίσωση (1) έχει προφανή λύση την $x = 2$ αφού $3^2 + 4^2 = 5^2$. Έχουμε:

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \text{ επειδή } 5^x \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και θα δείξουμε ότι η g είναι

γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Είναι } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \quad (1) \quad \text{και} \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \quad (2)$$

διότι η συνάρτηση α^x με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και σύμφωνα με το α' ερώτημα έχει το πολύ μία ρίζα. Επειδή $g(2) = 0$, το 2 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Άσκηση 5

Έστω συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$.

Να δείξετε ότι η g έχει μέγιστη τιμή τον αριθμό 1.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x και ότι το 1 είναι η τιμή της συνάρτησης g .

$$\text{Είναι } g(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2f(x)}{1+f^2(x)} \leq 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x . Επειδή η συνάρτηση f έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$ οπότε $g(x_0) = 1$.

Άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) \leq 1 = g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή το 1.

Άσκηση 6

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

$$\text{i. } f(x) = 2x + 1 \quad \text{ii. } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{iii. } f(x) = 5x^2 + 1 \quad \text{iv. } f(x) = (x+1)(x-4) + 3$$

Λύση

i. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

ii. Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\text{Είναι: } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Leftrightarrow$$

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R} - \{1\}$

iii. Είναι $A_f = \mathbb{R}$ με $f(-1) = f(1) = 6$ και επειδή $-1 \neq 1$, η f δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

iv. Είναι $A_f = \mathbb{R}$ με $f(-1) = f(4) = 3$ και επειδή $-1 \neq 4$, η f δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης, εφόσον αυτή υπάρχει.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(1, +\infty)$. Για να είναι μια συνάρτηση αντιστρέψιμη πρέπει να είναι 1-1, δηλαδή να ισχύει: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Θεωρούμε: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln(\ln x_1) = \ln(\ln x_2) \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ που σημαίνει ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = \ln(\ln x)$ ως προς x .

Είναι $y = \ln(\ln x) \Leftrightarrow e^y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{e^y}$ και εφόσον $x > 1$ έχουμε $e^{e^y} > 1 \Leftrightarrow e^{e^y} > e^0 \Leftrightarrow e^y > 0$, που ισχύει για κάθε y πραγματικό. Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(y) = e^{e^y}$ με $y \in \mathbb{R}$.

Επειδή ο συμβολισμός ανεξάρτητης μεταβλητής δεν έχει σημασία και επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x , γράφουμε τον τύπο της f^{-1} με μεταβλητή το x :
οπότε $f^{-1}(x) = e^{e^x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις των συναρτήσεων με τύπους:

α. $f(x) = x^2 + 3, x < 0$ και **β.** $g(x) = 3x^3 + 1$

Λύση

α. Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$ οπότε η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = x^2 + 3$ ως προς x .

$$\text{Έχουμε } y = x^2 + 3, x < 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{y-3}, x < 0, y \geq 3$$

$$\text{Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι: } f^{-1}(x) = -\sqrt{x-3} \text{ με } x \geq 3$$

β. Η g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$ αφού:

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^3 + 1 = 3x_2^3 + 1 \Leftrightarrow 3x_1^3 = 3x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η g αντιστρέφεται και για τον τύπο της αντίστροφής της έχουμε:

$$y = 3x^3 + 1 \Leftrightarrow 3x^3 = y - 1 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y-1}{3}}, & y \geq 1 \\ -\sqrt[3]{\frac{y-1}{3}}, & y < 1 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x-1}{3}}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x-1}{3}}, & x < 1 \end{cases}$$

Άσκηση 9

α. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ (1) και $f(x) = x$ (2) είναι ισοδύναμες.

β. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{3}$ και στη συνέχεια τα κοινά

σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Λύση

α. Δύο εξισώσεις λέγονται ισοδύναμες όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- Έστω ότι $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (1).

$$\text{Τότε } f(x_0) = f^{-1}(x_0), \text{ οπότε } f(f(x_0)) = f(f^{-1}(x_0)) \Leftrightarrow f(f(x_0)) = x_0 \quad (3)$$

• Αν $f(x_0) > x_0$ τότε $f(f(x_0)) > f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0)) > x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).

• Αν $f(x_0) < x_0$ τότε $f(f(x_0)) < f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0)) < x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα $f(x_0) = x_0$, οπότε ο x_0 είναι λύση της (2).

- Έστω ότι $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (2).

$$\text{Τότε } f(x_0) = x_0 \quad (3) \text{ οπότε } f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) \quad (4).$$

Από (3) και (4) έχουμε ότι $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ δηλαδή ο x_0 είναι λύση της (1). Άρα οι (1), (2) είναι ισοδύναμες.

β. $A_f = \mathbb{R}$

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 < 4x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 - 1 < 4x_2^3 - 1 \Leftrightarrow \frac{4x_1^3 - 1}{3} < \frac{4x_2^3 - 1}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως 1-1 στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Έχουμε } y = \frac{4x^3 - 1}{3} \Leftrightarrow x^3 = \frac{3y + 1}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3y + 1}{4}}, \quad y \geq -\frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[3]{-\frac{3y + 1}{4}}, \quad y < -\frac{1}{3}$$

$$\text{οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3x+1}{4}}, & x \geq -\frac{1}{3} \\ -\sqrt[3]{-\frac{3x+1}{4}}, & x < -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών των f και f^{-1} πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$. Σύμφωνα με το α ερώτημα είναι:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(1, f(1))$, $B\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ δηλαδή τα

$$A(1,1) \text{ και } B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ (1) και $f(x) = x$ (2) είναι ισοδύναμες μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για παράδειγμα, της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ και η $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει λύση για κάθε

$$x \in \mathbb{R}^*, \text{ ενώ } f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως δεν είναι ισοδύναμες οι (1) και (2).

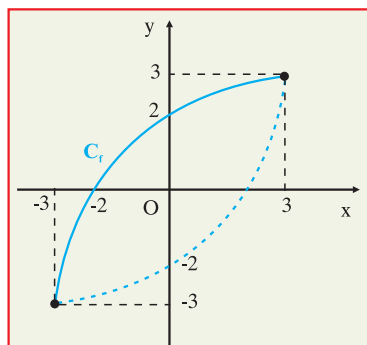
Άσκηση 10

Το διπλανό σχήμα παριστάνει μια συνάρτηση f η οποία είναι 1-1 στο $[-3, 3]$.

Να προσδιορίσετε την τιμή $f^{-1}(0)$.

Λύση

$$\text{Επειδή } f(-2) = 0 \text{ έχουμε } f^{-1}(0) = f^{-1}(f(-2)) = -2$$



Άσκηση 11

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η ιδιότητα $f^2(x) \leq f(x)f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Να δείξετε, ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

Λύση

Η σχέση (1) για $x = 0$ γίνεται: $f^2(0) \leq f(0)f(1)$ (2) και για $x = 1$ γίνεται: $f^2(1) \leq f(1)f(0)$ (3)

Προσθέτουμε τις (2) και (3) κατά μέλη και έχουμε :

$$f^2(0) + f^2(1) \leq 2f(0)f(1) \Leftrightarrow f^2(0) + f^2(1) - 2f(0)f(1) \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) - f(1))^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = f(1).$$

Άρα η f δεν είναι 1-1 και συνεπώς δεν αντιστρέφεται.

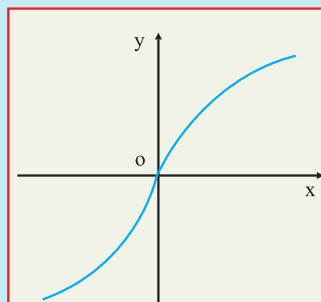
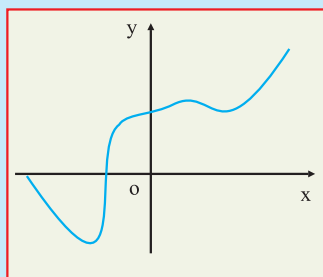
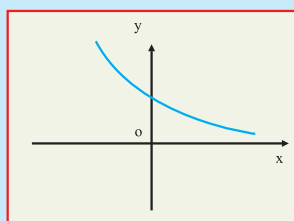
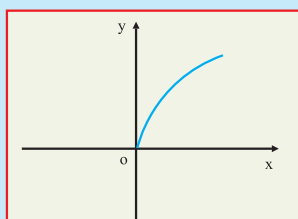
Ε

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 4 - 4x + x^2$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

(Απ.: Η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$)

2. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι γνησίως μονότονη



(Απ.: Η τρίτη)

3. Να αποδειχθεί, ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\frac{1}{3}$

(Υπ.: Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .)

4. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x) = |x - 3| + x$

(Απ.: Είναι $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 3 \\ 2x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$ οπότε είναι σταθερή στο $(-\infty, 3)$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$. Για κάθε $x \in (-\infty, 3]$ παρουσιάζει ελάχιστο το 3)

5. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x) = \log(2 + \sqrt{1 + x^2})$

(Υπ.-Απ.: $D_f = \mathbb{R}$ Για την μονοτονία να διακρίνετε περιπτώσεις, αν $x_1 < x_2 < 0$ και αν $0 \leq x_1 < x_2$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ Για τα ακρότατα,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ και κατασκευαστικά, βρείτε το σύνολο τιμών της.
Για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = \log 3$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

(Υπ.: Διακρίνετε περιπτώσεις: Αν $x_1 < x_2 \leq 1$, αν $1 < x_1 < x_2$ και αν $x_1 \leq 1 < x_2$)

7. Να αποδειχθεί, ότι:

- i. Αν f, g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- ii. Αν f, g είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

(Υπ.: Αξιοποιείτε τους ορισμούς της μονοτονίας)

8. i. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως αύξουσα.

- ii. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f, g είναι διαφορετικού είδους μονοτονίας, τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως φθίνουσα.

(Υπ.: Ομοίως με την 7)

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ και $g(x) = 1 - \ln x$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

(Απ.: $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = (0, +\infty)$ $f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$, $A_{f^{-1} \circ g} = (1, e)$ με $(f^{-1} \circ g)(x) = \ln \frac{1 - \ln x}{\ln x}$)

10. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί, ότι: $f(x) = x$.

(Απ.: Έστω, ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0) > x_0$ (1). Επειδή η $f \uparrow$ έχουμε $f(f(x_0)) > f(x_0)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $f(f(x_0)) > x_0$, που είναι άτοπο λόγω υπόθεσης. Ανάλογα αν υπάρχει

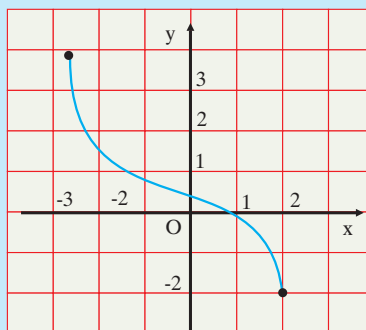
$x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < x_0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

11. Η διπλανή γραφική παράσταση παριστάνει την $1 - 1$ συνάρτηση f .

Ποιο είναι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης f^{-1} ;

(Υπ.: Θυμηθείτε ποιο είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} .

Το μέγιστο είναι το 2)



12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(2x-3)$, $g(x) = \sqrt{x-2} + 3$

α. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1} .

β. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$

(Απ.: $A_f = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $A_g = [2, +\infty)$, α. $f^{-1}(x) = \frac{e^x + 3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = (x-3)^2 + 2$, $x \in [3, +\infty)$)

β. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{e^{(x-3)^2} + 3}{2}$, $x \in [3, +\infty)$ $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \left(\frac{e^x + 3}{2} - 3\right)^2 + 2$, $x \in (\ln 3, +\infty)$)

13. Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι: α. $f(1) = 1$, β. Η συνάρτηση $g(x) = 1 + x^2 - xf(x)$ δεν είναι 1-1.

(Απ.: α. Από τη δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε: $f(f(1)) = 1$ και για $x=f(1)$ έχουμε:

$f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1$ οπότε $f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(1) = 1$.

β. Βρείτε το $g(0)$ και το $g(1)$)

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Να δείξετε ότι:

i. $f(1) = 0$ ii. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

iii. Με την παραδοχή, ότι η μονάδα είναι η μοναδική τιμή του x με $f(x) = 0$, να δείξετε ότι αν s, t είναι διακεκριμένοι θετικοί, τότε $f(s) \neq f(t)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

i. $f(1) = 1$ ii. η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν αντιστρέφεται.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2 \cdot 10^x + 10^{2x}}{1 + 10^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{10^x + 10^{2x}}{1 + 10^x}$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η $g(x)$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντιστροφή της.

ii. Να βρεθεί η συνάρτηση $h(x) = f \circ g^{-1}(x)$.

9ο μάθημα

Ορισμός παραγώγου
Εξίσωση εφαπτομένης

10ο μάθημα

Παράγωγος συνάρτησης
Κανόνες παραγωγίσης
Εξίσωση εφαπτομένης

12ο μάθημα

Θεωρήματα
Rolle - Μέσης Τιμής
Συνέπειες του θεωρήματος
Μέσης Τιμής

11ο μάθημα

Ρυθμός μεταβολής

13ο μάθημα

Μονοτονία
Ακρότατα συνάρτησης

2ο Κεφάλαιο

14ο μάθημα

Κυρτότητα
Σημεία καμπής
συνάρτησης

17ο μάθημα

Μελέτη και γραφική
παράσταση συνάρτησης

15ο μάθημα

Κανόνες
De l' Hospital

16ο μάθημα

Ασύμπτωτες

Ορισμός παραγώγου Εξίσωση εφαπτομένης

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

I. Ορισμός παραγώγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται

πaráγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Αν θέσουμε $x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$ τότε έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν, υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

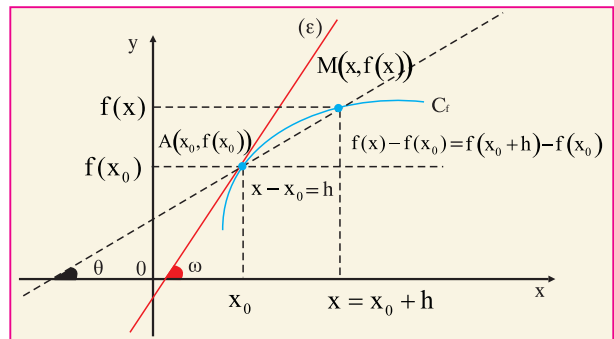
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0** .

II. Εξίσωση εφαπτομένης

Εάν $h \neq 0$, τότε δύο διακεκριμένα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ καθορίζουν μια ευθεία (τέμνουσα) της C_f με κλίση:

$$\lambda = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \epsilon \phi \theta.$$



Αν θεωρήσουμε το A σταθερό και το M κινούμενο πάνω στη C_f , όπως δείχνει το σχήμα η εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι το όριο των τεμνουσών AM καθώς το M πλησιάζει το A ή ισοδύναμα καθώς το h τείνει στο 0 ή ισοδύναμα καθώς το x τείνει στο x_0 .

Επομένως, είναι λογικό να ορίσουμε ως **κλίση της εφαπτομένης** το όριο του προηγούμενου

$$\text{πηλίκου}, \text{ δηλαδή: } \varepsilon\varphi\omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Συνοψίζοντας, έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ , τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο A την ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 ($\lambda = f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$),

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

- Προσοχή:**
- i. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως εύκολα διαπιστώνουμε για την συνάρτηση $f(x) = |x|$ και $x_0 = 0$.
 - ii. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 τότε αποκλείεται να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Εύρεση του παραγώγου αριθμού της f στο x_0 με χρήση του ορισμού

Έλεγχος για το αν είναι παραγωγίσιμη ή όχι μία συνάρτηση σε σημείο x_0 με χρήση του ορισμού.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο (αν υπάρχει) των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 1 + \eta\mu^2 x$ στο $x_0 = 0$

β. $f(x) = 2\sqrt{x-3} + 5x + 1$ στο $x_0 = 3$

Λύση

α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \eta\mu^2 x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0 = f'(0)$

β. Η f έχει πεδίο ορισμού $[3, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{x-3} + 5x + 1 - 16}{x - 3} =$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{x-3} + 5x - 15}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3} + \frac{5(x-3)}{(x-3)} \right] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3} + 5 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x-3}} + 5 \right) = +\infty. \text{ Άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 3.$$

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -2$ (από δεξιά) η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Λύση

Πρέπει $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-2, +\infty)$.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -2$.

Παράδειγμα 3

Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την $f'(3)$.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) + f(h) + 15h - f(3)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h) + 15h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} + 15 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 15 = 2 + 15 = 17 = f'(3)$$

Παράδειγμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 f^3(x) + 2f(x) = x^2 - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (1)

Με $x = 1$ στη σχέση που δόθηκε, παίρνουμε:

$$1^2 \cdot f^3(1) + 2f(1) = 1^2 - 1 \Leftrightarrow f^3(1) + 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) \cdot (f^2(1) + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \text{ή} \\ f^2(1) + 2 = 0 \text{ (αδύνατο)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(1) = 0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$x^2 f^3(x) + 2f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 f^2(x) f(x) + 2f(x) = x^2 - 1$$

(Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ και είναι πραγματικός αριθμός).}$$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 f^2(x) \cdot f(x)}{x-1} + \frac{2f(x)}{x-1} &= \frac{x^2 - 1}{x-1} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x^2 f^2(x) \frac{f(x) - f(1)}{x-1} + 2 \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1}{x-1} \Leftrightarrow \\ (x^2 f^2(x) + 2) \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x+1}{x^2 f^2(x) + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 f^2(x) + 2} = \frac{2}{1 \cdot 0 + 2} = \frac{2}{2} = 1. \text{ Άρα } f'(1) = 1.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου όπου το x_0 είναι σημείο που εκατέρωθεν αυτού αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης ζητείται συχνά να βρούμε παραμέτρους ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

α. Απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο x_0 και η απαίτηση αυτή θα δώσει μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων.

β. Βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους:

$$(\text{από δεξιά}) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{και από αριστερά}) \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

αξιοποιώντας τη σχέση από τη συνέχεια. Εξισώνουμε τα δύο όρια και έχουμε ακόμη μία σχέση που με την προηγούμενη δημιουργείται σύστημα το οποίο επιλύουμε.

Παράδειγμα 5

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta + 5, & x < 3 \\ \alpha x^2 + \beta x, & x \geq 3 \end{cases}$$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ είναι και συνεχής στη θέση αυτή δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2\alpha x + \beta + 5) = 6\alpha + \beta + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (\alpha x^2 + \beta x) = 9\alpha + 3\beta \\ &\quad \text{και} \\ f(3) &= 9\alpha + 3\beta \end{aligned} \right\} \text{ οπότε ισχύει}$$

$$9\alpha + 3\beta = 6\alpha + \beta + 5 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = 5 \Leftrightarrow 2\beta = 5 - 3\alpha \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους στο 3 και είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha x + \beta + 5 - (9\alpha + 3\beta)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha x + \beta + 5 - 9\alpha - 3\beta}{x - 3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha x + 5 - 9\alpha - 2\beta}{x - 3} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha x + 5 - 9\alpha - 5 + 3\alpha}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha x - 6\alpha}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2\alpha(x - 3)}{(x - 3)} = 2\alpha \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\alpha x^2 + \beta x - (9\alpha + 3\beta)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 9\alpha - 3\beta}{x - 3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\alpha x^2 - 9\alpha + \beta x - 3\beta}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\alpha(x^2 - 9) + \beta(x - 3)}{x - 3} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\alpha(x - 3)(x + 3) + \beta(x - 3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)[\alpha(x + 3) + \beta]}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} [\alpha(x + 3) + \beta] = 6\alpha + \beta \end{aligned}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 αν και μόνον αν : $2\alpha = 6\alpha + \beta \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 0 \quad (2)$

Για να προσδιορίσουμε τα α, β λύνουμε το σύστημα των (1) και (2):

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha + 2\beta &= 5 \\ 4\alpha + \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = 4$$

Παράδειγμα 6

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 2 \\ x^3 + \gamma x, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει στο σημείο $A(2, f(2))$ εφαπτομένη παράλληλη

στην ευθεία $\varepsilon: y = -8x + 10$.

Λύση

Για να ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 2$ πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ οπότε πρέπει να είναι και συνεχής στη θέση αυτή.

$$\left. \begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x^2 + \beta) = 4\alpha + \beta \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + \gamma x) = 8 + 2\gamma \\ f(2) &= 4\alpha + \beta \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \text{Πρέπει } 4\alpha + \beta &= 8 + 2\gamma \Leftrightarrow \\ 4\alpha &= 8 - \beta + 2\gamma \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha x^2 + \beta - (4\alpha + \beta)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha x^2 + \beta - 4\alpha - \beta}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 4\alpha \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + \gamma x - (4\alpha + \beta)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + \gamma x - 4\alpha - \beta}{x - 2} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + \gamma x - 8 + \beta - 2\gamma - \beta}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8 + \gamma x - 2\gamma}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) + \gamma(x - 2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4 + \gamma)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x + 4 + \gamma) = 4 + 4 + 4 + \gamma = 12 + \gamma \end{aligned}$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο 3, αν και μόνον αν, $4\alpha = 12 + \gamma$.

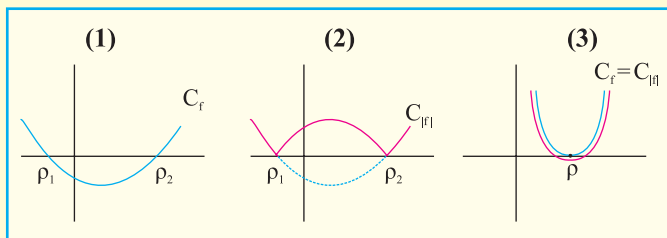
Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y = -8x + 10$ πρέπει :

$$f'(2) = -8 \Leftrightarrow 4\alpha = 12 + \gamma = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = -8 \\ 12 + \gamma = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ και } \gamma = -20$$

Τότε απο την (1) παίρνουμε :

$$4(-2) = 8 - \beta + 2 \cdot (-20) \Leftrightarrow -8 = 8 - \beta - 40 \Leftrightarrow \beta = 8 - 40 + 8 \Leftrightarrow \beta = -24.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3



Παράγωγος και απόλυτη τιμή

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και $|f|$ διαπιστώνουμε ότι στα σημεία στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι ρίζες της και η απόλυτη τιμή της f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα αν $f(\alpha) > 0$ τότε $f'(\alpha) = |f'|(\alpha)$ ενώ αν $f(\alpha) < 0$ τότε $f'(\alpha) = -|f'|(\alpha)$.

Στο σχήμα (2) φαίνεται ότι στις ρίζες ρ_1, ρ_2 της $f(x) = 0$ η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη ενώ στο σχήμα (3) που η ρίζα ρ είναι διπλή η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη.

Χρήσιμη είναι η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο a και $f(a) \neq 0$, να δείξετε ότι η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a .

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(|f(x)| - |f(a)|)(|f(x)| + |f(a)|)}{(x - a)(|f(x)| + |f(a)|)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|^2 - |f(a)|^2}{(x - a)(|f(x)| + |f(a)|)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x) - f^2(a)}{(x - a)(|f(x)| + |f(a)|)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))(f(x) + f(a))}{(x - a)(|f(x)| + |f(a)|)} =$$

$$f'(a) \frac{2f(a)}{2|f(a)|} = \begin{cases} f'(a) & \text{αν } f(a) > 0 \\ -f'(a) & \text{αν } f(a) < 0 \end{cases}. \text{ Άρα η } |f| \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } a.$$

Παράδειγμα 7

Έστω $f(x) = |x - 3|g(x)$ όπου g συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $g(3) \neq 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)g(x)}{x - 3} = g(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)g(x)}{x - 3} = -g(3).$$

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ τότε $g(3) = -g(3) \Leftrightarrow g(3) = 0$ (άτοπο). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Από γνωστό όριο βρίσκουμε την παράγωγο σ' αριθμό.

Στο όριο του πηλίκου των διαφορών $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ επιδιώκουμε την εμφάνιση των συναρτήσεων που το όριό τους είναι γνωστό από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = 2$.

Αν η f είναι συνεχής στο “σημείο” $x_0 = 1$, να δείξετε ότι στο “σημείο” αυτό είναι και παραγωγίσιμη.

Λύση

Για $x \neq 1$ θεωρούμε $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$, $\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2\right)$ οπότε

$$g(x)(\sqrt{x^2+3}-2) = f(x) \quad (1) \text{ κοντά στο } x=1$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(\sqrt{x^2+3}-2)] = 2 \cdot 0 = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ έχουμε $f(1) = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\sqrt{x^2+3}-2)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = 2 \cdot \frac{2}{4} = 1$$

Αρα $f'(1) = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και για την f γνωρίζουμε ότι:

- i. ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση και
- ii. είναι παραγωγίσιμη στο α .

Σκοπεύουμε να δείξουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ για κάθε $x_0 \in \Delta$ είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή γνωρίζουμε:

1. το $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$, αφού η f ως παραγωγίσιμη στο α είναι και συνεχής στο $x = \alpha$
2. το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$.

θα αλλάξουμε μεταβλητή και στη θέση του x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$ μη σταθερή που θα έχει τα εξής δύο χαρακτηριστικά:

- 1^ο $\lim_{h \rightarrow \alpha} g(h) = x_0$.
- 2^ο Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Υπόδειξη: Είναι χρήσιμη μια επανάληψη της μεθόδου 4 στο μάθημα 7.

Σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0 μπορούμε

άμεσα να βρούμε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Παράδειγμα 9

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 15xy$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$, όπου x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (1)$$

Για να προσδιορίσουμε το $f'(0)$ θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = y = 0$ οπότε παίρνουμε :

$$f(0+0) = f(0) + f(0) + 15 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

και η σχέση (1) γίνεται: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad (2)$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) + 15x_0h - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 15x_0h}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} + 15x_0 \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 15x_0 \stackrel{(2)}{=} f'(0) + 15x_0 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ αφού $f'(x_0) = f'(0) + 15x_0$ είναι πραγματικός αριθμός οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f'(0) + 15x$, $x \in \mathbb{R}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Εύρεση ορίου με δεδομένο την παραγωγισιμότητα της f σε κάποιο θέση $x = a$.

Για την άρση της απροσδιοριστίας που προκύπτει προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα όρια

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (αφού η f ως παραγωγίσιμη στο $x = a$ είναι και συνεχής στο a) και

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{κάνοντας, όπου χρειάζεται, αλλαγή μεταβλητής.}$$

Παράδειγμα 10

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a να δείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[x \frac{f(a) - f(x)}{x - a} + f(x) \frac{x - a}{x - a} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[-x \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(x) \right] = -af'(a) + f(a).$$

Παράδειγμα 11

Έστω f παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\text{i. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x), \text{ με } a \in \mathbb{R}^* \quad \text{ii. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+4h) - f^2(x-h)}{h} = 10f(x)f'(x)$$

Λύση

$$\text{i. Είναί } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} \stackrel{ah=t}{=} \lim_{\substack{ah \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} a = af'(x)$$

$$\text{ii. Είναί } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+4h) - f(x-h)}{h} [f(x+4h) + f(x-h)] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+4h) - f(x)) - (f(x-h) - f(x))}{h} [f(x+4h) + f(x-h)] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+4h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right] [f(x+4h) + f(x-h)] \stackrel{(i)}{=}$$

$$[4f'(x) - (-1)f'(x)](f(x) + f(x)) = 10f'(x)f(x)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Για την εύρεση Παραγώγου με δεδομένη ανισοτική σχέση με κατάλληλους μετασχηματι-

σμούς στην ανισοτική σχέση “παγιδεύουμε” το πηλίκο των διαφορών $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ή

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ μεταξύ δύο συναρτήσεων που έχουν το ίδιο όριο και αξιοποιούμε το

Κριτήριο της Παρεμβολής.

Παράδειγμα 12

Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x) - 2y^3 \leq f(x+y) \leq f(x) + 2y^3$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \text{Είναί } f(x) - 2y^3 &\leq f(x+y) \leq f(x) + 2y^3 \\ \text{θετούμε } x &= x_0 \\ y &= h \end{aligned} \right\} \text{ οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:}$$

$$f(x_0) - 2h^3 \leq f(x_0 + h) \leq f(x_0) + 2h^3$$

$$\Leftrightarrow -2h^3 \leq f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 2h^3 \quad (1)$$

Αν $h > 0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} -2h^2 &\leq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 2h^2 \\ \text{με } \lim_{h \rightarrow 0^+} (-2h^2) &= 0 \\ \text{και } \lim_{h \rightarrow 0^+} (2h^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{οπότε } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 \quad (2)$$

σύμφωνα με το κριτήριο της Παρεμβολής.

Αν $h < 0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} -2h^2 &\geq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 2h^2 \\ \text{με } \lim_{h \rightarrow 0^-} (2h^2) &= 0 \\ \text{και } \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2h^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{οπότε } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$.

Άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 13

Αν η f πληρεί την συνθήκη $|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|^\kappa$, $\theta > 0$, $\kappa > 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Για $y = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ η σχέση γίνεται: $|f(x) - f(x_0)| \leq \theta |x - x_0|^\kappa$

και για $x \neq x_0$ είναι:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \theta |x - x_0|^{\kappa-1} \Leftrightarrow -\theta |x - x_0|^{\kappa-1} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \theta |x - x_0|^{\kappa-1}$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} \theta |x - x_0|^{\kappa-1} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (-\theta |x - x_0|^{\kappa-1}) = 0$ από το κριτήριο της παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Άρα $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(Θα δούμε αργότερα ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$, για $x \in \mathbb{R}$)

Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 2$ στο σημείο με τετμημένη $x = 3$.

Σημείωση: Ως “κάθετη” στην C_f ορίζουμε την κάθετη στην εφαπτομένη στο αντίστοιχο σημείο

$$\left(\text{Απ.: } y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \right)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \kappa x^2 - \lambda, & \text{αν } x < 1 \\ -\frac{\mu}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο $P(1, f(1))$ να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x + y - 4 = 0$.

$$\left(\text{Απ.: } \kappa = \frac{1}{6}, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{3} \right)$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad f(2) = g(2) = h(2) \text{ και } f'(2) = h'(2) = 2002$$

Να δείχθεί ότι $g'(2) = 2002$.

4. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 = 2$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) - g(x) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) - g(2) = 4$$

Να δείξετε ότι $f'(2) - g'(2) = 4$.

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 2\beta, & x < 0 \\ -\sqrt{x^2 + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

$$(\text{Απ.: } \alpha = 0, \beta = -1)$$

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4\alpha x + \beta - 3}{x - 1}, & x < 1 \\ -\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

$$\left(\text{Απ.: } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 4 \right)$$

7. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η κλίση της στο σημείο με τετμημένη 4 είναι $\frac{1}{7}$, να βρείτε την κλίση της στο σημείο με τετμημένη -4.

$$\left(\text{Απ.: } f'(-4) = \frac{1}{7} \right)$$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -\alpha x^2 + 3\beta x$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, -3)$ έχει εφαπτομένη με κλίση -3 .

(Απ.: $\alpha = 0, \beta = -1$)

9. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

i. Η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

ii. $2x^3 - 4x^4 \leq xf(x) \leq 2x^3 - 4x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α. την τιμή της f , στο $x = 0$

β. την τιμή της f' στο $x = 0$.

(Απ.: $f(0) = 0, f'(0) = 0$)

10. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2|x - 2|$ δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(2, f(2))$.

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 5$. Αν $g(x) = 2f(x) - x$ να βρεθεί η $g'(0)$.

(Απ.: $g'(0) = 9$)

12. Να βρεθούν α, β, γ ώστε η $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^3 + \gamma x + 2 & x > 1 \end{cases}$

(Απ.: $\alpha = 3, \beta = -4, \gamma = -1$)

13. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu x$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Απ.: Δικαιολογήστε ότι $f(0) = 0$ και βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$)

14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ ($a > 0$) να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x))^2 - (f(a))^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

(Απ.: i. $2\sqrt{a} \cdot f'(a)$ ii. $4f(a) \cdot \sqrt{a} f'(a)$)

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ($x, y \neq 0$) ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$

(Υπ.: Δείξτε ότι $f(1) = 0$. Ισχύει $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$)

και προσπαθήστε να δείξετε ότι υπάρχει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2(x-1) \leq f(x) \leq x^2 - 1$ (1)

i. Ναδειχτεί ότι: $f(1) = 0$

ii. Ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

(Υπ.: Για $x = 1$ η (1) δίνει $f(1) = 0$. Για $x > 1$ και μετά για $x < 1$ δημιουργείστε από την (1) την

παράσταση $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ και υπολογίστε το όριο της)

17. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\alpha \in A$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(x) + x \leq g(x) + \alpha$ για κάθε $x \in A$ να δείξετε ότι $f'(\alpha) + 1 = g'(\alpha)$.

(Υπ.: Δείξτε για $x < \alpha$ ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + 1 \leq \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha}$ και για $x > \alpha$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + 1 \leq \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha}$ και λάβετε υπόψη σας ότι $f'(\alpha) = g'(\alpha)$)

18. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

(Υπ.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) + f(0) - f(0) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \dots = 2$)

19. Αν για συνάρτηση f ισχύει: $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$g(x) = 2f(x) + \frac{x^2}{f(x)} \text{ να βρεθεί } g'(0).$$

(Υπ.: Ζητάμε $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$. Αξιοποιήστε τα δεδομένα)

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $x^2 - 5x + 6 = f^3(x) + f(x)$ (1). Να βρεθεί η $f'(2)$.

(Υπ.: Ζητάμε $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$. Βρείτε $f'(2)$ από την (1) για $x = 2$ και μετασχηματίστε

την (1) σε $(x-3)(x-2) = f(x)(f^2(x) + 2) \Rightarrow x-3 = \frac{f(x)}{x-2}(f^2(x) + 1)$ από όπου $f'(2) = -1$

E ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο της γραφικής της παράστα-

σης με τετμημένη $x = 3$ είναι $2y = 2\sqrt{3}x + 1 - 6\sqrt{3}$ να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[f(x)]^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

B. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(\alpha, 0)$ και είναι κάθετη στην εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$h(x) = \sin x \text{ στο σημείο της } \left(\frac{\pi}{2}, h\left(\frac{\pi}{2}\right) \right).$$



Παράγωγος συνάρτησης Κανόνες παραγωγίσης Εξίσωση εφαπτομένης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Παράγωγος συνάρτησης - κανόνες παραγωγίσης

Ορισμός

Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα A όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του A .

Η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε x του A στον παράγωγο αριθμό του $f'(x)$, ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$ ή $\frac{dy}{dx}$ (αν $y = f(x)$).

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$\alpha. \text{ Αν } f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{τότε } f'(x) = 0 \qquad (c)' = 0$$

$$\beta. \text{ Αν } f(x) = x \quad \text{τότε } f'(x) = 1 \qquad (x)' = 1$$

$$\gamma. \text{ Αν } f(x) = x^v \quad v \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad \text{τότε } f'(x) = v \cdot x^{v-1} \qquad (x^v)' = v \cdot x^{v-1}$$

$$\delta. \text{ Αν } f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty) \quad (\text{στο } x = 0 \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη})$$

$$\text{Για } x \in (0, +\infty) \text{ είναι: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\epsilon. \text{ Αν } f(x) = \eta\mu x \quad \text{τότε } f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{τότε } f'(x) = -\eta\mu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

$$\zeta. \text{ Αν } f(x) = e^x \quad \text{τότε } f'(x) = e^x \qquad (e^x)' = e^x$$

$$\eta. \text{ Αν } f(x) = \ln x, \quad x > 0 \quad \text{τότε } f'(x) = \frac{1}{x} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Κανόνες παραγωγισής

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f + g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c \in \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Προσοχή:

Αν $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -vx^{-v-1}$

Άρα γενικά ισχύει: $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$.

Επίσης με τον κανόνα του πηλίκου εύκολα προκύπτουν :

$$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \quad (\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \eta\mu x \neq 0$$

Σχόλια

1. Αν η $(f + g)$ είναι παραγωγίσιμη στο A , αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά οι f, g είναι συγχρόνως και οι δύο παραγωγίσιμες στο A .
2. Επίσης, μπορεί η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη στο A , χωρίς κατ' ανάγκη η f να είναι παραγωγίσιμη.
3. Αν μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η $(f + g)$ και η $(f - g)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
4. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για την $(f \cdot g)$. Αν κάποια από τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο δεν βγάζουμε άμεσα συμπέρασμα για την παράγωγο του γινομένου.

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \eta\mu x$. Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}\eta\mu x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Άρα η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ενώ η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

5. Αν γνωρίζουμε τον $f'(a)$ τότε το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ είναι ίσο με την τιμή της f' στο a .

$$\text{Γράφουμε } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=a}.$$

$$\text{Για παράδειγμα είναι : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \left(\frac{d(e^x)}{dx} \right)_{x=a} = (e^x)_{x=a} = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \left(\frac{d(\ln x)}{dx} \right)_{x=1} = \left(\frac{1}{x} \right)_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 3x^4 + x^2 - 4$ ii. $f(x) = -x^3 + \eta\mu x + \sqrt{x}$
 iii. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ iv. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \ln 5$
 v. $f(x) = 2\varepsilon\phi x + \sigma\phi x - 1$ vi. $f(x) = x^4 + x + \sqrt{5}$

Λύση

$$\text{i. } f'(x) = (3x^4 + x^2 - 4)' = 12x^3 + 2x$$

$$\text{ii. } f'(x) = (-x^3 + \eta\mu x + \sqrt{x})' = -3x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{iii. } f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\text{iv. } f'(x) = (2\sigma\upsilon\nu x + \ln 5)' = 2\eta\mu x$$

$$\text{v. } f'(x) = (2\varepsilon\phi x + \sigma\phi x - 1)' = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

$$\text{vi. } f'(x) = (x^4 + x + \sqrt{5})' = 4x^3 + 1$$

Παράδειγμα 2**Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:**

i. $f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x$

ii. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 \ln x$

iii. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$

iv. $f(x) = (x^3 - 2) \ln x$

v. $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

vi. $f(x) = -3x \cdot \eta\mu x$

Λύση

i. $f'(x) = (\ln x \cdot \eta\mu x)' = (\ln x)' \cdot \eta\mu x + \ln x \cdot (\eta\mu x)' = \frac{1}{x} \eta\mu x + \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii. $f'(x) = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \ln x \right)' = \frac{4x^3}{4} - \left(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \right) = x^3 - 2x \ln x - x$

iii. $f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \eta\mu x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

iv. $f'(x) = ((x^3 - 2) \ln x)' = 3x^2 \ln x + (x^3 - 2) \cdot \frac{1}{x}$

v. $f'(x) = (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu 2x$

vi. $f'(x) = (-3x \cdot \eta\mu x)' = -3\eta\mu x - 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Παράδειγμα 3**Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:**

i. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

iii. $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

iv. $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

v. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

vi. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Λύση

i. $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 4x} \right)' = \frac{1' \cdot (x^2 + 4x) - 1 \cdot (x^2 + 4x)'}{(x^2 + 4x)^2} = \frac{-(2x + 4)}{(x^2 + 4x)^2} = -\frac{2(x + 2)}{(x^2 + 4x)^2}$

ii. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} =$

$$\frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{iii. } f'(x) = \left(\frac{\ln x}{e^x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot e^x - \ln x (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} e^x - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)}{(e^x)^2} =$$

$$\frac{1 - x \ln x}{x e^x} = \frac{1 - x \ln x}{x \cdot e^x}$$

$$\text{iv. } f'(x) = \left(\frac{x^3}{\ln x} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot \ln x - x^3 (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^3 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2 \cdot (3 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$\text{v. } f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{1' \cdot \sqrt{x} - 1 \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{vi. } f'(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x + 1)'(e^x - 1) - (e^x + 1)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} =$$

$$\frac{e^x(e^x - 1 - e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο A και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h = f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$\text{ή } \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du} \frac{du}{dx} \text{ όπου } u = g(x). \text{ (Κανόνας αλυσίδας).}$$

Προσοχή:

$$\text{Αν } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ τότε } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0.$$

$$\text{Αν } \alpha > 0 \text{ τότε } (a^x)' = a^x \cdot \ln a, x \in \mathbb{R} \text{ και } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{Αν } 0 < \alpha \neq 1 \text{ τότε } (\log_\alpha |x|)' = \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Αν } f(x) > 0 \text{ τότε } (f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \ln f(x)})' = f(x)^{g(x)} [g(x) \ln f(x)]'$$

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά (χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^v	$v \cdot f^{v-1} \cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}} f'$
$\eta\mu f$	$\sigma\upsilon\nu f \cdot f'$	$\sigma\upsilon\nu f$	$-\eta\mu f \cdot f'$
$\epsilon\phi f$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f} \cdot f'$	$\sigma\phi f$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 f} \cdot f'$
e^f	$e^f \cdot f'$	$\ln f$	$\frac{1}{f} f'$
$\alpha^f, \alpha > 0$	$\alpha^f \ln \alpha \cdot f'$	$\ell\text{og}_\alpha f, 0 < \alpha \neq 1$	$\frac{1}{\ln \alpha} \cdot \frac{1}{f} \cdot f'$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (4x^3 + x - 1)^4$

ii. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$

iii. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

iv. $f(x) = 5\eta\mu^3 x + 1$

v. $f(x) = \eta\mu(3x - 1)$

vi. $f(x) = e^{x^2+1}$

Λύση

i. Είναι $f'(x) = \left((4x^3 + x - 1)^4\right)' = 4(4x^3 + x - 1)^3 (4x^3 + x - 1)' = 4(4x^3 + x - 1)^3 (12x^2 + 1)$

ii. Επίσης $f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x} + 1)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} (\sqrt{x} + 1)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$

iii. Ισχύει $f'(x) = \left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

iv. Έχουμε $f'(x) = (5\eta\mu^3 x + 1)' = 15\eta\mu^2 x \cdot (\eta\mu x)' = 15\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

v. $f'(x) = (\eta\mu(3x - 1))' = \sigma\upsilon\nu(3x - 1)(3x - 1)' = 3\sigma\upsilon\nu(3x - 1)$

vi. $f'(x) = (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = 2x \cdot e^{x^2+1}$

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$

ii. $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$

iii. $f(x) = \sqrt[6]{3x - 2}$

Λύση

i. Έχουμε $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$ με $x \geq 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})' = \left(x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

για $x > 0$.

ii. Είναι $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f(x) = (\sqrt[5]{x^2 + 1})' = \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \right)' = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{-\frac{4}{5}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{5} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{4}{5}}} \cdot 2x = \frac{2x}{5 \cdot \sqrt[5]{(x^2 + 1)^4}}$$

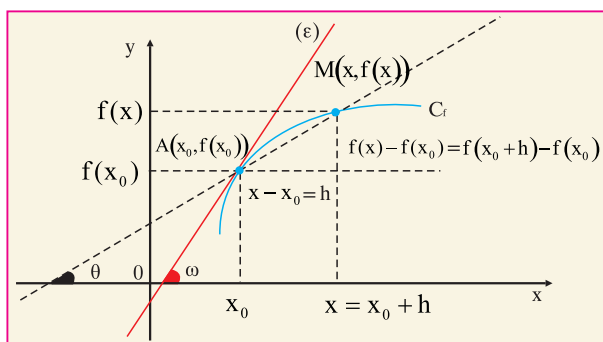
iii. Είναι $f(x) = \sqrt[6]{3x - 2}$, με $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) &= (\sqrt[6]{3x - 2})' = \left((3x - 2)^{\frac{1}{6}} \right)' = \frac{1}{6} (3x - 2)^{-\frac{5}{6}} (3x - 2)' = \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{(3x - 2)^{\frac{5}{6}}} \cdot 3 = \frac{3}{6 \cdot \sqrt[6]{(3x - 2)^5}} = \frac{1}{2\sqrt[6]{(3x - 2)^5}}, \text{ για } x > \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$ και ii. $f(x) = \sqrt[6]{3x - 2}$ με χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι δεν είναι παραγωγίσιμες στις θέσεις $x = 0$ και $x = \frac{2}{3}$ αντίστοιχα.

II. Εξίσωση εφαπτομένης

Έχουμε ήδη αναφερθεί στο μάθημα 9 χωρίς να γνωρίζουμε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγωγισής. Υπενθυμίζουμε ότι:



αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ορίζουμε την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Ο αριθμός $f'(x_0) = \lambda_e = \epsilon\omega$ ονομάζεται και κλίση της C_f στο σημείο A .

Σχόλια

1. Προφανώς αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν έχει νόημα η αναζήτηση εφαπτομένης.
2. Μπορεί η εφαπτομένη (ϵ) να έχει και άλλα σημεία επαφής με την C_f .

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης σε καθορισμένο σημείο x_0 . Βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$, την $f'(x)$ και στη συνέχεια την $f'(x_0)$.

Αν στο x_0 αλλάζει ο τύπος της f ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα με πλευρικά όρια. Τέλος γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 όταν:

- i. $f(x) = x^3 + x - 3$, $x_0 = 1$
- ii. $f(x) = 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Λύση

- i. Είναι: $f'(x) = 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{για } x_0 = 1 \text{ είναι:} \\ f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \\ f(x_0) = 1^3 + 1 - 3 = -1 \end{array} \right\}$$

Και επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ παίρνουμε

$$y - (-1) = 4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = 4x - 5}$$

ii. Είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = \frac{\pi}{4} \\ f'(x_0) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + 2\eta\mu \frac{\pi}{4} = \\ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ f(x_0) = 2\eta\mu \frac{\pi}{4} - 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \\ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Είναι } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ \text{οπότε} \\ y - 0 = 2\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \\ \boxed{\varepsilon : y = 2\sqrt{2}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}} \end{array}$$

Παράδειγμα 2

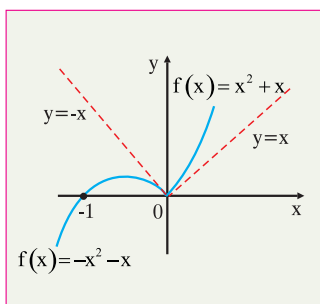
Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|(x+1)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Να ελέγξετε αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στη θέση $x = 0$.

Λύση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x-1) = -1$$

Και επομένως δεν ορίζεται εφαπτομένη στη θέση $x = 0$. (Υπάρχουν δύο ημιεφαπτόμενες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$)



Παράδειγμα 3

Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{9}{4}, & x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4x}, & x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με

τετμημένη $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$.

Λύση

Πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή πρέπει $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, το

οποίο ισχύει.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{x^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{x^2 - \frac{3}{4}}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{4x} + \frac{3}{4}}{x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} \frac{\frac{-3\sqrt{3} + 6x}{4x}}{\frac{2x - \sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} \frac{2(6x - 3\sqrt{3})}{4x \cdot (2x - \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}^+} \frac{3(2x - \sqrt{3})}{2x \cdot (2x - \sqrt{3})} = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ με $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$.

Ορίζεται επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

Τότε $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan \omega \Leftrightarrow \sqrt{3} = \tan \omega$, οπότε $\omega = \frac{\pi}{3}$ διότι $0 \leq \omega < \pi$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για την εύρεση εφαπτομένων της C_f που πληρούν μια ιδιότητα I , θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και βρίσκουμε για ποιες τιμές του x_0 η εφαπτομένη (ε) έχει την ιδιότητα I . Η εύρεση του σημείου επαφής μας δίνει την εξίσωση που ζητάμε.

Όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $K(\alpha, \beta)$ το οποίο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της f

γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , που είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και απαιτούμε να διέρχεται από το σημείο $K(\alpha, \beta)$, δηλαδή να ισχύει: $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$. Η λύση της τελευταίας εξίσωσης μας δίνει το πλήθος των σημείων επαφής και τις τετμημένες τους.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$ η οποία “άγεται” από το σημείο $K(3, 5)$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 1$. Το σημείο K προφανώς δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της f γιατί $f(3) = 6 \neq 5$. Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ή} \quad y - (x_0^2 - x_0) = (2x_0 - 1)(x - x_0) \quad (1)$$

Η (1) πρέπει να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου K . Δηλ.

$$5 - x_0^2 + x_0 = (2x_0 - 1)(3 - x_0) \Leftrightarrow 5 - x_0^2 + x_0 = 6x_0 - 2x_0^2 - 3 + x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \text{ με ρίζες } x_0 = 4 \text{ και } x_0 = 2$$

Άρα προκύπτουν δύο εφαπτόμενες με εξισώσεις:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - 12 = 7(x - 4) \Leftrightarrow y = 7x - 16 \text{ και}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 4.$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - x + 1$ που διέρχεται από το $M(1, 1)$.

Λύση

Έστω $A(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής. Είναι $f'(x) = 2x - 1$, οπότε

$$f'(x_0) = 2x_0 - 1 \text{ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:}$$

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(x - x_0).$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$, οπότε:

$$1 - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(1 - x_0) \Leftrightarrow 1 - x_0^2 + x_0 - 1 = 2x_0 - 2x_0^2 - 1 + x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon : y - (1^2 - 1 + 1) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x .$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f που είναι :

- i. κάθετη προς γνωστή ευθεία (ε_1) με $\lambda_{\varepsilon_1} \neq 0$.
- ii. παράλληλη προς γνωστή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης πραγματικό αριθμό.

Τότε:

- i. Αυτό σημαίνει ότι: $\lambda_{\varepsilon_0} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$ δηλαδή $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$ (1).

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στην εξίσωση της εφαπτομένης.

- ii. Πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της δοσμένης ευθείας να ισούται με τον παράγωγο αριθμό της f στο σημείο επαφής.

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$, οι

οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία $2y - x + 1 = 0$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-2\}$ με

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(x + 2) - (x^2 - 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x(x + 2) - (x^2 - 1)}{(x + 2)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$$

Πρέπει :

$$f'(x_0) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 1}{(x_0 + 2)^2} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4x_0 + 1 = -2(x_0^2 + 4x_0 + 4) \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 4x_0 + 1 + 2x_0^2 + 8x_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0^2 + 4x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -1 \text{ ή } x_0 = -3$$

- i. Για $x_0 = -1$ η εφαπτομένη είναι :

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y - 0 = -2(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 2$$

ii. Για $x_0 = -3$ η εφαπτομένη είναι :

$$y - f(-3) = f'(-3)(x + 3) \Leftrightarrow y + 8 = -2(x + 3) \Leftrightarrow y = -2x - 14$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια ευθεία $\varepsilon : y = ax + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , χωρίς να μας προσδιορίζουν το σημείο επαφής.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη ταυτίζεται με την ευθεία (ε) . Αρκεί λοιπόν να βρούμε σημείο $A(x_0, y_0)$ έτσι ώστε:

$$(1) \quad y_0 = ax_0 + \beta$$

$$(2) \quad y_0 = f(x_0)$$

$$(3) \quad f'(x_0) = a$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = x + a$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + ax + 1$ και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.

Λύση

Η $f(x) = x^2 + ax + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + a$. Για να εφάπτεται η ευθεία

$$y = x + a \text{ στην } C_f \text{ αρκεί να υπάρχει σημείο } (x_0, y_0) \text{ τέτοιο ώστε: } \begin{cases} y_0 = x_0 + a & (1) \\ y_0 = x_0^2 + ax_0 + 1 & (2) \\ 2x_0 + a = 1 & (3) \end{cases}$$

Από την (3) προκύπτει ότι: $x_0 = \frac{1-a}{2}$

Από την (1) προκύπτει ότι: $y_0 = \frac{1-a}{2} + a = \frac{1+a}{2}$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $\frac{1+a}{2} = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + a\frac{1-a}{2} + 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -3$

Για $a = 1$

Η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + x + 1$ στο $A(0, 1)$.

Για $a = -3$

Η ευθεία $y = x - 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 1$ στο $B(2, -1)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης σε κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g .

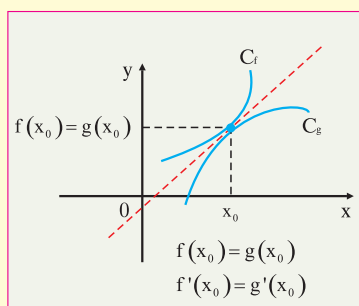
Αφού το M είναι κοινό σημείο πρέπει να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Άρα είναι λύση της εξίσωσης, $f(x) = g(x)$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$ (1)

Αφού οι f, g παραγωγίζονται στο x_0 πρέπει οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο M να ταυτίζονται, δηλαδή να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης δηλαδή $f'(x_0) = g'(x_0)$ (2).

Έτσι έχουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$
**Παράδειγμα 8**

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των

$f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη

στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με $f'(x) = 2x + \alpha$ και

$$g'(x) = 4x + 1. \text{ Πρέπει να ισχύουν: } \begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha = 4 + 1 \\ \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Παράδειγμα 9

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμη-

μένη $x_0 = 1$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = 2\alpha x + \beta \text{ και } g'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$$

Αφού οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ πρέπει : $f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$

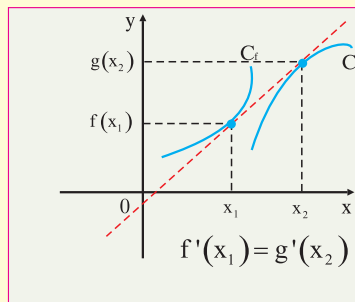
$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} f(1) &= \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow f(1) = \alpha + \beta - 1 \\ g(1) &= \frac{3 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow g(1) = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \text{Οπότε } \alpha + \beta - 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta - 2 = 3 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 5 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } \left. \begin{aligned} f'(1) &= 2\alpha \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow f'(1) = 2\alpha + \beta \\ g'(1) &= \frac{3-3 \cdot 1^2}{1^2+1} \Leftrightarrow g'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Οπότε } 2\alpha + \beta = 0 \quad (2)$$

Απο τις (1) και (2) προκύπτει : $\alpha = -\frac{5}{2}$ και $\beta = 5$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g σε διαφορετικά σημεία έστω A και B αντίστοιχα.



Αν τα σημεία A, B είναι γνωστά και ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο A με εξίσωση

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad \text{ή} \quad y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$$

και ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο B με εξίσωση:

$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \quad \text{ή} \quad y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

για να ταυτίζονται οι ευθείες αυτές πρέπει οι εξισώσεις τους να είναι ίδιες :

Δηλ. πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$ και $f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$.

Αν είναι γνωστό το ένα από τα δύο σημεία, έστω το $A(x_1, y_1)$, τότε θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο A , έστω $y = \alpha x + \beta$ και εξετάζουμε αν η ευθεία (ε) εφάπτεται και της C_g .

Παράδειγμα 10

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = 2x^2 + x + 1$ και $g(x) = 3x^2 - 11x + 13$. Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των γραφικών τους παραστάσεων. Αν ναι, να βρεθεί η εξίσωσή της.

Λύση

- i. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, δηλαδή αν έχει λύση το σύστημα :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 = 3x^2 - 11x + 13 \\ 4x + 1 = 6x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 12 = 0 \\ 2x = 12 \end{cases}$$

που είναι φανερά αδύνατο, οπότε δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

- ii. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη που εφάπτεται των C_f, C_g σε διαφορετικά σημεία έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ ελέγχοντας αν έχει λύση το σύστημα:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 1 = 6x_2 - 11 \\ 2x_1^2 + x_1 + 1 - x_1(4x_1 + 1) = 3x_2^2 - 11x_2 + 13 - x_2(6x_2 - 11) \end{cases} \quad (1)$$

και λύνοντας με τη βοήθεια της (1) προκύπτει: $x_2 = 2$ και $x_1 = 10$.

Για $x_2 = 2$ είναι $g'(2) = 12 - 11 = 1$ και $g(2) = 3$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = x - 2 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Για $x_2 = 2$ η σχέση (1) δίνει $x_1 = 0$.

Οπότε $f(x_1) = f(0) = 1$ και τα σημεία επαφής είναι $A(0, 1), B(2, 3)$.

Για $x_2 = 10$ είναι: $g(10) = 203, g'(10) = 49$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - g(10) = g'(10)(x - 10) \Leftrightarrow y - 203 = 49(x - 10) \Leftrightarrow y = 49x - 287$$

Για $x_2 = 10$ η σχέση (1) δίνει $x_1 = 12$ άρα $f(x_1) = f(12) = 301$ και τα σημεία επαφής είναι $A(12, 301) B(10, 203)$.

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Δίνονται οι $f: A \rightarrow A$ και $g: A \rightarrow A$, A διάστημα, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και αντιστρέψιμες στο A . Για τις δύο συναρτήσεις ισχύουν: $f'(x) = g^{-1}(x)$ και $g'(x) = f^{-1}(x)$.

Να δείξετε ότι $[(f \circ g)(x)]' = x[(f + g)(x)]'$.

Λύση

Ισχύει ότι $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } [(f \circ g + g \circ f)(x)]' &= (f(g(x)))' + (g(f(x)))' = f'(g(x))g'(x) + g'(f(x))f'(x) = \\ &= g^{-1}(g(x))g'(x) + f^{-1}(f(x))f'(x) = xg'(x) + xf'(x) = x[(g+f)(x)]' \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

(1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

Λύση

$$\text{Είναι } f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (1)$$

(Παραγωγίζουμε με μεταβλητή x οπότε y και $f(y)$ είναι σταθερές)

$$\text{Έτσι } f'(x+y)(x+y)' + f'(x-y)(x-y)' = 2f(y)f'(x)$$

$$f'(x+y) + f'(x-y) = 2f(y)f'(x) \quad (\text{Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή } x)$$

$$f''(x+y)(x+y)' + f''(x-y)(x-y)' = 2f(y)f''(x)$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(y)f''(x) \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε την σχέση (1) με μεταβλητή y .

$$f'(x+y)(x+y)' + f'(x-y)(x-y)' = 2f(x)f'(y)$$

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y) \quad (\text{Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή } y) \text{ οπότε}$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y) \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε $f(y)f''(x) = f(x)f''(y)$

Άσκηση 3

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα x όταν:

$$\text{i. } f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{ii. } f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$$

Λύση

$$\text{i. Είναι } f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{Έτσι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ και επειδή}$$

$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα x .

$$\text{ii. Είναι } f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2}{x} \right)' = \frac{(x^3 + 2)' \cdot x - (x^3 + 2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{3x^2 \cdot x - x^3 - 2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

$$\text{Είναι : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 2}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και επειδή}$$

$f(1) = 1^3 + 2 = 3$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, 3)$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$\begin{array}{llll} \alpha. f(x) = -4x^5 & \beta. f(x) = -\frac{5}{x^2} & \gamma. f(x) = x^{\frac{2}{5}} & \delta. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \varepsilon. f(x) = -\frac{1}{2} \ln x & \sigma\tau. f(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} & \zeta. f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 & \end{array}$$

2. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha. f(x) = 3 \ln x (x^2 + 1) & \beta. f(x) = -6(x^2 + 1)(x^3 - 2) & \gamma. f(x) = x^2 \eta \mu x \\ \delta. f(x) = \frac{x \eta \mu x}{\sin x} & \varepsilon. f(x) = \frac{\ln x}{e^x} & \sigma\tau. f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 3} \end{array}$$

3. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha. f(x) = (x^2 + 1)^5 & \beta. f(x) = \sqrt{x^3 + x^5} & \gamma. f(x) = \ln(\eta \mu x) \\ \delta. f(x) = e^{\sin x} & \varepsilon. f(x) = \eta \mu^3 x \cdot \sin x & \sigma\tau. f(x) = 5 \eta \mu^2 x (4x + 1) \\ \zeta. f(x) = x^x & \eta. f(x) = x^{\eta \mu x} & \theta. f(x) = -3 \ln^3(\sqrt{x}) \\ \iota. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & \kappa. f(x) = (\ln x)^{x^2} & \lambda. f(x) = \varepsilon \varphi(3^x) \end{array}$$

4. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + 1$ στο σημείο $A(1, 1)$.

(Απ.: $\alpha = -2, \beta = 2$)

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους

$$f(x) = ax^2 + \beta x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \text{ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο } x_0 = -1.$$

(Απ.: $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$)

6. Να βρείτε τα σημεία της C_f της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -2\eta \mu^2 x + \eta \mu 2x, x \in [0, 2\pi]$ στα οποία οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

$$\left(\text{Απ. : } \left(\frac{\pi}{2}, -2 \right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -2 \right), (2\pi, 0) \right)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Να βρείτε σημείο του άξονα $y'y$ από το οποίο οι εφαπτομένες που άγονται προς την C_f να είναι κάθετες.

8. Έστω $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & x \leq 2 \\ x^3 + \gamma x, & x > 2 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο M με τετμημένη 2 να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$.

9. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 1$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g (όχι σε κοινό σημείο των C_f, C_g).

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 2$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $y = \alpha x - 3$ να εφάπτεται της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ και να προσδιορίσετε το σημείο M .

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & x \leq 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 1 να είναι κάθετη στην ευθεία $x - y - 1 = 0$.

$$(\text{Απ. : } \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1)$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$y = f(x)$ η οποία: i. είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_1: x - y + 2 = 0$

ii. είναι κάθετη προς την ευθεία $\varepsilon_2: x + 5y + 2 = 0$

14. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \sqrt[5]{x^4} \quad \beta. f(x) = \sqrt[5]{x^8} \quad \gamma. f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f(x^2 - 1) - xf(x+1) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0, f(0))$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης και στο $B(2, f(2))$.

16. Να δικαιολογήσετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις:

i. $f'(1) = 1$ και ii. $[f(1+x)]^3 = [f(1-x)]^2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Υπ.: i. Θεωρήστε ότι υπάρχει και παραγωγίστε την

ii. Στην τελική σχέση θέτουμε $x = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με τις ιδιότητες:

i. $f(x+y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x)$ ii. η f είναι παραγωγίσιμη iii. $f'(0) = 1$

Να δείξετε ότι $f'(x) - f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Υπ.: Θέτουμε $y = 0$ και βρίσκουμε $f(0) = 0$, $f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \dots = e^x + f(x)$)

18. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - 2\ln x| \leq 3(x-1)^2$, $x > 0$. Να δείχθεί ότι:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

19. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(x \cdot y) = f(x) - f(y)$ (1) για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι $xf'(x) + yf'(y) = 0$.

(Υπ.: Παραγωγίστε την (1) ως προς x και μετά ως προς y)

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A. α. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

β. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και έστω ότι όλες οι εφαπτόμενες του γραφήματος της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = Cx$, $x \in \mathbb{R}^*$ και $C \in \mathbb{R}$.

B. Δίνεται ότι η συνάρτηση f^3 είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0 . Να εξεταστεί εάν η συνεχής συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0 .

Γ. Να προσδιοριστεί το πλήθος των καθέτων που άγονται από το σημείο $A = (a, \beta)$ προς την παραβολή $y = x^2$ για τις διάφορες τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$ (ή και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής).

Γεωμετρικά εκφράζει την κλίση της C_f στο $(x_0, f(x_0))$.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x , $x \in \Delta$ την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $x \in \Delta$.

Παραδείγματα

Ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της ως προς την ακτίνα είναι $V'(r) = \frac{4}{3}3\pi r^2 = 4\pi r^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της όταν η ακτίνα είναι 2m είναι $V'(2) = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi \text{ m}^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας όταν η ακτίνα της αυξάνει με ρυθμό 3cm/s είναι: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$ διότι $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ οπότε $V'(t) = \frac{4}{3}3\pi r^2(t)r'(t)$ ή $V'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t)$ και αφού $r'(t) = 3\text{cm/s}$, θα έχουμε: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$
- Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού λέγεται και “ρυθμός μεταβολής της θέσης του” δηλαδή $v(t) = x'(t)$ αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του κινητού.
- Η επιτάχυνση $a(t)$ ενός κινητού λέγεται και ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του δηλαδή $a(t) = v'(t)$.
Εφαρμόζεται σ' οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όπου κάποιο φυσικό, οικονομικό ή βιολογικό φαινόμενο μεταβάλλεται με το χρόνο.

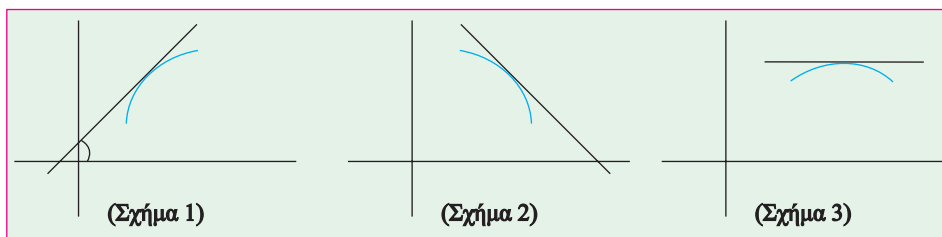
B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σχηματίζουμε την εξίσωση που συνδέει τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν και στηρίζεται στην υπόθεση του προβλήματος.
2. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης που σχηματίσαμε ως προς κατάλληλη μεταβλητή (συνήθως είναι ο χρόνος), και έτσι εμφανίζουμε τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.
3. Επιλύουμε την τελευταία ως προς τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.
4. **Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής σε συγκεκριμένη θέση** τότε θέτουμε στον τελικό τύπο τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές για την δεδομένη θέση και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής στο x_0 φανερώνει την “τάση” που έχει το μέγεθος $y = f(x)$ να μεταβληθεί στη θέση x_0 .



Έτσι: θετικός ρυθμός μεταβολής ($f'(x_0) > 0$) σημαίνει αύξηση (σχ. 1)

αρνητικός ρυθμός μεταβολής ($f'(x_0) < 0$) σημαίνει μείωση (σχ. 2)

$f'(x_0) = 0$ σημαίνει στασιμότητα (σχ. 3)

Μ' αυτήν τη λογική έχουμε τα πρόσημα στους αλγεβρικούς τύπους που προκύπτουν στην επίλυση των προβλημάτων.

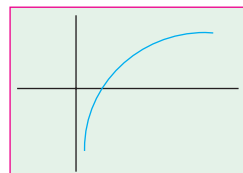
Για παράδειγμα το μέγεθος x αυξάνει με ρυθμό K μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = K$, αν το μέγεθος x μειώνεται με ρυθμό K μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = -K$.

2. Μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής του y ως προς x είναι το πηλίκο των μονάδων μέτρησης του μεγέθους y προς τις μονάδες μέτρησης του x .
3. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου της f . Έτσι αν για παράδειγμα $f''(x_0) < 0$ σημαίνει ότι η f' έχει “μειωτική τάση” στο x_0 ανεξάρτητα με την τάση που έχει η ίδια η f στο x_0 .

Για την $f(x) = \ln x$ με $x > 0$

έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Η f έχει τάση αύξησης.

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Η f' έχει τάση μείωσης.

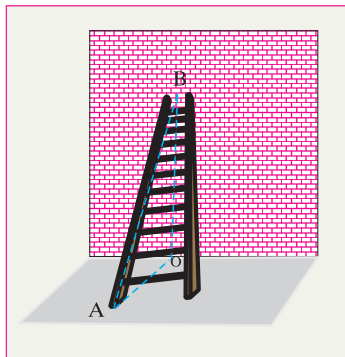


Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Μια σκάλα μήκους 13 m είναι στερεωμένη πλάγια σ' ένα τοίχο όπως στο σχήμα. Αν η βάση της γλυστράει με ρυθμό 4 m/sec να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας τη χρονική στιγμή που το κάτω μέρος βρίσκεται σε απόσταση $x = 5$ m από τον κατακόρυφο τοίχο.



Λύση

Έστω $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ οπότε $x'(t) = 4$ m/sec (θετικό γιατί είναι απομάκρυνση από το 0). Ζητούμενο $y'(t_0)$ όπου t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x(t_0) = 5$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $x^2(t) + y^2(t) = 13^2$.

Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0$ (1). Επίσης είναι $x(t_0) = 5$ και επειδή $x^2(t_0) + y^2(t_0) = 13^2$ έχουμε $y(t_0) = \sqrt{169 - 25} \Leftrightarrow y(t_0) = 12$ m.

Από την (1) έχουμε $5 \cdot 4 + 12y'(t_0) = 0$ οπότε είναι $y'(t_0) = -\frac{5}{3}$ m/sec.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{27}x^3$. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η τετμημένη ενός σημείου μεταβάλλεται γρηγορότερα της τεταγμένης του.

Λύση

Θέτουμε $x(t)$, $y(t)$ τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

της $y = \frac{1}{27}x^3$ και αφού μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου είναι: $y(t) = \frac{1}{27}x^3(t)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$(y(t))' = \left(\frac{1}{27}x^3(t) \right)' \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{27} \cdot 3x^2(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{9}x^2(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x^2(t)}{9} \quad (1) \text{ (αφού } x'(t) \neq 0 \text{)}. \text{ Απαιτούμε } x'(t) > y'(t) \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{x'(t)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2(t)}{9} < 1 \Leftrightarrow x^2(t) < 9 \Leftrightarrow x^2(t) - 9 < 0 \Leftrightarrow (x(t) - 3)(x(t) + 3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x(t) < 3$$

Έτσι όταν $-3 < x < 3$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης ενός σημείου είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Άσκηση 3

Δύο αυτοκίνητα κινούνται σε κάθετους δρόμους. Το Α απομακρύνεται από τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 80 Km/h και το Β πλησιάζει τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 60 Km/h. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους όταν το Α απέχει από το Ο 8 km και το Β απέχει από το Ο 6 Km.

Λύση

Θεωρούμε $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ και $AB = s(t)$

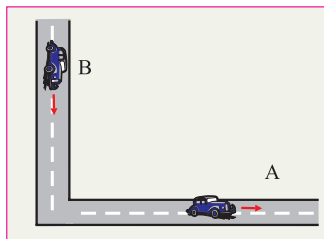
Είναι $x'(t) = 80$ Km/h (το μέγεθος x αυξάνεται) και $y'(t) = -60$ Km/h (το μέγεθος y μειώνεται). Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $x^2(t) + y^2(t) = s^2(t)$.

Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 2s(t)s'(t)$.

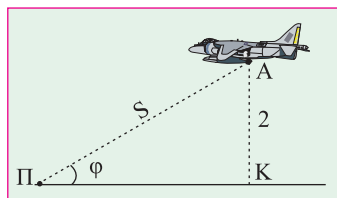
Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) = 2s(t_0)s'(t_0)$ (1) με

$$s(t_0) = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Άρα από την (1) προκύπτει: $8 \cdot 80 + 6(-60) = 10 s'(t_0) \Leftrightarrow s'(t_0) = 28$ Km/h

**Άσκηση 4**

Πολυβολητής (Π) αντιαεροπορικού βλέπει να έρχεται προς το μέρος του αεροπλάνο που πετά σε σταθερό ύψος 2 km με ταχύτητα 500 km/h. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ όταν η απόσταση του πολυβολητή από την προβολή Κ του αεροπλάνου στο έδαφος είναι 8 km.

**Λύση**

Θεωρούμε $ΑΠ = s(t)$, $ΠΚ = x(t)$, $x'(t) = -500$ km/h, $AK = 2$ Km.

Είναι $\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{2}{s(t)}\right)$ και με παραγωγή έχουμε $\frac{1}{\sin^2(\varphi(t))} \varphi'(t) = \frac{-2x'(t)}{x^2(t)}$ (1).

Τη χρονική στιγμή t_0 όπου $x(t_0) = 8$ θα είναι $\sin(\varphi(t_0)) = \frac{2}{s(t_0)} = \frac{2}{\sqrt{64+4}} = \frac{2}{\sqrt{68}}$.

Από την (1) έχουμε $\varphi'(t_0) = \frac{-2x'(t_0)}{x^2(t_0)} \cdot \sin^2(\varphi(t_0)) = \frac{-2 \cdot (-500)}{8^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{68}}\right)^2 = \frac{10^3}{68} \text{ rad/sec}.$

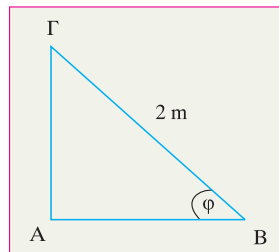
Άσκηση 5

Η γωνία του διπλανού σχήματος αυξάνεται με ρυθμό 1° ανά δευτερόλεπτο. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς ΑΓ, ως προς τον χρόνο, όταν $\varphi = 60^\circ$.

Λύση

Έστω $ΑΓ = x$. Τότε $x = 2\eta\mu\varphi$, οπότε με παραγωγή παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(2\eta\mu\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = 2\sigma\upsilon\eta\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$



Προσοχή!

Δίνεται ότι η γωνία μεταβάλλεται με ρυθμό 1° ανά δευτερόλεπτο.

Είναι λάθος να γράψουμε ότι $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, κι' αυτό διότι η παραγωγή έγινε με βάση τους γνωστούς κανόνες παραγωγής τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι οποίοι ισχύουν μόνο όταν οι γωνίες είναι εκφρασμένες σε rad, δηλαδή σε ακτίνια.

Άρα πρέπει να εκφράσουμε το ρυθμό μεταβολής σε rad / sec και όχι σε μοίρες / sec.

Επειδή 1° είναι $\frac{\pi}{180}$ rad, έχουμε: $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = 2\sin 60^\circ \frac{\pi}{180} \text{ m/sec} = \frac{\pi}{180} \text{ m/sec}$.

Α. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος u . Να βρείτε :

- το εμβαδόν E του τριγώνου ως συνάρτηση του ύψους
- το ρυθμό μεταβολής του E ως προς το ύψος όταν $u = \sqrt{6}$.

$$(\text{Απ.: i. } E(u) = \frac{\sqrt{3}}{3} u^2, \text{ ii. } E'(\sqrt{6}) = 2\sqrt{2})$$

2. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις x, y . Οι διαστάσεις αυξάνουν με ρυθμό 4 m/sec και 5 m/sec αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , ως συνάρτηση του χρόνου t , την χρονική στιγμή t_0 , όπου $x = 30 \text{ cm}$ και $y = 40 \text{ cm}$.

$$(\text{Απ.: } 3,1 \text{ m}^2/\text{sec})$$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma = 12 \text{ cm}$. Η κορυφή A απομακρύνεται από την $B\Gamma$ με ταχύτητα 3 m/sec . Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή απέχει από την $B\Gamma$ 8 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α. της γωνίας BAG

β. της απόστασης AB .

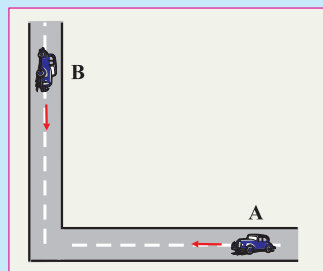
4. Οι τροχιές δύο οχημάτων A και B είναι κάθετες. Τα οχήματα A, B κινούνται όπως στο σχήμα έτσι ώστε:

$$(OA) + (OB) = 20 \text{ m.}$$

Την χρονική στιγμή t_0 το όχημα A κινείται με ταχύτητα 5 m/sec και απέχει από το O απόσταση $(OA) = 4 \text{ cm}$.

Να βρείτε: i. την ταχύτητα του οχήματος B

ii. τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης AB .

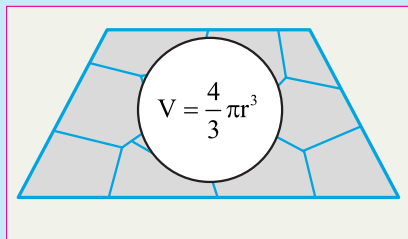


5. Ένας παρατηρητής (Π) βρίσκεται σε απόσταση 400 m από ένα αερόστατο (Α). Το αερόστατο ανέρχεται από το έδαφος με ταχύτητα 5 m/sec . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\vartheta = \hat{A\Pi T}$ και της απόστασης ΠT την χρονική στιγμή t_0 την χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται 500 m πάνω από το έδαφος, αν T η προβολή του αερόστατου στο έδαφος.

6. Μια μπάλα χιονιού σχήματος σφαίρας αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της μπάλας δίνεται από τον τύπο:
 $\rho = 5 - t^2$, ρ σε cm όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας την χρονική στιγμή $t = 2$ sec.

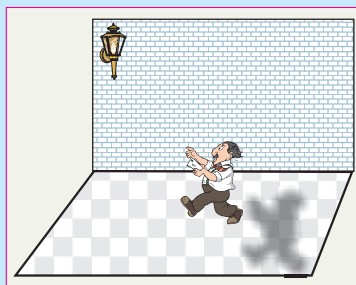
(όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

(Απ.: $-16\pi \text{ cm}^3/\text{s}$)

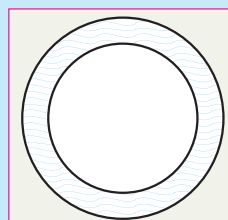


7. Ένας άνθρωπος με ύψος 1,70 m περπατάει με ταχύτητα 2 m/sec προς ένα φανοστάτη ύψους 3 m από το έδαφος. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του ανθρώπου.

(Απ.: $2,6 \text{ m/sec}$)



8. Το εμβαδόν του δακτυλίου που περικλείεται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι σταθερό και ίσο με $10\pi \text{ cm}^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι $5 \text{ m}^2/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου την χρονική στιγμή t_0 που το εμβαδόν του είναι $30\pi \text{ cm}^2$.



9. Αν $\kappa(x), \pi(x)$ είναι το κόστος παραγωγής και η τιμή πώλησης x μονάδων προϊόντος με τύπους: $\kappa(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 25x^2 - 300x + 500$ και $\pi(x) = 300x - 300$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους. Πότε ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός;

10. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + 7t - 3, \quad 0 \leq t \leq 8$$

- Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του κινητού.
- Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα είναι 6 μονάδες ανά sec;

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $x > 1$ και τα σημεία $A(x-1, 0)$ και $B(0, \ln x)$.

Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής:

α. Της απόστασης (AB), τη χρονική στιγμή κατά την οποία $x = 2 \text{ cm}$.

β. Του εμβαδού του τριγώνου OAB (O η αρχή των αξόνων) την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνεται ότι: $\ln 2 \approx 0,7$ και $\sqrt{1,49} \approx 1,22$



Θεωρήματα Rolle – Μέσης Τιμής

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης τιμής

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Θεωρήματα Rolle - Μέσης τιμής

Θεώρημα Rolle

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι : είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$

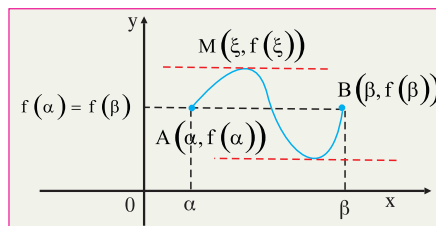
είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ και

$$f(α) = f(β)$$

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε : $f'(ξ) = 0$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου στο διάστημα $(α, β)$.

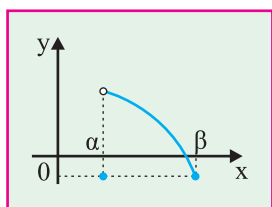
Γεωμετρική ερμηνεία

"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ ∈ (α, β)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(ξ, f(ξ))$ να είναι παράλληλη (στην χορδή AB) στον άξονα $x'x$ ".

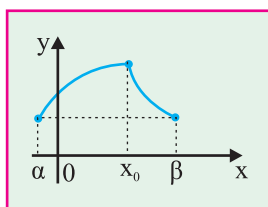


Παρατηρήσεις - Σχόλια

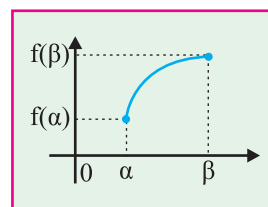
1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
2. Πρέπει να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλιώς δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Δεν είναι συνεχής στο $[α, β]$



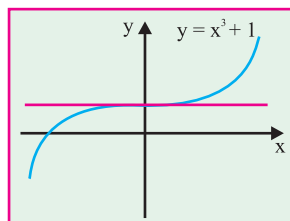
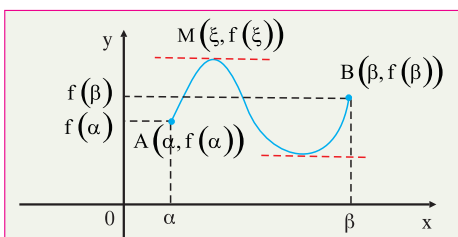
Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 ∈ (α, β)$



$f(α) ≠ f(β)$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ είναι και συνεχής στο $[α, β]$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

4. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει ρίζα της παραγώγου χωρίς να ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπου δεν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.



5. Το θεώρημα του Rolle εξασφαλίζει ότι μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f' . Δηλαδή αν $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ τότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γενίκευση: Εάν η f είναι n -φορές παραγωγίσιμη και έχει κ διακεκριμένες ρίζες τότε η f' έχει $\kappa - 1$ διακεκριμένες ρίζες, η f'' έχει $\kappa - 2$ διακεκριμένες ρίζες κ.λ.π..

6. Επειδή στις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αναφέρεται ότι "η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) " τότε η f θα είναι και συνεχής στο (α, β) . Άρα η προϋπόθεση "η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ "

μπορεί να αντικατασταθεί από το: " $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$ ".

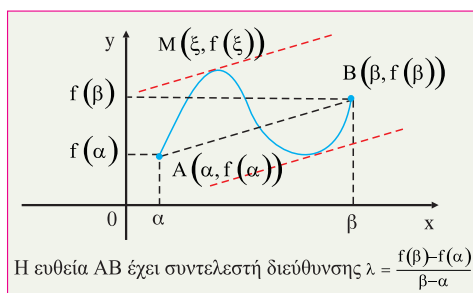
Από αυτά προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ οπότε η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Θεώρημα μέσης τιμής

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν ότι: είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε: υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία



"Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία (χορδή) AB ".

- Κλασσική φυσική ερμηνεία: “Υπαρξη χρονικής στιγμής t_0 όπου η στιγμιαία ταχύτητα $s'(t_0) = v(t_0)$ γίνεται ίση με την μέση ταχύτητα v του κινητού”.

Παράδειγμα: Το κινητό διήνυσε 200km σε 2,5 ώρες οπότε η συνάρτηση θέσης $s(t)$ είναι συνεχής στο $[0, 2,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2,5)$ οπότε υπάρχει $t_0 \in (0, 2,5)$:

$$s'(t_0) = \frac{s(2,5) - s(0)}{2,5 - 0} = \frac{200 - 0}{2,5} = 80 \text{ km/h}$$

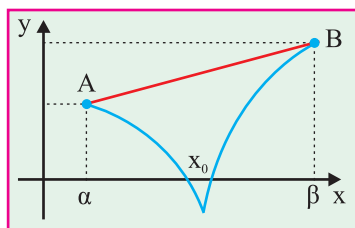
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Στην ειδική περίπτωση που εκτός από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. ισχύει επιπλέον ότι

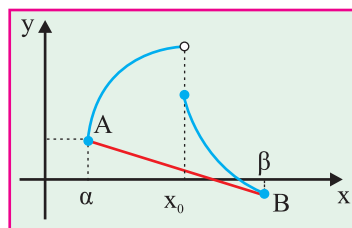
$$f(a) = f(b) \text{ τότε υπάρχει } \xi \in (a, b) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

(το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.)

2. Αν κάποια από τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. δεν ισχύει, τότε το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

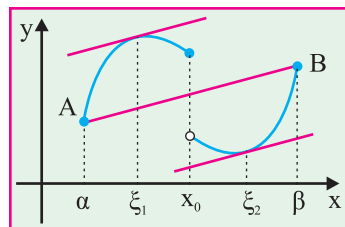


Δεν είναι παραγωγίσιμη
η f στο (a, b)



Δεν είναι συνεχής
στο $[a, b]$

3. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλά να υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην AB .



4. Το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ή} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

5. Επειδή $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(\xi)$ δεν μας περιορίζει η διάταξη των a και b αρκεί βέβαια $a \neq b$.

6. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ τότε θα είναι και συνεχής στο $[a, b]$ άρα το θεώρημα πάλι εφαρμόζεται.

II. Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής

Πρόταση 1

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ δηλαδή $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλια

1. Το αντίστροφο της πρότασης προφανώς ισχύει οπότε έχουμε πλέον την ισοδυναμία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \Delta.$$

2. Η πρόταση δεν ισχύει όταν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα:

αν $f(x) = \begin{cases} 3, & x > 0 \\ -5, & x < 0 \end{cases}$ όπου f συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, έχουμε $f'(x) = 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. Εάν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ τότε: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλιο

Από την πρόταση 2 προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- Διαφέρουν μεταξύ τους κατά c , δηλαδή $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Έχουν παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία με ίδια τετμημένη $\xi \in \Delta$, $\lambda = f'(\xi) = g'(\xi)$.
- Έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής.

Για τον προσδιορισμό μιας από αυτές απαιτείται μία επιπλέον συνθήκη.

Παρατήρηση

Το διάστημα Δ στις προτάσεις 1 και 2 μπορεί να είναι:

$$[a, \beta], [a, \beta), (a, \beta], (a, \beta), (-\infty, \beta], (-\infty, \beta), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε διάστημα (a, β) :

α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).

β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο a' μέλος.

γ. Θεωρούμε το a' μέλος ίσο με μια συνάρτηση f . Εάν ο έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano στην f δεν αποδόσει, τότε θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει παράγωγο την f και σε αυτήν εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle. (Την F τη λέμε αρχική ή παράγουσα της f).

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4 + 4ax^3 - 1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $[x^5 + ax^4 - (a+1)x]' = 0$, οπότε:

θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = x^5 + ax^4 - (a+1)x$, με $a, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 - (a+1)$ και $f(0) = f(1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε, $f'(\xi) = 0$ δηλαδή $5\xi^4 + 4a\xi^3 - 1 = a$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται το πολύ μια ρίζα σε διάστημα Δ
Δύο βασικές επιλογές

1^η: Απαγωγή σε άτοπο από το Θ. Rolle

Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Rolle θα έχει η $f'(x)$ τουλάχιστον μία ρίζα που αποδεικνύεται άτοπο από τα δεδομένα

- είτε επειδή η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$,

- είτε επειδή η ρίζα της $f'(x) = 0$ δεν ανήκει στο (α, β) .

2^η: Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη ή 1-1 οπότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η $2x^3 - 3x^2 - 36x + \text{συν}\theta = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση

Έστω ότι έχει δύο ρίζες $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Στο $[\rho_1, \rho_2]$ εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + \text{συν}\theta$ η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα έχουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0, 1)$.

$$\text{Όμως } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ή} \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{άτοπο διότι δεν ανήκουν}$$

στο $(0, 1)$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η εξίσωση $a^x + \beta^x = \gamma^x$ με $0 < a < \beta < \gamma$, έχει το πολύ μια πραγματική λύση.

Λύση

Είναι $a^x + \beta^x = \gamma^x \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x - 1 = 0$. Θεωρούμε την $f(x) = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x + (-1)$, ορισμέ-

νη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος είναι $f'(x) = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x \ln\left(\frac{a}{\gamma}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x \ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) < 0$ για $x \in \mathbb{R}$

(αφού $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x > 0$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x > 0$, $\ln\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) < 0$, $\ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) < 0$). Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική λύση.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει n το πολύ ρίζες.

Δείχνουμε ότι αποκλείεται να έχει $n + 1$ ρίζες. Αυτό γίνεται με τους εξής τρόπους:

i. Με το θεώρημα του Rolle στα n διαστήματα

α. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μια παραπάνω ρίζα

β. Θεωρούμε συνάρτηση αφού μεταφέρουμε τους όρους της εξίσωσης σε ένα μέλος.

γ. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες που υποθέσαμε και οδηγούμαστε σε άτοπο.

ii. Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα.

iii. Με τον βαθμό της συνάρτησης αν βέβαια προκειται για πολυωνυμική.

Αν το άτοπο δεν “φαίνεται” εύκολα, εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Rolle στα $n - 1$ διαστήματα ή ακόμη και στα $n - 2$, $n - 3$, έως ότου καταλήξουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Λύση

Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση, δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - ax$, έχει τρεις ρίζες $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - ax$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ με $f'(x) = -e^{-x} - a$.

Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και $f(x_2) = f(x_3) = 0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και έτσι υπάρχουν, $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$, αντίστοιχα.

Η συνάρτηση $f'(x) = -e^{-x} - a$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ με $f''(x) = e^{-x}$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$,

δηλαδή $e^{-x_0} = 0$ άτοπο. Άρα η δοσμένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες οπότε θα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Σχόλιο: Όταν ζητείται μια ακριβώς ρίζα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο (Θ. Bolzano ή Rolle) και στη συνέχεια το πολύ μια με την προηγούμενη μέθοδο.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση

Η εξίσωση $3^x = \frac{1}{x}$ ισοδυναμεί με την $x \cdot 3^x - 1 = 0$ στο διάστημα $(0,1)$ οπότε για την $f(x) = x \cdot 3^x - 1$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$. Αν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3^\xi + \xi 3^\xi = 0 \Leftrightarrow 3^\xi(1 + \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = -1$ (άτοπο) άρα η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f .

α. Οριζόντιας εφαπτομένης της f σε διάστημα $[a, b]$.

β. Εφαπτομένης που πληροί ορισμένες (γεωμετρικές) προϋποθέσεις.

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{x^2 + 1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση

Έστω $k \in \mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[k, k+1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(k, k+1)$.

Ισχύει $f(k) = 0 = f(k+1)$ οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $k \in (k, k+1)$ ώστε

$f'(k) = 0$. Αφού $k \in \mathbb{Z}$, τα διαστήματα είναι άπειρα δηλαδή υπάρχουν άπειρες εφαπτόμενες της με συντελεστή διεύθυνσης $f'(k) = 0$ και επομένως είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Παράδειγμα 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi x) + \alpha x^2 + \beta x$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta = 1$ (1). Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1: y + x = 3$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha + \beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(x_0) = 1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$. Ισχύει $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία ε σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ε_1 .

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη $x_0 \in (a, \beta)$ που πληρεί μια συνθήκη $h(x_0) = 0$

Επιλέγουμε μια συνάρτηση $H(x)$ για την οποία ισχύει $H'(x) = h(x)$ και αποδεικνύουμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

Τότε θα υπάρχει $x_0 \in (a, \beta) : H'(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) = 0$.

Η συνάρτηση H ονομάζεται “αρχική” ή “παράγουσα” της h .

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον παρακάτω πίνακα:

Δίνεται ότι: η f συνεχής στο $[a, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (a, β) Ζητείται η ύπαρξη ξ που ικανοποιεί τη σχέση	Βοηθητική συνάρτηση h στην οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle
$f'(\xi) = c$	$h(x) = f(x) - cx$
$f'(\xi) = v\xi^{v-1}$	$h(x) = f(x) - x^v$
$f'(\xi) \cdot (c - \xi) = f(\xi)$	$h(x) = (x - c)f(x)$
$f'(\xi) \cdot (\xi - c) = f(\xi)$	$h(x) = \frac{f(x)}{x - c}$
$\xi \cdot f'(\xi) = v \cdot f(\xi)$	$h(x) = \frac{f(x)}{x^v}$
$f'(\xi) = cf(\xi)$	$h(x) = e^{-cx}f(x)$

Σχόλιο

Αποκλείεται το Θεώρημα Bolzano όταν δεν τονίζεται ότι $f'(x)$ είναι συνεχής.

Δύο ειδικές περιπτώσεις

1. Αν $g(x) \neq 0$ και ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0) = 0$

θεωρούμε την συνάρτηση $T(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ως βοηθητική.

2. Αν ζητείται η ύπαρξη ενός x_0 ώστε $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

θεωρούμε την συνάρτηση $S(x) = e^{g(x)}f(x)$ ως βοηθητική.

Σχόλιο

Για την επιλογή της βοηθητικής συνάρτησης σε κάποιες ασκήσεις δίνουν σημαντική πληροφορία οι σχέσεις στα άκρα του διαστήματος που δίνονται από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) = f(b) = 0$.

i. Για την συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, $c \notin [a, b]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b) : F'(x_0) = 0$

ii. Αν $c \in [a, b]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

Λύση

i. Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως πηλίκο συνεχών.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

$$F(a) = \frac{f(a)}{a-c} = 0 \quad \text{και} \quad F(b) = \frac{f(b)}{b-c} = 0 \quad \text{άρα} \quad F(a) = F(b) = 0.$$

Συνεπώς από το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (a, b) : F'(x_0) = 0$

$$\text{ii. Έχουμε: } F'(x) = \frac{f'(x)(x-c) - f(x)(x-c)'}{(x-c)^2} = \frac{f'(x)(x-c) - f(x)}{(x-c)^2}.$$

$$\text{Αφού } F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)(x_0 - c) - f(x_0) = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Εξετάζουμε αν το σημείο $(c, 0)$ την επαληθεύει. Πράγματι λόγω της (1) ισχύει:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(c - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)(x_0 - c) - f(x_0) = 0.$$

Παράδειγμα 9

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\kappa) = \lambda^2$ και $f(\lambda) = \kappa^2$ και $\kappa > \lambda$ να δείχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\lambda, \kappa)$ με $f'(\xi) = -2\xi$.

Λύση

Είναι $f'(\xi) + 2\xi = 0$ οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2$, $x \in [\lambda, \kappa]$ με $g'(x) = f'(x) + 2x$.

Η g είναι συνεχής στο $[\lambda, \kappa]$, παραγωγίσιμη στο (λ, κ) και $g(\lambda) = g(\kappa) = \kappa^2 + \lambda^2$. Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\lambda, \kappa)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -2\xi$.

Παράδειγμα 10

Έστω f παραγωγίσιμη στο (e, e^2) συνεχής στο $[e, e^2]$ για την οποία ισχύει: $f(e^2) = 2f(e)$.

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (e, e^2)$ ώστε $f'(\xi) \cdot \ln \xi^\xi = f(\xi)$.

Λύση

Αρκεί η $f'(x) \ln x^x = f(x)$ να έχει λύση στο (e, e^2) .

$$\text{Ισχύει } f'(x) \ln x^x = f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot x \cdot \ln x = f(x) \Leftrightarrow f'(x) \ln x = \frac{1}{x} f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \ln x = (\ln x)' f(x) \Leftrightarrow f'(x) \ln x - (\ln x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \ln x - (\ln x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\ln x} \right)' = 0.$$

Θεωρούμε την $G(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$ για την οποία ισχύει το Θ. Rolle στο $[e, e^2]$ (είναι εύκολη η απόδειξη). Άρα υπάρχει $\xi \in (e, e^2)$ ώστε $G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \ln \xi^\xi = f(\xi)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Στις ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη $\xi \in (a, \beta) : f''(\xi) = 0$.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Τα ξ_1, ξ_2 προκύπτουν εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλα διαστήματα $[a, \kappa]$, $[\kappa, \beta]$.

Στη συνέχεια αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f' θα υπάρχει $\xi \in (a, \beta) : f''(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 11

Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ συνάρτηση f . Αν γνωρίζεται ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την χορδή AB στο $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $A(a, f(a))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $a < \gamma < \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta) : f''(\xi) = 0$.

Λύση

Στο (a, γ) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_1 :

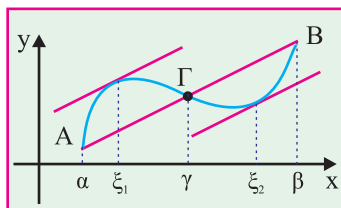
$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = \lambda_{A\Gamma} \text{ (συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ).}$$

Στο (γ, β) από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ_2 :

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \lambda_{\Gamma B}. \text{ Όμως } \lambda_{A\Gamma} = \lambda_{\Gamma B} \text{ οπότε } f'(\xi_1) = f'(\xi_2).$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) : f''(\xi) = 0$.



Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη ύπαρξης $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v \in (a, b)$ που πληρούν μια συγκεκριμένη σχέση.

Εδώ πρόκειται για εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα που προκύπτουν από κατάλληλη διαμέριση του $[a, b]$ η οποία διαμέριση υπαγορεύεται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Στην ειδική περίπτωση που ζητείται ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ και το επιτρέπει το πρόβλημα

προχωρούμε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left(a, \frac{a+b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$,

(το πλάτος $c = \frac{b-a}{2}$)

Διαφορετικά από την σχέση των ξ_1, ξ_2 και από τα δεδομένα του προβλήματος θα προχωρήσουμε στην επιλογή του κ για την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[a, \kappa], [\kappa, b]$.

(Το κ δεν είναι πάντα το μέσο του (a, b))

Παράδειγμα 12

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f(a) = 1$ και $f(b) = 2004$. Δείξτε ότι

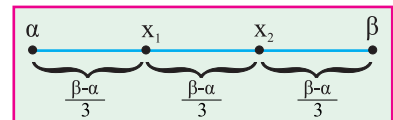
υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{6009}{b-a}$.

Λύση

Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα πλάτους $\frac{b-a}{3}$.

Προφανώς ισχύει: $x_1 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}$,

$$x_2 = a + 2 \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{3}$$



Εύκολα συμπεραίνουμε ότι για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, b]$. Επομένως υπάρχουν: $\xi_1 \in (a, x_1)$ με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f\left(\frac{2a+b}{3}\right) - f(a)}{\frac{2a+b}{3} - a} = \frac{f\left(\frac{2a+b}{3}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{3}} \quad (1) \text{ και}$$

$\xi_2 \in (x_1, x_2)$ με

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f\left(\frac{a+2b}{3}\right) - f\left(\frac{2a+b}{3}\right)}{\frac{a+2b}{3} - \frac{2a+b}{3}} = \frac{f\left(\frac{a+2b}{3}\right) - f\left(\frac{2a+b}{3}\right)}{\frac{b-a}{3}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\xi_3 \in (x_2, \beta) \text{ με } f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha + 2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) και έχουμε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} + \frac{f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} + \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} =$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} = \frac{3[f(\beta) - f(\alpha)]}{\beta - \alpha} \stackrel{\text{υπόθεση}}{=} \frac{3[2004 - 1]}{\beta - \alpha} = \frac{6009}{\beta - \alpha}.$$

Παράδειγμα 13

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = e$ και $f(\beta) = -e$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) .

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\beta - \alpha}{e}$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) < 0$ οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = 0$.

ii. Θεωρούμε τα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ σε καθένα από τα οποία για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ.

$$\text{οπότε υπάρχει } \xi_1 \in (\alpha, \xi) \text{ με } f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{0 - e}{\xi - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{\alpha - \xi}{e} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως υπάρχει } \xi_2 \in (\xi, \beta) \text{ με } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{-e - 0}{\beta - \xi} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\xi - \beta}{e}$$

$$\text{οπότε } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\alpha - \xi}{e} + \frac{\xi - \beta}{e} = \frac{\alpha - \beta}{e}.$$

Παράδειγμα 14

Για τη συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2002, 2006]$ ισχύει $2f(2004) = f(2002) + f(2006)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[2002, 2004]$ και $[2004, 2006]$.

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν : $\xi_1 \in (2002, 2004)$ και $\xi_2 \in (2004, 2006)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2004 - 2002} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2006 - 2004}$$

$$\text{ή} \quad f'(\xi_1) = \frac{f(2004) - f(2002)}{2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2006) - f(2004)}{2}$$

Ισχύει : $2f(2004) = f(2002) + f(2006) \Leftrightarrow f(2004) - f(2002) = f(2006) - f(2004)$.

Επομένως είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και ισχύει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, επομένως από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ δηλαδή $\xi \in (2002, 2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

ι. Διπλή ανισοτική σχέση

α. Μετατρέπουμε την ανισότητα σε $K < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \Lambda$

β. Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση f και το διάστημα $[\alpha, \beta]$

γ. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ οδηγούμαστε στην ύπαρξη κάποιου

$$\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \text{ Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι } K < f'(\xi) < \Lambda.$$

Η ισχύς της τελευταίας ανίσωσης προκύπτει είτε από απλές πράξεις είτε με χρήση της μονοτονίας της f' .

Παράδειγμα 15

Δείξτε ότι $1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}$.

Λύση

$$\text{Είναι } 1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) - 1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} < \frac{\ln(1+e) - \ln e}{(1+e) - e} < \frac{1}{e}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με $x \in [e, 1+e]$. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Οπότε υπάρχει $\xi \in (e, 1+e)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(1+e) - f(e)}{1+e - e} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\ln(1+e) - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(1+e) - 1$$

$$\text{Επειδή } \xi \in (e, 1+e) \text{ είναι } 0 < e < \xi < 1+e \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+e} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) - 1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{1+e}.$$

Παράδειγμα 16

Αν $0 < \alpha < \beta$ ναδειχθεί ότι: $(\alpha e)^{\beta-\alpha} < \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta e)^{\beta-\alpha}$.

Λύση

Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $(\beta - \alpha) \ln(\alpha e) < \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta - \alpha) \ln(\beta e) \Leftrightarrow$

$$(\beta - \alpha) \ln(\alpha e) < \beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha < (\beta - \alpha) \ln(\beta e) \Leftrightarrow \ln(\alpha e) < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln(\beta e) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $f'(x) = \ln x + 1$.

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 1 + \ln \xi = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \ln(\xi e) = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\text{Αλλά } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \alpha e < e\xi < \beta e \xrightarrow{\ln} \ln(\alpha e) < \ln(\xi e) < \ln(\beta e) \Leftrightarrow$$

$$\ln(\alpha e) < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln(\beta e) \Leftrightarrow (\alpha e)^{\beta-\alpha} < \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta e)^{\beta-\alpha} \quad (1)$$

Παράδειγμα 17

Για κάθε $\kappa > 0$ δείξτε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} + \sqrt[5]{\kappa} > \sqrt[5]{4\kappa}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} + \sqrt[5]{\kappa} > \sqrt[5]{4\kappa} \Leftrightarrow \frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa} \Leftrightarrow \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{\sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa}}{3\kappa} \Leftrightarrow \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{\sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa - \kappa}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[5]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\kappa, 4\kappa]$ με $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (\kappa, 4\kappa)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(4\kappa) - f(\kappa)}{4\kappa - \kappa}$, δηλαδή:

$$\frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}} = \frac{\sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa - \kappa} \quad (1). \text{ Όμως αφού } 0 < \kappa < \xi \text{ θα έχουμε:}$$

$$\kappa^4 < \xi^4 \Leftrightarrow \sqrt[5]{\kappa^4} < \sqrt[5]{\xi^4} \Leftrightarrow \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}} \text{ και από (1) είναι: } \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{\sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa - \kappa}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σ' ένα διάστημα Δ . Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε διάστημα και για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος η παράγωγος υπάρχει και είναι μηδέν.

Παράδειγμα 18

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x)(x+10) = f(x)$, $x > 0$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x+10}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$.

β. Βρείτε την συνάρτηση f εάν $f(1) = 1$.

Λύση

α. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{(x+10)f'(x) - f(x)}{(x+10)^2} \stackrel{\text{υποθ.}}{=} 0$. Άρα $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

β. Είναι $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+10} = c \Leftrightarrow f(x) = c(x+10)$ με $f(1) = 1$ προκύπτει ότι $c = \frac{1}{11}$.

Άρα $f(x) = \frac{1}{11}(x+10)$, $x > 0$.

Σχόλιο: Εδώ φαίνεται ότι με τη βοήθεια μιας σταθερής συνάρτησης υπολογίζεται ο τύπος μιας άλλης συνάρτησης.

Κατηγορία – Μέθοδος 10

Εύρεση του τύπου συνάρτησης $f(x)$ με την επίλυση εξίσωσης στην οποία υπάρχουν και η $f(x)$ αλλά και η $f'(x)$.

Εκμεταλλεζόμενοι κατάλληλα τα συμπεράσματα των παρακάτω προτάσεων

1. Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ και $x \in \Delta$ (Δ διάστημα)
2. Αν $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ και $x \in \Delta$ (Δ διάστημα)
3. Αν $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, $x \in \Delta$, $c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 19

Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)(\kappa - x) = f(x)$, $x \neq \kappa$.

Λύση

Είναι: $f'(x)(\kappa - x) - f(x) = 0$ ή $f'(x)(\kappa - x) + (\kappa - x)'f(x) = 0$ ή $[f(x)(\kappa - x)]' = 0$

Άρα η $g(x) = f(x)(\kappa - x) = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{\kappa - x}$ για κάθε $x \neq \kappa$, $c \in \mathbb{R}$.

Δίνουμε ένα πίνακα ενδεικτικών παραδειγμάτων

Ζητάμε συνάρτηση f για την οποία ισχύει	Θεωρούμε συνάρτηση g που από την συνθήκη θα είναι $g'(x) = 0$	Βρίσκουμε τον τύπο της f
$f'(x) = cf(x)$ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: $f'(x) = h'(x) \cdot f(x)$	$g(x) = e^{-cx} \cdot f(x)$ $g(x) = e^{-h(x)} \cdot f(x)$	$f(x) = k \cdot e^{cx}$ $f(x) = k \cdot e^{h(x)}$
$f'(x) \cdot (x - c) = f(x)$	$g(x) = \frac{f(x)}{x - c}$	$f(x) = k \cdot (x - c)$
$f'(x) \cdot (c - x) = f(x)$	$g(x) = (x - c)f(x)$	$f(x) = \frac{k}{x - c}$
$xf'(x) = v \cdot f(x)$	$g(x) = \frac{f(x)}{x^v}$	$f(x) = k \cdot x^v$

Παρατηρήσεις

- α. Στον παραπάνω πίνακα, η k είναι σταθερά η οποία μπορεί να υπολογιστεί αν μας δίνουν επιπλέον πληροφορίες για την f .
 β. Το c στις ασκήσεις, μπορεί να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Παράδειγμα 20

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $xf'(x) = 3f'(x) + f(x)$ για $x \neq 3$ και $f'(3) = 2$. Να βρεθεί η f .

Λύση

Είναι για $x \neq 3$:

$$xf'(x) = 3f'(x) + f(x) \Leftrightarrow (x-3)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (x-3)f'(x) - (x-3)'f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)f'(x) - (x-3)'f(x)}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-3} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-3} = c \Leftrightarrow f(x) = c(x-3), c \in \mathbb{R},$$

$x \neq 3$ (1). Όμως η f είναι συνεχής στο 3 άρα $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$. Επομένως $f(x) = c(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$. Από (1) έχουμε: $f'(x) = c$ και $f'(3) = 2$ οπότε $c = 2$. Τότε $f(x) = 2(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 21

Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g(0) = 100$ (1) και $g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sin x$ (2)

Λύση

Είναι $\sin x \neq 0$ αφού $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και από την (2) έχουμε:

$$\frac{g'(x)\sin x + g(x)\eta\mu x}{\sin^2 x} = \frac{g(x)\sin x}{\sin^2 x} \quad \eta \quad \frac{g'(x)\sin x - g(x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{g(x)}{\sin x} \quad \eta$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \left(\frac{g(x)}{\sin x}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι αν $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Έτσι $\frac{g(x)}{\sin x} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = ce^x \sin x$. Όμως $g(0) = 100 \Leftrightarrow c \cdot e^0 \cdot \sin 0 = 100 \Leftrightarrow c = 100$.

Άρα $g(x) = 100e^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & -2 \leq x < 0 \\ \alpha x^2 + 3x + 3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται για την f του Θ . Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2, 0) \cup (0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ . Rolle η f πρέπει να είναι συνεχής και στο 0

Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \gamma = 3$ και παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \beta x + \gamma - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + \beta)}{x} = \beta$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x^2 + 3x + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\alpha x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha x + 3) = 3 \text{ οπότε } \beta = 3.$$

Ακόμη $f(-2) = (-2)^2 + \beta(-2) + \gamma = 4 - 2\beta + \gamma = 4 - 2 \cdot 3 + 3 = 4 - 6 + 3 = 1$ και

$$f(2) = \alpha \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 4\alpha + 6 + 3 = 4\alpha + 9$$

Πρέπει $f(-2) = f(2) \Leftrightarrow 1 = 4\alpha + 9 \Leftrightarrow \alpha = -2$. Άρα $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 3, 1)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Να βρείτε το ξ .

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολωνυμική. Επίσης είναι $f(0) = 2$ και $f(1) = 2$ από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = 0$.

Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 8\xi - 5 = 0 \Leftrightarrow \xi_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{-8 - \sqrt{124}}{6} < 0, \text{ (απορρίπτεται)} \\ \xi_2 = \frac{-8 + \sqrt{124}}{6}, \text{ (δεκτή)} \end{cases}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \frac{16}{3}x^3 - 10x^2 + 8x + 2003$, $x \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι $\xi \in (0,1)$ με $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 16x^2 - 20x + 8$.

Για την συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, διότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$ και $f'(0) = 8$ και $f'(1) = 8$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,e]$ με $f(1) = 0$ και $f(e) = -1$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g(x) = \ln x + f(x)$, $x \in [1,e]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1,e)$ με $g'(\xi) = 0$.

Λύση

Οι συναρτήσεις $f, \ln x$ είναι παραγωγίσιμες στο $[1,e]$ άρα και συνεχείς σ' αυτό.

Επίσης $g(1) = \ln 1 + f(1) = 0 + 0 = 0$ και $g(e) = \ln e + f(e) = 1 - 1 = 0$.

Ισχύουν για την g οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[1,e]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[a, a+1]$ για την οποία ισχύει $2002 \leq f'(x) \leq 2003$ για κάθε $x \in (a, a+1)$. Εάν $f(a) = 1$ δείξτε ότι $2003 \leq f(a+1) \leq 2004$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(a, a+1)$ εφ'όσον $2002 \leq f'(x) \leq 2003$ για κάθε $x \in (a, a+1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[a, a+1]$ οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (a, a+1)$ με

$f'(\xi)(\alpha+1-\alpha) = f(\alpha+1) - f(\alpha) \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\alpha+1) - 1$. Όμως $2002 \leq f'(x) \leq 2003$ για κάθε $x \in (\alpha, \alpha+1)$ οπότε $2002 \leq f'(\xi) \leq 2003 \Leftrightarrow 2002 \leq f(\alpha+1) - 1 \leq 2003 \Leftrightarrow 2003 \leq f(\alpha+1) \leq 2004$.

Άσκηση 6

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0) = -\frac{1}{e}$ και η συνάρτηση

$F(x) = f(x) + e^{-x}$, $x \in [0,1]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

α. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) = 0$.

β. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = \frac{1}{e^\xi}$.

Λύση

α. Αφού για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle είναι:

$$F(0) = F(1) \Leftrightarrow f(0) + e^{-0} = f(1) + e^{-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{e} + 1 = f(1) + \frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(1) = \frac{e-2}{e} > 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και $f(0)f(1) < 0$. Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Για την F ισχύει το Θ. Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - e^{-\xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = e^{-\xi} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{e^\xi}.$$

Άσκηση 7

Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x - x^2 - x + 13 = 0$ έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x^2 - x + 13$ οπότε $f'(x) = e^x - 2x - 1$, $f''(x) = e^x - 2$ και $f'''(x) = e^x$. Θεωρούμε ότι η f έχει τέσσερις ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, οπότε από το Θ. Rolle στα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$ υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$. Επίσης από το Θ. Rolle στα $[\xi_1, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_3]$ για την f' υπάρχουν $\kappa_1 < \kappa_2$ με $f''(\kappa_1) = f''(\kappa_2) = 0$.

Ομοίως από Θ. Rolle για την f'' υπάρχει λ στο $[\kappa_1, \kappa_2]$ με $f'''(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^\lambda = 0$ (άτοπο). Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 8

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) + 2xf(x) = e^{x-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{x^2} f(x) - e^x$ είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Βρείτε την συνάρτηση g εάν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - \eta\mu x}{x} = -1$.

γ. Να βρείτε την συνάρτηση f .

δ. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε. Δείξτε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι μοναδική.

Λύση

α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2xe^{x^2} f(x) + e^{x^2} f'(x) - e^x = e^{x^2} (2xf(x) + f'(x)) - e^x = \\ &= e^{x^2} e^{x-x^2} - e^x = e^{x^2+x-x^2} - e^x = e^x - e^x = 0 \end{aligned}$$

Οπότε $g'(x) = 0$ άρα $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $c \in \mathbb{R}$.

β. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = \frac{xg(x) - \eta\mu x}{x}$, $x \neq 0$. Οπότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1$.

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } h(x) = \frac{xg(x) - \eta\mu x}{x} \Leftrightarrow xg(x) - \eta\mu x = xh(x) \Leftrightarrow$$

$$xg(x) = xh(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow g(x) = h(x) + \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(h(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = -1 + 1 = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ οπότε $c = 0$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = 0$.

γ. Έχουμε $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^{x^2}} \Leftrightarrow f(x) = e^{x-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ άρα και συνεχής με $f(0) = f(1) = 1$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 1]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 0$. Στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε. Έχουμε $f'(x) = (1 - 2x)e^{x-x^2}$ οπότε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\xi)e^{\xi-\xi^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$.

Το ξ είναι μοναδικό άρα και η παραπάνω εφαπτομένη μοναδική.

Άσκηση 9

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Επίσης $f(2) = 2f(1)$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} \quad (1).$$

Λύση

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)'_{x=x_0} = 0$$

Θεωρούμε την $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[1, 2]$. Η F παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και συνεχής στο $[1, 2]$.

επίσης $F(1) = \frac{f(1)}{1} = f(1)$, $F(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{2f(1)}{2} = f(1)$. Άρα $F(1) = F(2)$ και επομένως αυτή πληρεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$$F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Μοναδικότητα

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα την x_0 με άτοπο.

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες στο $(1, 2)$ τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

Η (1) γίνεται $xf'(x) - f(x) = 0$. Θέτουμε $\Phi(x) = xf'(x) - f(x)$ (2).

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ (διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και συνεχής στο $[1, 2]$. Επίσης $\Phi(\rho_1) = \Phi(\rho_2) = 0$ (διότι ρ_1, ρ_2 , ρίζες της Φ).

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $\Phi'(\xi) = 0$.

Από (2) έχουμε: $\Phi'(x) = (x)' f'(x) + x f''(x) - f'(x)$.

Άρα $\Phi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi f''(\xi) - f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 0$ (διότι $\xi \neq 0$)

άτοπο από υπόθεση διότι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 10]$ παραγωγίσιμη στο $(2, 10)$ και η f' γνησίως αύξουσα στο $(2, 10)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(4) + f(8)$ και $f(2) + f(10)$.

Λύση

Στα διαστήματα $[2, 4]$, $[8, 10]$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με

$$2 < \xi_1 < 4 < 8 < \xi_2 < 10 \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(10) - f(8)}{10 - 8}.$$

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ ή

$$\frac{f(4) - f(2)}{2} < \frac{f(10) - f(8)}{2} \Leftrightarrow f(4) + f(8) < f(2) + f(10).$$

Άσκηση 11

Εάν $f'(e^x) = 2xe^{x^2-x}$ για $x > 0$ και $f(1) = 2$ να βρεθεί το $f(e)$ και ο τύπος της f για $x \in (0, +\infty)$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } f'(e^x) = 2xe^{x^2-x} &\Leftrightarrow f'(e^x) = \frac{2xe^{x^2}}{e^x} \Leftrightarrow e^x f'(e^x) = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow (f(e^x))' = (e^{x^2})' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(e^x) = e^{x^2} + c \end{aligned}$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(e^0) = e^{0^2} + c$ οπότε $f(1) = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(e^x) = e^{x^2} + 1$, $x > 0$. Για $x = 1$ είναι $f(e) = e^{1^2} + 1 = e + 1$. Θέτουμε $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$ με $y > 0$. Έτσι έχουμε $f(y) = e^{(\ln y)^2} + 1 = (e^{(\ln y)})^{\ln y} + 1 = y^{\ln y} + 1$. Άρα $f(x) = x^{\ln x} + 1$, $x > 0$.

Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

- Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x) + 2f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = f'(1) = 1$.
 - Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 + 2000$ είναι σταθερή.
 - Δείξτε ότι $g(x) = 2003$, $x \in \mathbb{R}$.
- Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) η οποία μηδενίζεται στα σημεία α και β και μόνο σε αυτά. Αποδείξτε ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = c$.
- Έστω $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \sigma \phi \xi$.
- Σε αγώνα κολύμβησης 200m “ελεύθερο”, δύο αθλητές τερματίζουν ταυτόχρονα. Δείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστο χρονική στιγμή t_0 που οι δύο αθλητές έχουν την ίδια ταχύτητα κατά τη διάρκεια του αγώνα.

5. Αν $\alpha > \beta > \gamma > 3$ δείξτε ότι $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma}$ όπου $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 1$.
6. Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.
7. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2) = 0$ και $g(x) = f(1)(2x - x^2)$.
- i. Να δειχτεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία ξ_1, ξ_2 ($\xi_1 \neq \xi_2$) του $(0, 2)$ ώστε $g'(\xi_1) = f'(\xi_1)$ και $g'(\xi_2) = f'(\xi_2)$.
- ii. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(1) = -\frac{1}{2}f''(\xi)$.
8. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ (με $a > 0$) που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$, με $f(0) = \frac{f(a) + f(-a)}{2}$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (-a, a)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.
9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $xf'(x) = (x+1)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1) = e, f(-1) = \frac{1}{e}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
10. Δείξτε ότι: $|\alpha\eta\mu\alpha - \beta\eta\mu\beta| \leq 2|\alpha - \beta|$ με $0 < \alpha < \beta < 1$.
11. Έστω η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Αν ισχύει $\alpha^2 < 3\beta$ να δείξετε ότι έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.
(Υπ.: Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano και Θ. Rolle για το άτοπο.)
12. Εάν $\kappa + \lambda = -1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + 2\kappa x + \lambda = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.
(Υπ.: Στην $F(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle στο $[0, 1]$)
13. Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}, f''(x) \neq 0$, να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης τα οποία είναι συνευθειακά.
(Υπ.: Αν υπήρχαν τρία συνευθειακά σημεία K, Λ, M τότε οι συντελεστές $\lambda_{\kappa\lambda} = \lambda_{\lambda\mu}$. Από τα θεωρήματα Μέσης Τιμής και Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.)

14. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^2 + 3\pi x + 4 = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Απ.: Άτοπο με Θεώρημα Rolle.)

15. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ έχει τρεις το πολύ ρίζες πραγματικές.

(Υπ.: Πρέπει να δείξουμε ότι $f^{(3)}(x) \neq 0$)

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A.a. Να δείξετε ότι σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις f, g, f', g' είναι συνεχείς και $f'g - fg' \neq 0$ οι ρίζες των f, g διατάσσονται εναλλάξ.

β. Μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι τέτοια ώστε $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή ξ μεταξύ των a, b για την οποία $f''(\xi) < 0$.

B. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(x+2) - f(x+1) = \ln 4$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της f είναι ίση με $\ln 5 + 1$.

Περισσότερες ασκήσεις στο μάθημα αυτό θα βρείτε στο στο τέλος του βιβλίου μετά από τα επαναληπτικά και συνδυαστικά θέματα.

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα 1

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , τότε:

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .

Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

Σχόλιο

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \text{ και όχι } f'(x) > 0.$$

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι : $f'(x_0) = 0$.

Σχόλια

1. Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης στις ρίζες της f' .
2. Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος οι ρίζες της f' είναι πιθανές θέσεις τ. ακροτάτων για την f .
3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα και σε σημεία που δεν είναι ρίζες της f' , όπως στα άκρα του πεδίου ορισμού της (αν είναι κλειστά) και σε σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη.
Οι ρίζες της f' και τα σημεία που η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη λέγονται **κρίσιμα σημεία**.

Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο για να επιβεβαιώνουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση παρουσιάζει τ. ακρότατα.

Αυτό είναι το επόμενο :

Θεώρημα 3

Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α, β) .

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β)
τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 .

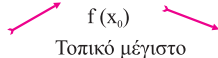
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0, β)
τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 .
ή με άλλη διατύπωση :

Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α, β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α, β) .

Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε :

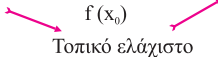
η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
$f'(x)$	+		-
f	 Τοπικό μέγιστο		

Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$

και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
$f'(x)$	-		+
f	 Τοπικό ελάχιστο		

Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε:

- i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο
- ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

B.**ΜΕΘΟΛΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σύμφωνα με τα παραπάνω βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο αυτής και το πρόσημό της λύνοντας την ανισότητα $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$.

Απο τη λύση των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτουν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

Τα τοπικά ακρότατα, μιας συνάρτησης προκύπτουν από τα κρίσιμα σημεία εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο η πρώτη παράγωγος. Επίσης τα κλειστά άκρα (αν υπάρχουν) του πεδίου ορισμού της συνάρτησης αποτελούν σίγουρες θέσεις τοπικών ακροτάτων αρκεί η f να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Είναι $f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και τα μόνα κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου, δηλαδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/e$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ και ανάλογα

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1/e$$

Έτσι σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών για την f :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ Τοπικό ελάχιστο	

στον οποίο φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f .

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης σε ένα διάστημα (α, β) ή στο πεδίο ορισμού της βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα από το κεφάλαιο της συνέχειας που αφορά στο σύνολο τιμών.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

Λύση

Είναι $f'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεπώς έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = -\infty - \infty = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα σε ένα διάστημα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο συγκεκριμένο διάστημα και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** σ' αυτό το διάστημα.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x) = \ln x$ και

$g(x) = \frac{1}{x}$ αντίστοιχα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα.

Είναι $h'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεπώς έχει πεδίο τιμών το διάστημα

$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$, διότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = (-\infty - \infty) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών που είναι το $(-\infty, +\infty)$ η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Απο τα παραπάνω λοιπόν συμπαιρνουμε ότι υπάρχει μοναδικό ξ στο $(0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής: $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$ θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ και απο τη μονοτονία και τα ακρότατα της h προκύπτει η ισχύς της προς απόδειξη ανισότητας.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq 1 - \ln(x+1)$, για κάθε $x \geq 0$

Λύση

Θέτουμε $h(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$, $x \geq 0$.

Είναι $h'(x) = (e^x - 1 + \ln(x+1))' = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επομένως, αν $x \geq 0$ έχουμε: $h(x) \geq h(0) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 + \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 - \ln(x+1)$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν έχουμε ως προϋπόθεση ότι ισχύει μια ανισοτική σχέση όπως για παράδειγμα $f(x) \geq \alpha$ ή $f(x) \leq \alpha$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια παράμετρο, βρίσκουμε x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = \alpha$, οπότε από τη σχέση $f(x) \geq \alpha = f(x_0)$ ή $f(x) \leq \alpha = f(x_0)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, προκύπτει $f'(x_0) = 0$. Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη παράμετρο.

Παράδειγμα 5

Αν $a^x + 5^x \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $a > 0$ να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{5}$.

Λύση

Αν θέσουμε $f(x) = a^x + 5^x$ έχουμε:

$f(x) = a^x + 5^x \geq 2 = f(0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 2 στη θέση $x=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι: $f'(0) = 0$.

Επειδή $f'(x) = a^x \ln a + 5^x \ln 5$ παίρνουμε:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a + 5^0 \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln(a5) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow a5 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται τιμή μιας παραμέτρου ώστε μία συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο σε μια θέση, έστω x_0 , τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει $f'(x_0) = 0$. Από τη συνθήκη αυτή προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Επειδή η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι αναγκαία και όχι ικανή πρέπει να γίνεται επαλήθευση με τον πίνακα μονοτονίας, δηλαδή να ελέγχουμε αν η παράγωγος αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , οπότε το x_0 είναι πράγματι θέση ακρότατου.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=1$ με $f(1) = -2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και αφού το 1 είναι εσωτερικό του διαστήματος $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1) = 0$.

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \left(\alpha\sqrt{x} + \frac{\beta \ln x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\alpha x + 2\beta - \beta \ln x}{2x\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 2\beta - \beta \ln 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 0 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης έχουμε } f(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{1} + \frac{\beta \ln 1}{\sqrt{1}} = -2 \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad (2)$$

Απο τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

Για τις τιμές αυτές είναι $f'(x) = \frac{2 - 2x - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x > 0$ και πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του 1.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή, αφού $x > 0$.

Θέτουμε $g(x) = 2 - 2x - \ln x, x > 0$ και θα μελετήσουμε το πρόσημο της g .

Είναι $g'(x) = -2 - \frac{1}{x} < 0$, για κάθε $x > 0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$(0, +\infty)$, με $g(1) = 0$. Οπότε αν $x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1) = 0$, ενώ αν $x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) = 0$ που σημαίνει ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 για τις τιμές των α και β που βρήκαμε και μάλιστα παρουσιάζει στη θέση αυτή τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό μέγιστο).

Γ.**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Άσκηση 1**

Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln \frac{1}{x},$

ii. $f(x) = \varepsilon\phi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Λύση

i. Επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) = (-\ln x)' = -\frac{1}{x} < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Επειδή για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$, η συνάρτηση $\varepsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- iii. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ οπότε:
- $f'(x) > 0$ στο $(-1,0)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$.
 - $f'(x) < 0$ στο $(0,1)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Άσκηση 2

i. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x - \eta\mu^2 x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

ii. Όμοια για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x - \eta\mu x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

i. Είναι $f(x) = 2x - \eta\mu^2 x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ οπότε

$$f'(x) = (2x - \eta\mu^2 x)' = 2 - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 2 - \eta\mu 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Θέτουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \eta\mu 2x = 0 \quad (\eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη στο } \mathbb{R})$$

Είναι $-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $-1 \leq -\eta\mu 2x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$2-1 \leq 2-\eta\mu 2x \leq 2+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } 1 \leq 2-\eta\mu 2x \leq 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f'(x) = 2 - 2\eta\mu x$ δείξαμε ότι $1 \leq f'(x) \leq 3, \quad x \in \mathbb{R}.$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (ασφαλώς δεν έχει ακρότατα)

ii. Είναι $g(x) = x - \eta\mu x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ οπότε $g'(x) = (x - \eta\mu x)' = 1 - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Θέτουμε } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu x < 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Έτσι αν και έχουμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$ (άρα άπειρες πιθανές θέσεις ακροτάτων) επειδή $g'(x) > 0$ εκατέρωθεν των λύσεων και η g είναι συνεχής στις θέσεις αυτές η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει βέβαια και ακρότατα.

Άσκηση 3

Για τους διάφορους του μηδέν αριθμούς α, β, γ ισχύει: $3\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3\beta x^2 + 4\gamma x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6\beta x + 4\gamma.$

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι εξίσωση β' βαθμού (ως προς x) και έχει:

$$\Delta = 36\beta^2 - 48\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 4\alpha\gamma) \leq 0 \quad (\text{από υπόθεση})$$

Αυτό σημαίνει ότι: η εξίσωση $f'(x) = 0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta < 0$) ή αν έχει, τότε είναι μία διπλή ($\Delta = 0$), οπότε εκατέρωθεν αυτής η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο. Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = xe^x - \alpha$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να προσδιοριστεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

i. Είναι $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Άρα έχουμε για την f τον πίνακα μεταβολών

Η f παρουσιάζει στη θέση $x = -1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο, το $f(-1) = -\frac{1}{e} - \alpha$

ii. Αν $-\frac{1}{e} - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{e}$ τότε προφανώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Αν $-\frac{1}{e} - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{e}$ τότε η $x = -1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (η ρίζα σε αυτήν την περίπτωση είναι διπλή).

Αν $-\frac{1}{e} - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{e}$ τότε:

Στο διάστημα $(-\infty, -1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\alpha > 0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $[-1, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συνολικά δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $\alpha > -\frac{1}{e}$.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $-1 < x < 0$ ή $x > 0$ ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + 1)}$$

Για $-1 < x < 0$ προφανώς ισχύει $f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1, 0]$ είναι η $f(0) = 0$ και συνεπώς $f(x) > f(0)$ για κάθε

$$x \in (-1, 0) \text{ δηλαδή } \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \text{ για κάθε } x \in (-1, 0).$$

Για $x > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, +\infty)$ είναι η $f(0) = 0$ και συνεπώς $f(x) > f(0)$ για κάθε

$$x > 0 \text{ δηλαδή } \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ.**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + 2x - 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της f .

β. Να βρεθούν τα πρόσημα των συναρτήσεων: f , f' , f'' , $f^{(3)}$, όταν $x < 0$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -e^x + x$ και $g(x) = x^3 + 6x^2$. Να αποδείξετε ότι, αν $x \in [-1, 2]$, είναι $f(x) < g(x)$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = 1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Αποδείξτε ότι το σημείο $M(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ανήκει στη C_g και η εξίσωση της

εφαπτομένης της C_g στο M είναι $\varepsilon: 2(\eta\mu\theta)x + y = 1 + \eta\mu^2\theta$.

β. Αν η ε τέμνει τη C_f στα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, αποδείξτε ότι:

$$x_1 \cdot x_2 = -2 - \eta\mu^2\theta, \quad x_1 + x_2 = -2\eta\mu\theta \text{ και } y_1 + y_2 = 2 + 6\eta\mu^2\theta.$$

γ. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση φ με τύπο:

$$\varphi(\theta) = x_1 + x_2 + 4x_1x_2 + y_1 + y_2, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$ να παρουσιάζει στο $x_1 = 1$ τοπικό ελάχιστο, το $x_2 = -\frac{1}{2}$ να είναι θέση σημείου καμπής και η εφαπτομένη της C_f στο $x_3 = 0$ να είναι κάθετη της ευθείας $\varepsilon: x - 12y = 0$.

5. α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

β. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στο $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$, να βρεθούν οι αριθμοί α και β .

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ .

ii. $f'' = g''$

iii. $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Ναδειχθεί ότι:

α. Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) - g(x) = cx$, όπου $c \in \Delta$.

β. Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 , τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

α. Να βρεθούν τα α και β .

β. Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

E

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A. Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \frac{1}{2}$ και $z_2 = \frac{1}{x} + i\sqrt{x}$, ($x > 0$) και οι εικόνες τους A, B αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο. Να προσδιορίσετε το x έτσι ώστε η απόσταση AB να είναι η ελάχιστη.

B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται τρεις εφαπτόμενες προς την καμπύλη $y = x^3 - x$.

Γ. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $2f(x) \geq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Κυρτότητα Σημεία καμψής συνάρτησης

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

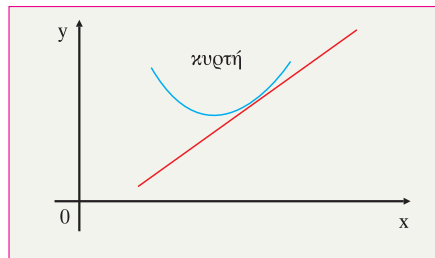
Ορισμοί

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Λέμε ότι :

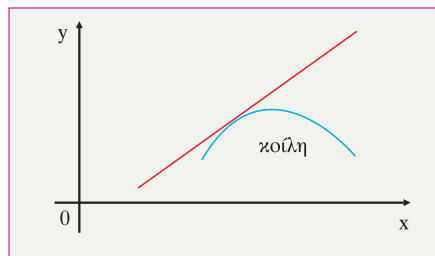
Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα πάνω** στο Δ ή ότι είναι **“κυρτή”** στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

Η f στρέφει **τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ ή ότι είναι **“κοίλη”** στο Δ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Αν η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται “κάτω” από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Αν η f είναι κοίλη τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται “πάνω” από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης αρκεί να εξετάσουμε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου. Επειδή κριτήριο για τη μονοτονία της f' είναι το πρόσημο της f'' διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα :

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Αν $f''(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Αν $f''(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Προσοχή

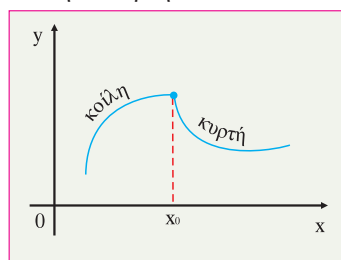
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν η f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f''(x) > 0$ ή ότι $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ , αντίστοιχα.

Πως ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

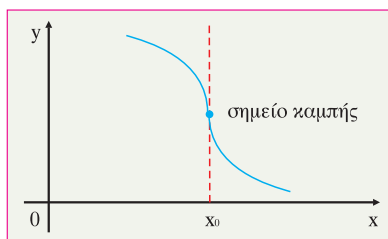
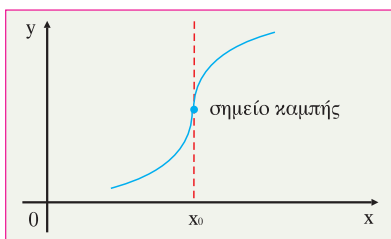
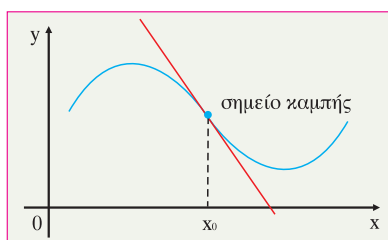
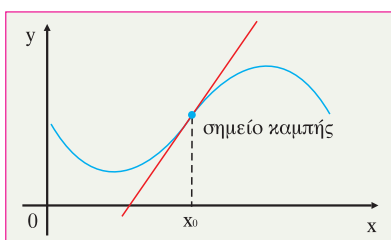
Μια συνάρτηση μπορεί να αλλάζει απο κυρτή σε κοίλη ή απο κοίλη σε κυρτή.

Αν αυτό συμβαίνει σε σημείο που η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη τότε το σημείο αυτό λέγεται **σημείο καμπής** της συνάρτησης.

Προσοχή: Εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει η κυρτότητα της f , αλλά δεν είναι σημείο καμπής αφού δεν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό.



Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f .



Παρατηρούμε ότι στο σημείο καμπής της C_f η εφαπτομένη “διαπερνά” την C_f .

Θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το $f''(x_0) = 0$.

Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος, **πιθανά σημεία καμπής** είναι τα σημεία στα οποία **μηδενίζεται η δευτέρα παράγωγος**.

Επίσης απο τα προηγούμενα σχήματα είναι φανερό ότι σημεία καμπής έχουμε και σε σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού η εφαπτομένη στα σημεία αυτά είναι κατακόρυφη.

Έτσι **πιθανά σημεία καμπής** είναι και τα σημεία στα οποία **δεν υπάρχει η $f''(x)$** αλλά η C_f δέχεται εφαπτομένη.

Επομένως για να εντοπίσουμε τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f βρίσκουμε :

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η $f''(x)$.

Είναι σημείο καμπής κάποιο απο τα παραπάνω αναφερόμενα σημεία αν:

Υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό και αν αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του σημείου αυτού.

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- i. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
- iii. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$.
- iv. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της $f''(x)$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Λύση

Πρέπει $x^2 + 1 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ και}$$

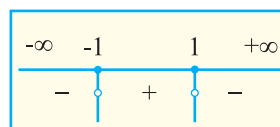
$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

Έχουμε $\frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Το πρόσημο της $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ εξαρτάται μόνο από το $1 - x^2$, δηλ.



και έχουμε:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
f					
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$, κυρτή στο $[-1, 1]$ και κοίλη στο $[1, +\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα: $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$ δηλαδή τα $(-1, \ln 2)$ και $(1, \ln 2)$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, & x > 1 \end{cases}$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 12x$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 18x$

Στη θέση $x_0 = 1$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 7}{x - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + 7x + 7)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 7x + 7) = 15 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 13 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 - 8x - 8)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 8x - 8) = -15$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x, & x < 1 \\ 3x^2 - 18x, & x > 1 \end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

$$\text{Για } x < 1 \text{ είναι } f''(x) = (3x^2 + 12x)' = 6x + 12$$

$$\text{Για } x > 1 \text{ είναι } f''(x) = (3x^2 - 18x)' = 6x - 18$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \begin{cases} 6x + 12, & x < 1 \\ 6x - 18, & x > 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$

$$\text{Για } x < 1 : f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Άρα}$$

x	$-\infty$	-2	1
$f''(x)$	-	0	+

$$\text{Για } x > 1 : f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3. \text{ Άρα}$$

x	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών για την f'' .

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
f''(x)	-	0	+	-	0	+
f(x)						

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -2]$, είναι κυρτή στο $[-2, 1]$, είναι κοίλη στο $[1, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2, f(-2))$ ή $(-2, 14)$ και στο $(3, f(3))$ ή $(3, -41)$.

Προσοχή!

Στο $x_0 = 1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

Παράδειγμα 3

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$.

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Η $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$ επειδή είναι πολυωνμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2\alpha x^2 + 2\left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x + \alpha^3 + 7 \text{ και}$$

$$f''(x) = 4x^2 + 4\alpha x + 2\left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f''(x) = 4x^2 + 4\alpha x + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5$$

Επειδή η $f''(x)$ είναι πολώνυμο δευτέρου βαθμού το πρόσημό της εξαρτάται από την τιμή της

$$\begin{aligned} \text{διακρίνουσας είναι: } \Delta_x &= (4\alpha)^2 - 16(2\alpha^2 - 4\alpha + 5) \Leftrightarrow \Delta = 16\alpha^2 - 16(2\alpha^2 - 4\alpha + 5) = \\ &= -16(-\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5) \Leftrightarrow \Delta = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 4\alpha + 5$ έχει $\Delta_\alpha = 16 - 20 = -4 < 0$ οπότε είναι πάντοτε θετικό δηλ. $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ (ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου). Άρα η $\Delta_x < 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ που σημαίνει ότι είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου α ώστε η f να είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα, τότε ΑΠΑΙΤΟΥΜΕ : $f''(x) \geq 0$ ή $f''(x) \leq 0$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4

Έστω $f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(4\alpha - 3)x^2 + 1$. Να βρεθεί ο πραγματικός α ώστε η f να στρέφεται κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η $f(x)$ ως πολυωνμική είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 8x^3 + 12ax^2 + 6(4a-3)x \text{ και}$$

$$f''(x) = 24x^2 + 24ax + 6(4a-3) \Leftrightarrow f''(x) = 6(4x^2 + 4ax + 4a-3).$$

Για να είναι η f κυρτή στο $\mathbb{R}$ πρέπει: $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή $4x^2 + 4ax + 4a - 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επειδή είναι τριώνυμο αρκεί να έχει διακρίνουσα $\Delta_x \leq 0$ δηλ.

$$16a^2 - 16(4a-3) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3. \text{ Άρα πρέπει } a \in [1, 3]$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε μία συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στο x_0 .

Παράδειγμα 5

Έστω $f(x) = 2x^2 + a \ln x + \beta$ με $x > 0$. Υπολογίστε τα a, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, 5)$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = 4x + \frac{a}{x} \text{ και } f''(x) = 4 - \frac{a}{x^2}.$$

Επειδή η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ θα

$$\text{ισχύει } f''(1) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{a}{1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 4}.$$

$$\text{Επίσης είναι } f(1) = 5 \Leftrightarrow 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων που σχετίζονται με την κυρτότητα συνάρτησης πολλές φορές χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέσης Τιμής όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6

Έστω συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ η οποία στρέφει τα κοίλα

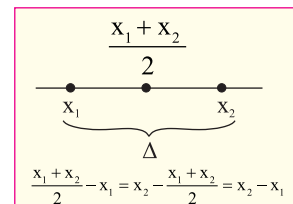
άνω στο Δ . Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$.

Λύση

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και τη συνάρτηση f ορισμένη

$$\text{στο } \left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right]$$

$$\bullet \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right]$$



• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Όμοια εφαρμόζοντας για την f ορισμένη στο $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ το Θ.Μ.Τ. αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Είναι $x_1 < \xi_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < \xi_2 < x_2$ και επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ , η f' είναι γνησίως

αύξουσα στο Δ , οπότε $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ η οποία ανισότητα λόγω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται:

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad \text{ή (επειδή } x_2 - x_1 > 0 \text{)}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad \text{ή } f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $f(x) = x \cdot e^x$ ii. $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$ iii. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & \text{αν } x < 0 \\ x^3 - 3x^2 + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

(Απ.: i. Σ.Κ $(-2, -2e^{-2})$, ii. Σ.Κ δεν έχει, iii. Σ.Κ $(1, 3)$)

2. Έστω $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

i. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

ii. Να αποδείξετε ότι τα προηγούμενα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Απ.: i. Σ.Κ $\left(-3, -\frac{1}{4}\right), (0, 0), \left(3, \frac{1}{4}\right)$)

3. Έστω $f(x) = ax^4 + bx^2 + \gamma$. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ να

έχει κλίση 2 και το σημείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{21}{4}\right)$ να είναι σημείο καμπής.

(Απ.: $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 4$)

4. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ και η g τέτοια ώστε $g(x) \cdot f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 δείξτε ότι η εφαπτομένη της g στο x_0 είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2x + 5 = 0$.

(Απ.: Είναι $g'(x_0) = 2$)

5. α. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ με $f(x) > 0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$, $x > 0$ στρέφει τα κοίλα άνω όταν ισχύει η σχέση $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$, για κάθε $x > 0$.

β. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό διάστημα στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

(Απ.: β. Είναι $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$)

6. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln^2 x + \alpha \ln x + \beta x$ με $x > 0$. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x_1 = e$ και καμπή για $x_2 = e^3$.

(Απ.: $\alpha = -4, \beta = 2e^{-1}$)

7. Δίνεται η $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $3\alpha^2 > 8\beta$.

i. Να βρείτε την $f''(x)$.

ii. Να δείξετε ότι η C_f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής.

8. Έστω $f(x) = x^2(x-3)+4$.

i. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f .

ii. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της f .

iii. Να δείξετε ότι είναι συννευθιακά τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της f .

(Απ.: i. τ.μ. $A(0,4)$, τ.ελ. $B(2,0)$, ii. $\Gamma(1,2)$ σημείο καμπής)

9. Έστω $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3\beta x + 1$ με α, β αντίστροφους πραγματικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της C_f είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

(Απ.: $\left(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{3}{\alpha} + 3\beta\right)$ Σ.Κ., $f'(-1/\alpha) = 0$)

10. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f(a) = f(b) = 0$. Αν είναι κυρτή στο $[a, b]$ να δείξετε ότι ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(Απ.: Χρησιμοποιείτε Θ . Rolle για την f και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$)

11. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανσότητα: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^\alpha > \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ και $\alpha \in (0, 1)$.

12. Ισχύει $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\frac{\alpha + \beta}{2}} \leq \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

13. Δίνεται πραγματική συνάρτησ g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και

$$g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(Πανελλήνιες 1997)

14. Αποδείξτε ότι $e^\alpha + e^\beta \geq 2e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

15. Αποδείξτε ότι ισχύει η ανίσωση $\ln\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 \geq \ln\alpha \cdot \ln\beta$, με $\alpha, \beta > 0$.

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $f(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Ονομάζουμε C το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και της εφαπτομένης (ε) της f στο σημείο καμπής της.

Να αποδειχθεί ότι από ένα σημείο A άγονται τρεις εφαπτομένες προς την καμπύλη $y = f(x)$ όταν και μόνο όταν το A είναι εσωτερικό σημείο του C .

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Πολλές φορές στον υπολογισμό ορίων της μορφής : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ καταλήγουμε σε μια από τις

απροσδιόριστες μορφές : $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Η άρση της απροσδιοριστίας γίνεται με τη βοήθεια των δύο επόμενων θεωρημάτων που είναι γνωστά ως **κανόνες de L' Hospital**.

Θεώρημα 1^ο $\left(\text{Μορφή } \frac{0}{0} \right)$

Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε

περιοχή του x_0 χωρίς να είναι αναγκαία παραγωγίσιμες και στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2^ο $\left(\text{Μορφή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right)$

Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και f, g είναι παραγωγίσιμες σε

περιοχή του x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Τα δύο παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.
- Αν κατά την εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων καταλήξουμε επίσης σε απροσδιόριστη μορφή μπορούμε να τα εφαρμόσουμε όσες φορές απαιτείται αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και παρανομαστή είναι μηδέν.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρανομαστή.

Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα όρια : i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3}$, ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$. Με εφαρμογή του κανόνα (Θεώρημα Hospital) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'}{(3x^2)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - 1) = 1 - 1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 1 - 1 = 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2xe^{x^2})'}{(\eta\mu x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2 + 4 \cdot 0}{1} = 2$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο του αριθμητή και του παρανομαστή είναι $\pm\infty$, οπότε έχουμε

απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Hospital στην περίπτωση που υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρανομαστή.

Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x}$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + e^x)'}{(x^2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{2x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + e^x)'}{(2x + e^x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Απροσδιοριστία της μορφής $(0 \cdot (\pm\infty))$

Η παραπάνω μορφή έχει προκύψει από το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$.

Γράφουμε $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ και προκύπτει μια από τις προηγούμενες μορφές.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2)$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^2}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 - x^2)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x) = 0 \end{aligned}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty - \infty)$

Προκύπτει από το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]^{(\infty - \infty)} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right] \\ \text{ή} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] \end{cases}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - e^x)$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - e^x)^{(\infty - \infty)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$ το όριο (1) είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right)$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1 < 0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Οι απροσδιόριστες μορφές $((0^+)^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty})$

Προκύπτουν κατά τον υπολογισμό ορίων της μορφής: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}$ και βρίσκουμε το όριο του εκθέτη

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln(f(x))$.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Λύση

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$. Το όριο του εκθέτη είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

Σχόλιο

Ο κανόνας de l' Hospital κάποιες φορές δεν λύνει το πρόβλημα ! Για παράδειγμα:

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Δηλαδή ξαναβρήκαμε την αρχική συνάρτηση οπότε ο κανόνας δεν εφαρμόζεται.

Με την κλασική μέθοδο του κοινού παράγοντα προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 + e^{-2x})}{e^x (1 - e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Παράδειγμα 6

Έστω η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε: $f''(0) = \frac{3}{2}$, $f(0) = f'(0) = 0$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{1 - \sin x}$.

Λύση

Εφόσον οι $f(x)$ και $f(-x)$ είναι παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = 0$.

$$\text{Επίσης είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{1 - \sin x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + f(-x))'}{(1 - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(-x)}{\eta \mu x}.$$

Επειδή υπάρχει ο αριθμός $f''(0)$ η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο μηδέν ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(-x) = f'(0) = 0$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(-x)}{\eta \mu x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ αλλά δεν εφαρμόζεται κανόνας L' Hospital, διότι δεν ξέρουμε αν υπάρχει η $f''(x)$ σε μια περιοχή του μηδενός. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(-x)}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x) - f'(-x)}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}}.$$

$$\text{Επειδή } f''(0) = \frac{3}{2} \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \frac{3}{2}$$

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(-x)}{x}$, θέτουμε όπου $-x = \omega$ οπότε $x = -\omega$ και όταν $x \rightarrow 0$ και $\omega \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(-x)}{x} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f'(\omega)}{-\omega} = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f'(\omega)}{\omega} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Τελικά έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(-x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x^2 - x}{x^3 - x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \sin x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x + \ln(1+x)}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

(Απ.: i. 1, ii. 0, iii. 0, iv. $\frac{1}{2}$, v. Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας γιατί στη παράγωγο του αριθμητή δεν υπάρχει το όριο του $\sin \frac{1}{x}$ και διαιρούμε με x)

2. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \ln x}{3x + \ln x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{e^x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln x}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$

(Απ.: i. 2, ii. $+\infty$, iii. 0, iv. 2, v. 1)

3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \varepsilon\varphi \frac{\pi x}{2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - \ln x^2)$

v. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 - \sin x} - \frac{1}{x} \right)$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\varepsilon\varphi x}$

(Απ.: i. 0, ii. $-\frac{2}{\pi}$, iii. 0, iv. $+\infty$, v. $+\infty$, vi. 1)

4. Έστω $f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x} - x, & x \leq 0 \\ \frac{x - \eta\mu x}{x\eta\mu x}, & x > 0 \end{cases}$. Να εξεταστεί η συνέχειά της.

(Απ.: Είναι συνεχής)

5. Έστω $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 1 \\ x - \ln x, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθεί η $f'(x)$.

$$\left(\text{Απ.: } f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \right)$$

6. Έστω $f(x) = \begin{cases} 2\alpha\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, & x \leq 0 \\ \eta\mu 2x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Απ.: $\alpha = 1, \beta = -1$)

7. Αν υπάρχει η f'' και είναι και συνεχής να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

(Υπ.: Παραγωγίζουμε με μεταβλητή το h και το x σταθερά στον κανόνα de l' Hospital)

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και το $f''(0) = 2$ να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + f(x)}{f(x) + \ln(x+1)}.$$

(Απ.: 0)

9. Έστω $f(x) = \begin{cases} \alpha^x - \beta^x, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu\alpha x + \sigma\upsilon\nu\beta x, & x > 0 \end{cases}$ και $\alpha, \beta > 0$.

Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η C_f να διέρχεται από το σημείο

$$A\left(-1, \frac{5}{2}\right).$$

(Απ.: $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$)

Ε**ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ**

Έστω $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή

παράγωγο στο 0 και $f(0) = f'(0) = 0$ καθώς και $f''(0) = 2003$.

α. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

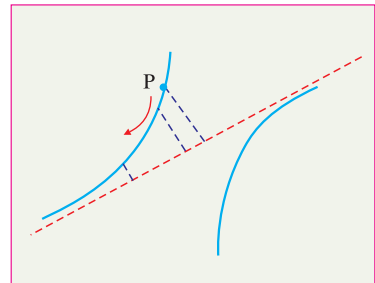
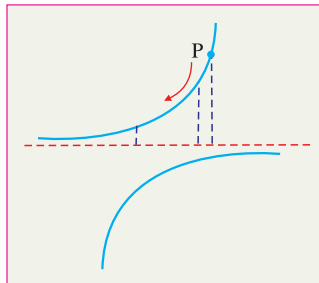
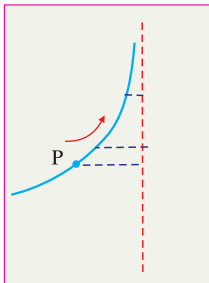
β. Να βρείτε την $g'(x)$ και να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$(Απ.: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{2003}{2}, g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{2003}{2}, & x = 0 \end{cases})$$

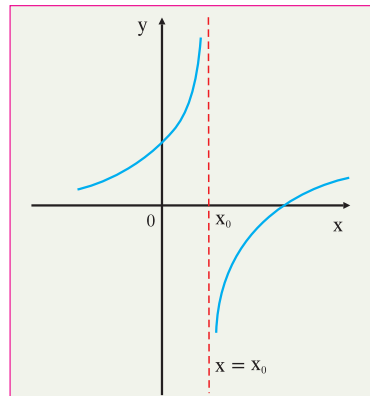
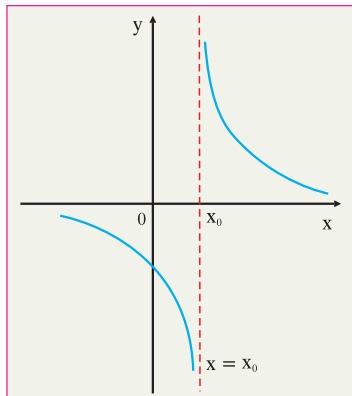
η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$)

A.
ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορίζουμε μια ευθεία (ε) ως **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου P της γραφικής παράστασης από την ευθεία (ε) γίνεται απεριόριστα μικρή όταν το P μετακινείται προς το “άπειρο” κινούμενο επί της καμπύλης C_f όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

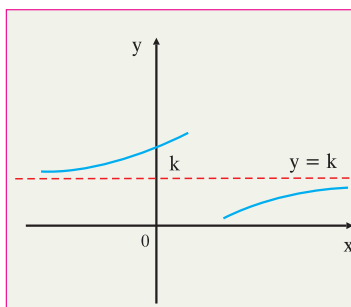
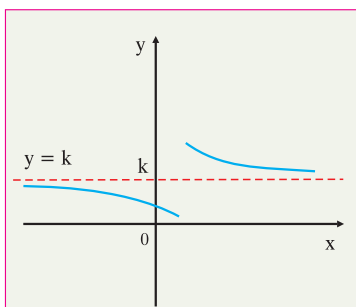

1. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Η ευθεία $x = x_0$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.



2. Οριζόντια ασύμπτωτη

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f την ευθεία $y = k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.



Σχόλιο

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα.

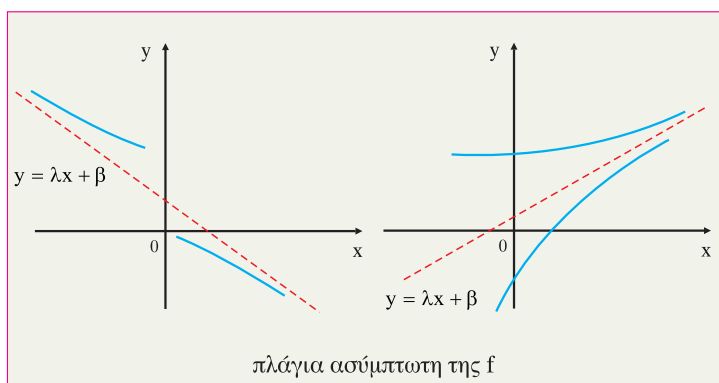
Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ή να έχει την ίδια ευθεία ως ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

3. Πλάγια ασύμπτωτη

Ορίζουμε την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ως πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

αντίστοιχα.



Σχόλιο

Η ασύμπτωτη είναι οριζόντια αν $\lambda = 0$, ενώ είναι πλάγια αν $\lambda \neq 0$.

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f χρησιμοποιούμε το παρακάτω **θεώρημα**:

Θεώρημα

Η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε στα σημεία x_0 που η f δεν είναι συνεχής και στα σημεία x_0 που είναι άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 1

Έστω $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$. Να προσδιορίσετε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης f .

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Άρα τις κατακόρυφες ασύμπτωτες θα τις αναζητήσουμε στις θέσεις $x_0 = -1$ και $x_0 = 1$.

Για $x_0 = -1$ έχουμε : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -1$.

Για $x_0 = 1$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ με $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{cases}$

οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$ την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση οριζόντιας ασύμπτωτης

Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Αρκεί το πεδίο ορισμού της να έχει άκρο το $+\infty$ ή το $-\infty$).

Αν κάποιο από τα παραπάνω όρια είναι πραγματικός αριθμός, έστω k τότε η ευθεία $y = k$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Παράδειγμα 2

Να προσδιορίσετε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων με τύπους:

$$\text{i. } f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$$

Λύση

i. Επειδή το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

$$\text{ii. Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 2)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 2$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3**Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης**

Για να βρούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$, εφ' όσον το $+\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της, κάνουμε τα εξής:

$$1. \text{ Υπολογίζουμε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda.$$

Αν το λ δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το λ είναι πραγματικός αριθμός τότε:

$$2. \text{ Υπολογίζουμε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$$

Αν το β δεν είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν το β είναι πραγματικός αριθμός τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση: $y = \lambda x + \beta$.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$, αν βεβαίως το $-\infty$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα 3

Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ με $x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$.

Να εξετάσετε αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Λύση

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} = 1 = \lambda$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 25} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 25} - x)(\sqrt{x^2 - 25} + x)}{\sqrt{x^2 - 25} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 25 - x^2}{x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-25}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = 1 \cdot x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Επίσης έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} \right] = -1 = \lambda$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 25} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 25} + x)(\sqrt{x^2 - 25} - x)}{\sqrt{x^2 - 25} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 25 - x^2}{-x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-25}{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Προσοχή

Αν το $\lambda = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η πλάγια ασύμπτωτη γίνεται της μορφής $y = \beta$ που είναι οριζόντια. Άρα η f δεν μπορεί να έχει στο $+\infty$ συγχρόνως οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη. Ομοίως και για το $-\infty$.

Παρατηρήσεις

1. Οι πολυωνμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δεύτερου δεν έχουν ασύμπτωτες.
2. Στις κλασματικές συναρτήσεις σε κάθε ρίζα του παρονομαστή που δεν είναι ρίζα και του αριθμητή έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης.

Ειδικότερα στις ρητές συνάρτησεις:

- α. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή τότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.
- β. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή τότε η C_f έχει

οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \frac{\alpha_v}{\beta_v}$ όπου α_v, β_v είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή αντίστοιχα.

- γ. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μονάδα μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.
- δ. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος τουλάχιστον κατά δύο από το βαθμό του παρανομαστή η συνάρτηση δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.
3. Μία πλάγια ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της f .

Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 1}$. Δείξτε ότι η $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$.

$$\text{Πράγματι είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 1} - (2x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 1} - 2x + 3 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7 - 2x^2 + 5x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Άρα η C_f έχει την $y = 2x - 3$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Άσκηση 2

Έστω $f(x) = \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1}$ με $\alpha \neq 0$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει την

$y = \beta x - 4$ με $\beta \neq 13$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Λύση

$$\text{Ξέρουμε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \beta x) = -4.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{3x^2} = \frac{\alpha}{3}.$$

$$\text{Έχουμε } \frac{\alpha}{3} = \beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3\beta} \quad (1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1} - \beta x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\beta x^2 - 13x + 6}{3x - 1} - \beta x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\beta x^2 - 13x + 6 - 3\beta x^2 + \beta x}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\beta - 13) + 6}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\beta - 13)}{3x} = \frac{\beta - 13}{3}$$

$$\text{έχουμε } \frac{\beta - 13}{3} = -4 \Leftrightarrow \beta - 13 = -12 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ και λόγω της (1) } \alpha = 3.$$

Άσκηση 3

Αν η $y = 3x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 6$ οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 3x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{6}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - 3x + 2}$

ii. $f(x) = \frac{\ln(x - 2)}{x - 3}$

iii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x^2 + x + 1}$

(Απ.: i. $x = 1, x = 2$, ii. $x = 3, x = 2$, iii. δεν υπάρχει)

2. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

ii. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x - 1}{4 - x}}$

iii. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

(Απ.: i. στο $+\infty, y = 2$, στο $-\infty$, δεν έχει, ii. δεν έχει, iii. $y = 3$ στο $+\infty$)

3. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 + 3x + 4}$

ii. $f(x) = \ln(e^x + 1) + x$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

(Απ.: ii. $y = 2x + 6$ στο $\pm\infty$, ii. $y = 2x$ στο $\pm\infty$, iii. $y = x + 2$, στο $+\infty, y = -x - 2$, στο $-\infty$)

4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες (κατακόρυφες, οριζόντιες, πλάγιες) αν υπάρχουν των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{3x^3 + x + 2}{x^2}$

ii. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}$

(Απ.: i. $x = 0$ κατακόρυφη $y = 3x$ πλάγια στο $\pm\infty$ οριζόντια δεν έχει, ii. $x = 1$ κατακόρυφη $y = 0$ οριζόντια στο $+\infty$, iii. δεν έχει κατακόρυφη $y = -2$ στο $+\infty, y = 2$ στο $-\infty$)

5. Να αποδείξετε ότι η $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της $f(x) = xe^{1/x}$ στο $+\infty$.
6. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $y = 2x + 3$ να είναι ασύμπτωτη της $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 - \beta x + \alpha}$ στο $+\infty$ με $\alpha > 0$.
(Απ.: $\alpha = 4, \beta = -12$)
7. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(x) - g(x) = x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 3x - 7$ τότε:
- α. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$
- β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta \mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$
- γ. Να βρεθεί αν υπάρχει η πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.
(Απ.: α. 2, β. $-\frac{5}{7}$, γ. $y = 2x + 3$)
8. Αν η $y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2}{xf(x) - 2x^2}$.
(Απ.: $\frac{1}{2}$)
9. Η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι ασύμπτωτη της C_f μιας περιττής συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
(Απ.: $y = \lambda x - \kappa$)
10. Αν για την f ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x}{xf(x) - x^2} = 1$ να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
(Απ.: $y = x + 3$)

E ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Αν η f είναι μία μη σταθερή πολυωνυμική συνάρτηση ναδειχθεί ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης $h(x) = \frac{xf(x) + c}{f(x)}$ με $c \neq 0$ η οποία δεν τέμνει την καμπύλη $y = h(x)$.

Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

A.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η διαδικασία με την οποία προσδιορίζουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης ονομάζεται **μελέτη συνάρτησης**.

Αυτή συνίσταται στα εξής βασικά βήματα:

1. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$.
2. Ελέγχουμε την περιοδικότητα της f και τις “συμμετρίες” της γραφικής παράστασης C_f .
3. Εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια.
4. Προσδιορίζουμε τις f' και f'' και βρίσκουμε τα διαστήματα μονotonίας της f , τα διαστήματα κυρτότητας, τα ακρότατα και τα σημεία καμψής.
5. Υπολογίζουμε τα όρια στα άκρα όλων των ανοικτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f και προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
6. Προσδιορίζουμε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
7. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f όπου σημειώνουμε το πρόσημο των $f'(x)$ και $f''(x)$ και τα όρια που υπολογίσαμε.
8. Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζουμε προσεγγιστικά την γραφική παράσταση της f .

B.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$, και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - (3x)' + 2' = 3x^2 - 3,$$

$$x \in A \text{ με } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Επίσης } f''(x) = (3x^2 - 3)' = (3x^2)' - 3' = 6x, \text{ για κάθε } x \in A$$

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$.

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Ακρότατα

Στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατες τιμές.

Ειδικότερα στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 4$ και στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f''(x) < 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$

Σημεία καμψής

Στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει καμπή με Σ.Κ. το $A(0, f(0))$ δηλαδή το $A(0, 2)$.

Ασύμπτωτες: Δεν υπάρχουν αφού η f είναι πολωνυμική.

Σημεία τομής με τους άξονες

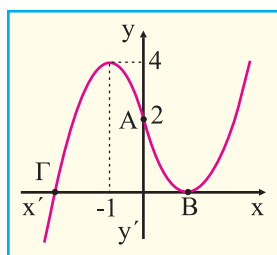
Για $x = 0$ είναι $f(0) = 2$ οπότε η C_f τέμνει τον yy' στο $A(0, 2)$.

Για $y = 0$ είναι $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 1$ ή $x = 1$ ή $x = -2$ οπότε η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1, 0)$ και τον τέμνει στο $\Gamma(-2, 0)$.

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f''(x)$	-	-	○	+	+	+
f	$(-\infty)$					$(+\infty)$
		4	2	0		
		T.M.	Σ.K.	T.E.		

Γραφική Παράσταση

Άσκηση 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορίσμου $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x-1=0\} = \mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \text{ για κάθε } x \in A.$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in A$ και

$$f''(x) = \left(\frac{-3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3} \text{ για κάθε } x \in A.$$

Επίσης έχουμε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$, είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για το $(1, +\infty)$.

Ακρότατα: Δεν υπάρχουν αφού η f' δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f''(x) < 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 1)$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Δεν υπάρχουν αφού στο $x_0 = 1$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

Ασύμπτωτες

$$\alpha. \text{ Είναι } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \end{aligned} \right\}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του διαγράμματος της f .

$$\beta. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες

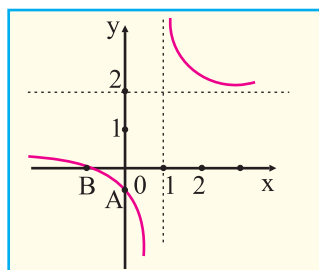
Για $x = 0$ είναι $f(0) = -1$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -1)$.

Για $y = 0$ είναι $\frac{2x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο

$$B\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f''(x)$	-	+	+
f	(2) ↘	(+∞) ↗	(2)

Γραφική Παράσταση**Άσκηση 3**

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) &= \left(\frac{x^2+3}{x-2} \right)' = \frac{(x^2+3)' \cdot (x-2) - (x^2+3)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2) - (x^2+3)}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 3}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

$$\text{Η } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 \Leftrightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7} \text{ ή } x_2 = 2 + \sqrt{7}$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{7}$	2	$2 + \sqrt{7}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	+

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f''(x) &= \left[\frac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2} \right]' = \frac{(x^2 - 4x - 3)'(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 3)[(x-2)^2]'}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)[(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 3)]}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{2(x-2)(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x + 3)}{(x-2)^4} = \frac{2 \cdot 7}{(x-2)^3} = \frac{14}{(x-2)^3}, \text{ για κάθε } x \in A = \mathbb{R} - \{2\}. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A = \mathbb{R} - \{2\}$
 Είναι: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 14(x-2)^3 > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και
 $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2 - \sqrt{7})$

Για κάθε $x \in (2 - \sqrt{7}, 2)$ ή $(2, 2 + \sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[2 - \sqrt{7}, 2)$, $(2, 2 + \sqrt{7}]$.

Για κάθε $x \in (2 + \sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2 + \sqrt{7}, +\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (2 - \sqrt{7}, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ έπεται ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2 - \sqrt{7}$ τοπικό μέγιστο το $f(2 - \sqrt{7}) = 4 - 2\sqrt{7}$. Επίσης για κάθε $x \in (2, 2 + \sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2 + \sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2 + \sqrt{7}$ τοπικό ελάχιστο το $f(2 + \sqrt{7}) = 4 + 2\sqrt{7}$.

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2)$ είναι $f''(x) < 0$, η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2)$.

Επειδή για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$, η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$.

Σημεία καμψής

Εκατέρωθεν του $x_0 = 2$ αλλάζει πρόσημο η f'' αλλά στο σημείο αυτό η f δεν παρουσιάζει καμπή αφού $2 \notin A$.

Ασύμπτωτες

$$\alpha. \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = +\infty \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{Άρα η ευθεία με εξίσωση } x = 2 \text{ είναι κατακόρυφη} \\ &\text{ασύμπτωτη της } C_f. \end{aligned}$$

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στα $+\infty$ και $-\infty$ διότι:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} = 1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 3}{x - 2} = 2$$

Σημεία τομής της C_f με τους άξονες

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=-\frac{3}{2}$ οπότε η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Για $y=0$ έχουμε $\frac{x^2+3}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2+3=0$, (αδύνατη). Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

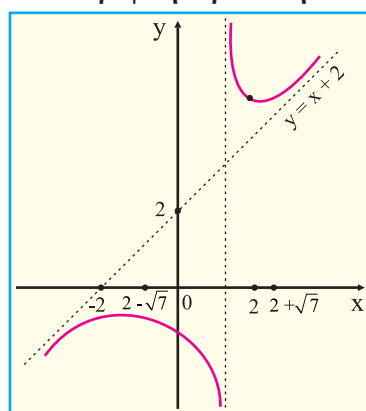
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	$2-\sqrt{7}$	2	$2+\sqrt{7}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f''(x)$	-	-	+	+	+
f	$(-\infty)$	$4-2\sqrt{7}$	$(-\infty)$	$4+2\sqrt{7}$	$(+\infty)$
		T.M.		T.E.	

Γραφική παράσταση



Άσκηση 4

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) = 0\} = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-x}\right)' = -\frac{(x^2-x)'}{(x^2-x)^2} = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$, για κάθε $x \in A = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	○	-	-

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } f''(x) &= \left[\frac{1-2x}{(x^2-x)^2} \right]' = \frac{(1-2x)'(x^2-x)^2 - (1-2x)[(x^2-x)^2]'}{(x^2-x)^4} = \\ &= \frac{-2(x^2-x)^2 - (1-2x)2(x^2-x)(x^2-x)'}{(x^2-x)^4} = \frac{-2(x^2-x)^2 - (1-2x)2(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x)^4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2(x^2 - x)[(x^2 - x) - (2x - 1)^2]}{(x^2 - x)^4} = \frac{-2(x^2 - x)(x^2 - x - 4x^2 - 1 + 4x)}{(x^2 - x)^4} = \\
 &= \frac{-2(-3x^2 + 3x - 1)}{(x^2 - x)^3} = \frac{2(3x^2 - 3x + 1)}{(x^2 - x)^3}, \text{ για κάθε } x \in A = \mathbb{R} - \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Η $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$ που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ οπότε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

Για το πρόσημο της f'' έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2(3x^2 - 3x + 2)(x^2 - x)^3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \\
 x(x - 1) > 0 &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1 \text{ και } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $f'(x) < 0$ η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2} \in A$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

Κυρτότητα της f

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 0)$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f''(x) < 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, 1)$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(1, +\infty)$

Σημεία καμπής

Εκατέρωθεν των σημείων $x = 0$ και $x = 1$ αλλάζει πρόσημο η f'' . Επειδή όμως τα σημεία 0 και 1 δεν ανήκουν στο A η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες

$$\alpha. \left. \begin{array}{l} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα η ευθεία με εξίσωση } x = 0 \text{ είναι κατακόρυφη} \\ \text{ασύμπτωτη της } C_f. \end{array}$$

$$\beta. \left. \begin{array}{l} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα η ευθεία με εξίσωση } x = 1 \text{ είναι κατακόρυφη} \\ \text{ασύμπτωτη της } C_f. \end{array}$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 0$. Η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες

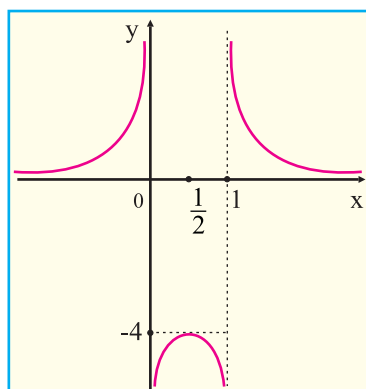
Δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες αφού στο $x_0 = 0$ η f δεν ορίζεται ενώ για $y = 0$ προκύπτει αδύνατη εξίσωση.

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	o	-	-
$f''(x)$	+	-	-	-	+
f	(0)	$(+\infty)$	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$(+\infty)$

T.M. -4

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 5

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^x$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$

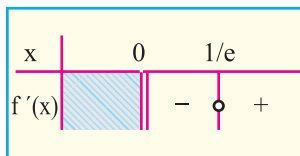
$$\text{Είναι } f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} [(x)' \ln x + x (\ln x)'] =$$

$$= x^x \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

$$\text{Η } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\text{Είναι } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



$$\begin{aligned} \text{Επίσης } f''(x) &= [x^x (\ln x + 1)]' = [e^{x \ln x} (\ln x + 1)]' = (e^{x \ln x})' (\ln x + 1) + e^{x \ln x} (\ln x + 1)' = \\ &= e^{x \ln x} (x \ln x)' (\ln x + 1) + e^{x \ln x} \frac{1}{x} = e^{x \ln x} (\ln x + 1)(\ln x + 1) + e^{x \ln x} \frac{1}{x} = \\ &= e^{x \ln x} \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] = e^{x \ln x} \frac{x (\ln x + 1)^2 + 1}{x} = x^x \frac{x (\ln x + 1)^2 + 1}{x}, \text{ για κάθε } x \in A \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A = (0, +\infty)$ είναι $f''(x) \neq 0$ και μάλιστα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in A$.

Μονοτονία της f

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Ακρότατα της f

Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$ η f παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{1}{e} \in A$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Κυρτότητα της f

Επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0, +\infty)$.

Σημεία καμψής

Δεν υπάρχουν διότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, +\infty) = A$.

Ασύμπτωτες

Δεν υπάρχουν.

Επίσης έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1$ διότι:

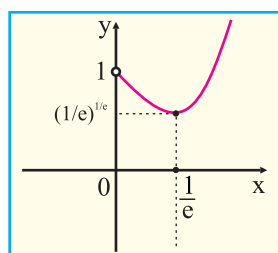
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

Πίνακας Μεταβολών

x	0	1/e	+\infty
f'(x)	-	0	+
f''(x)	+	+	+
f	(1)	T.E. ((1/e) ^{1/e})	(+\infty)

Γραφική Παράσταση



Άσκηση 6

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες.

Λύση

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Προφανώς κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν διότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας γνωστό κριτήριο εξετάζουμε την ύπαρξη πλαγιών ή οριζοντίων ασυμπτωτών:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x x (1 + e^{-2x})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Ομοίως βρίσκουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Συνεπώς οι ευθείες $y = 1$ και $y = -1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντιστοίχως.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln x}{x^v}$ όπου $v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

Λύση

$$A_f = (0, +\infty). \text{ Είναι } f'(x) = \frac{x^{v-1} - vx^{v-1} \ln x}{x^{2v}} = \frac{1 - v \ln x}{x^{v+1}}.$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{v} \Leftrightarrow x = e^{1/v}$. Επομένως το $x = e^{1/v}$ είναι το μοναδικό κρίσιμο

σημείο. Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/v}$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^{1/v}$.

$$\text{Επίσης } f''(x) = \frac{-vx^v - (v+1)x^v(1 - v \ln x)}{x^{2v+2}} = \frac{x^v[-(2v+1) + v(v+1) \ln x]}{x^{2v+2}} =$$

$$\frac{v(v+1) \ln x - (2v+1)}{x^{v+2}}. \text{ Έχουμε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{2v+1}{v(v+1)} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}.$$

Επίσης $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$. Άρα στο σημείο “θέση” $x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$ παρουσιάζει καμπή.

Σχετικά με τις ασύμπτωτες έχουμε:

• Οριζόντιες - πλάγιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{v+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{v+1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(v+1)x^{v+1}} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^v)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{vx^v} = 0.$$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^v} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

C_f .

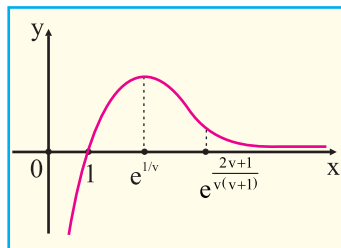
Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f :

(Είναι $e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}} > e^{1/v}$ διότι $\frac{2v+1}{v(v+1)} > \frac{1}{v}$ και η e^x είναι

γνησίως αύξουσα συνάρτηση). Έτσι στη θέση $x = e^{1/v}$ η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο ενώ στη θέση $x = e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$ η f παρουσιάζει καμπή.

Με βάση τον πίνακα αυτό σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f :

x	0	$e^{1/v}$	$e^{\frac{2v+1}{v(v+1)}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	ο	-	-
$f''(x)$	-	-	ο	+
f				



Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.
2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{(2x+8)(x-3)}{x^2-9}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να γίνει η γραφική της παράσταση.
3. Να σχεδιαστεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f (χωρίς να γίνει αναφορά στον τύπο της) η οποία να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες $y=1$, $y=2$ και
 - α. Κανένα ακρότατο,
 - β. Ένα τοπικό ακρότατο
 - γ. Δύο τοπικά ακρότατα
 - δ. Τρία τοπικά ακρότατα
4. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις:

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$	2. $f(x) = xe^x$	3. $f(x) = e^{-\ln x-1 }$
4. $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$	5. $f(x) = \frac{ x-1 }{1- x }$	6. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
7. $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$	8. $f(x) = \sin^2 x$	
5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της για δύο αντίθετες τιμές του x οι οποίες και να προσδιοριστούν.
Στη συνέχεια να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης και η γραφική της παράσταση.
(Απ.: Οι τιμές του $x = \pm 1$)
6. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;
Να καθοριστεί η αντίστροφη της f (η f^{-1}) και το σύνολο τιμών της αντίστροφης. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .
Τέλος να αποδειχθεί η σχέση: $f^{-1}(x) < |x| < f(x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και να ερμηνευθεί γεωμετρικά με βάση τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .
7. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.
Στη συνέχεια, αφού αποδειχθεί ότι $\frac{x}{x - \ln x} \leq x$ για κάθε $x > 0$, να ερμηνευθεί γεωμετρικά η ανισότητα αυτή με βάση τη γραφική παράσταση της f .

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{x^3}{3-x^2} = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{2 + \eta\mu x}$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

A. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

α. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$

β. $g(x) = e^{1/x}$

B. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων $f(x) = \lambda$ και $g(x) = \mu$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

18ο μάθημα

Αόριστο ολοκλήρωμα
Μέθοδοι ολοκλήρωσης

19ο μάθημα

Ορισμένο ολοκλήρωμα
συνάρτησης
Η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

3ο Κεφάλαιο

20ο μάθημα

Εμβαδόν



Αόριστο Ολοκλήρωμα Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Α.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Ονομάζουμε **αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f** στο Δ , μια συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ , για την οποία ισχύει: $F'(x) = f(x)$, $x \in \Delta$.

Θεώρημα

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F + c$ είναι παράγουσες της f στο Δ , $c \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα: κάθε παράγουσα $G(x)$ της f θα έχει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ορισμός

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f το ονομάζουμε **ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ** της f στο Δ και το συμβολίζουμε με $\int f(x) dx$.

Η διαδικασία εύρεσης της παράγουσας μιας συνάρτησης ονομάζεται **ολοκλήρωση** της συνάρτησης.

Συνέπεια του ορισμού είναι η ιδιότητα $\int f'(x) dx = f(x) + C$, $c \in \mathbb{R}$ και ο επόμενος πίνακας Αορίστων ολοκληρωμάτων.

Πίνακας Αορίστων Ολοκληρωμάτων		
$\int 0 dx = c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int c dx = cx + c_1$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int ax^v dx = a \frac{x^{v+1}}{v+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int e^x dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Αναφέρουμε τις ιδιότητες αορίστων ολοκληρωμάτων

$$1. \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$2. \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1. Μέθοδος των παραγουσών
2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
3. Μέθοδος της αντικατάστασης

B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Η διαδικασία που ακολουθούμε στην εύρεση της παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης καθορίζεται από τον τύπο της και ακολουθούμε την “Μέθοδο των παραγουσών” όταν οι συναρτήσεις μας επιτρέπουν με απλούς συλλογισμούς χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος και τους κανόνες παραγώγισης να καταλήξουμε στην παράγουσα F της f .

Η παραγωγή της F θα επαληθεύσει το αποτέλεσμα.

Όσα ακολουθούν είναι εφαρμογή του τύπου

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int [F(g(x))]' dx = F(g(x)) + c, c \in \mathbb{R} \text{ όπου } F' = f$$

Πίνακας Βασικών Αορίστων Ολοκληρωμάτων

$$A. \int f^a(x)f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + c, a \neq -1, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int (3x-1)^{28} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{28} (3x-1)' dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^{29}}{29} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int (x^2+6x+10)^{100} (x+3) dx = \int (x^2+6x+10)^{100} \frac{(x^2+6x+10)'}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+6x+10)^{101}}{101} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \eta \mu^5 x \sin x dx = \int (\eta \mu^5 x) (\eta \mu x)' dx = \frac{\eta \mu^6 x}{6} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{\ell n x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} \right) \ell n x dx = \int (\ell n x)' \cdot \ell n x dx = \frac{\ell n^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int x \sqrt[3]{x^2+1} dx = \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}} \frac{(x^2+1)'}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{8} (x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+3)' (x^2+3)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+3)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2(3-1)} (x^2+3)^{\frac{2}{3}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{B. } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{1}{5-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(5-2x)'}{5-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|5-2x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \varepsilon \phi x dx = \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu x} dx = -\int \frac{(\sigma \nu x)'}{\sigma \nu x} dx = -\ln|\sigma \nu x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1} dx = \int \frac{(x^4+3x^2+1)'}{x^4+3x^2+1} dx = \ln|x^4+3x^2+1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Γ. } \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} 2(\sqrt{x})' dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx = 2e^{\sqrt{x}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Δ. } \int \eta \mu f(x) f'(x) dx = -\sigma \nu f(x) + c, c \in \mathbb{R} \quad \int \sigma \nu f(x) f'(x) dx = \eta \mu f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \eta \mu (x^2+6x)(2x+6) dx = -\sigma \nu (x^2+6x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{\sigma \nu (\ell n x)}{x} dx = \int [\sigma \nu (\ell n x)] (\ell n x)' dx = \eta \mu (\ell n x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ε. } \int \frac{f'(x)}{\sigma \nu^2 f(x)} dx = \varepsilon \phi (f(x)) + c, c \in \mathbb{R} \quad \int \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 f(x)} dx = -\sigma \phi (f(x)) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{e^x}{\sigma \nu^2 (e^x)} dx = \varepsilon \phi (e^x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{1}{x \eta \mu^2 (\ell n x)} dx = \int \frac{(\ell n x)'}{\eta \mu^2 (\ell n x)} dx = -\sigma \phi (\ell n x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ζ. } \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx = f(x)g(x) + c, c \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c, c \in \mathbb{R} \quad \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} dx = \int \frac{(x)' e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \int \left(\frac{x}{e^x} \right)' dx = \frac{x}{e^x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = \int \left((e^x)' \eta\mu x + e^x (\eta\mu x)' \right) dx = \int (e^x \eta\mu x)' dx = e^x \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$$

Η. Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης η οποία δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ και των οποίων ο παρανομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι μικρότερου βαθμού από τον παρανομαστή τότε κάνουμε διάσπαση του κλάσματος όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3} dx, x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}.$

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{x+4}{x^2-4x+3} = \frac{x+4}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3) + \beta(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{\alpha x - 3\alpha + \beta x - \beta}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)x - 3\alpha - \beta}{(x-1)(x-3)} \text{ οπότε πρέπει: } (\alpha + \beta)x - 3\alpha - \beta = x + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$-3\alpha - \beta = 4$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: $-2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{2}$ οπότε

$$-\frac{5}{2} + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Έτσι: } \int \frac{x+4}{x^2-4x+3} dx = \int \left(\frac{-\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{7}{2}}{x-3} \right) dx = -\frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x-3} dx =$$

$$-\frac{5}{2} \ln|x-1| + \frac{7}{2} \ln|x-3| + c, c \in \mathbb{R}.$$

Θ. Για να υπολογίσουμε αόριστο ολοκλήρωμα κλάσματος του οποίου ο παρανομαστής γίνεται γινόμενο παραγόντων και ο αριθμητής του είναι βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του βαθμού του παρανομαστή τότε κάνουμε πρώτα διαίρεση και μετά διάσπαση.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Λύση

Κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 - 4x + 5 & x^2 - 3x + 2 \\
 -x^3 + 3x^2 - 2x & \\
 \hline
 3x^2 - 6x + 5 & \\
 -3x^2 + 9x - 6 & \\
 \hline
 3x - 1 &
 \end{array}$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$x^3 - 4x + 5 = (x^2 - 3x + 2)(x + 3) + 3x - 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι } \int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 2) + 3x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \\
 &= \int \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 3x + 2} dx + \int \frac{3x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int x dx + 3 \int dx + \int \frac{3x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Το $\int \frac{3x-1}{x^2-3x+2} dx$ το υπολογίσαμε όπως στο παράδειγμα 1 με τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλάσμάτων.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \sin^2 x \, dx, \quad I_2 = \int \eta\mu^2 x \, dx, \quad I_3 = \int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx, \quad I_4 = \int \epsilon\phi^2 x \, dx$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\sin^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ οπότε

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c \quad ((\eta\mu 2x)' = \sigma\upsilon\nu 2x \quad (2x)' = 2\sigma\upsilon\nu 2x)
 \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ οπότε

$$I_2 = \int \eta\mu^2 x \, dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } I_3 &= \int \eta\mu^2 x \sin^3 x \, dx = \int \eta\mu^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \eta\mu^2 x (1 - \eta\mu^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int \eta\mu^2 x \cdot \sin x \, dx - \int \eta\mu^4 x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{3} \eta\mu^3 x - \frac{1}{5} \eta\mu^5 x + c, \, c \in \mathbb{R} \\ &\left(\begin{aligned} (\eta\mu^3 x)' &= 3\eta\mu^2 x (\eta\mu x)' = 3\eta\mu^2 x \cdot \sin x \\ (\eta\mu^5 x)' &= 5\eta\mu^4 x (\eta\mu x)' = 5\eta\mu^4 x \cdot \sin x \end{aligned} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Είναι } I_4 = \int \varepsilon\varphi^2 x \, dx = \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \varepsilon\varphi x - x + c, \, c \in \mathbb{R}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2**Ολοκλήρωση κατά παράγοντες**

$$\text{Τύπος: } \int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx \quad (1)$$

Χρησιμοποιείται κυρίως σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων. Ακόμη όμως και για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f παρατηρούμε ότι:

$$\int f(x) \, dx = \int 1f(x) \, dx = \int (x)' f(x) \, dx$$

Ο τύπος μπορεί να πάρει και τις μορφές

$$\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) \, dx$$

όπου $F(x)$, $G(x)$ παράγουσες των f , g αντίστοιχα.

Η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα του 2^{ου} μέλους της (1) να είναι απλούστερο στον υπολογισμό ή να είναι της μορφής $(\kappa) \cdot (\text{Αρχικό})$.

Επισημαίνουμε συνοπτικά κάποιες μορφές και ποια παράγουσα επιλέγουμε

- α.** (πολυνυμική) · (εκθετική) με παράγουσα της εκθετικής
- β.** (πολυνυμική) · (τριγωνομετρική) με παράγουσα της τριγωνομετρικής
- γ.** (πολυνυμική) · (λογαριθμική) με την παράγουσα πολυνυμικής
- δ.** (εκθετική) · (τριγωνομετρική) με παράγουσα όποια θέλουμε

Διαδοχική εφαρμογή της μεθόδου κάνουμε:

1. Στα γινόμενα α και β μέχρι να εξαντληθούν οι δυνάμεις του πολωνύμου
2. Στο δ μέχρι να προκύψει το ζητούμενο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος και να το υπολογίσουμε επιλύοντας εξίσωση με άγνωστο ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Σημείωση: Όταν εφαρμόζεται πολλές φορές η προηγούμενη μέθοδος παίρνουμε κάθε φορά την παράγουσα της ίδιας μορφής δηλαδή ή μόνο της τριγωνομετρικής ή μόνο της εκθετικής εκτός από την περίπτωση γ . που παίρνουμε την παράγουσα της πολυνυμικής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα: $I_1 = \int \ell n x dx$, $I_2 = \int \ell n^2 (x+1) dx$

Λύση

Είναι $I_1 = \int \ell n x dx = \int x' \ell n x dx = x \ell n x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ell n x - x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } I_2 &= \int \ell n^2 (x+1) dx = \int (x+1)' \ell n^2 (x+1) dx = \\ &= (x+1) \ell n^2 (x+1) - \int (x+1) 2 \ell n (x+1) \frac{1}{x+1} dx = \\ &= (x+1) \ell n^2 (x+1) - 2 \int \ell n (x+1) dx = (x+1) \ell n^2 (x+1) - 2 \int (x+1)' \ell n (x+1) dx = \\ &= (x+1) \ell n^2 (x+1) - 2(x+1) \ell n (x+1) + 2 \int (x+1) \frac{1}{x+1} dx = \\ &= (x+1) \ell n^2 (x+1) - 2(x+1) \ell n (x+1) + 2x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int (x^2 + x) e^x dx, \quad I_2 = \int (x^2 + 2x + 3) \ell n x dx, \quad I_3 = \int e^{2x} \sigma \nu n x dx, \quad I_4 = \int 2^x \sigma \nu n x dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } I_1 &= \int (x^2 + x) (e^x)' dx = (x^2 + x) e^x - \int (2x + 1) e^x dx = (x^2 + x) e^x - \int (2x + 1) (e^x)' dx = \\ &= (x^2 + x) e^x - (2x + 1) e^x + \int 2e^x dx = (x^2 + x) e^x - (2x + 1) e^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } I_2 &= \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right)' \ell n x dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ell n x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ell n x - \int \left(\frac{x^2}{3} + x + 3 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ell n x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} x^2 - 3x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε } I_3 = \int e^{2x} (\eta \mu x)' dx = e^{2x} \eta \mu x - 2 \int \eta \mu x e^{2x} dx = e^{2x} \eta \mu x + 2 [e^{2x} \sigma \nu n x - 2 \int e^{2x} \sigma \nu n x dx]$$

$$\text{οπότε } I_3 = e^{2x} \eta \mu x + 2e^{2x} \sigma \nu n x - 4I_3 \quad \text{ή} \quad I_3 = \frac{e^{2x} (\eta \mu x + 2\sigma \nu n x)}{5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } I_4 = \int 2^x \sigma \nu n x dx = \int 2^x (\eta \mu x)' dx = 2^x \eta \mu x - \int 2^x \ell n 2 \eta \mu x dx =$$

$$2^x \eta \mu x + \ell n 2 \int 2^x (\sigma \nu n x)' dx = 2^x \eta \mu x + \ell n 2 [2^x \sigma \nu n x - \int 2^x \ell n 2 \sigma \nu n x dx] \quad \text{οπότε}$$

$$I_4 = 2^x \eta \mu x + 2^x \sigma \nu \nu x \ell n 2 - \ell n 2 I_4 \text{ ή } I_4 = \frac{1}{\ell n^2 2} (2^x \eta \mu x + 2^x \ell n 2 \sigma \nu \nu x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 6

Αν $I_v = \int \epsilon \varphi^v x dx$ να δείξετε ότι $I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1} \epsilon \varphi^{v-1} x$ με $v \geq 3$.

Λύση

$$I_v = \int \epsilon \varphi^v x dx = \int \epsilon \varphi^{v-2} x \cdot \epsilon \varphi^2 x dx = \int \epsilon \varphi^{v-2} x \cdot \left(\frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} - 1 \right) dx = \int \epsilon \varphi^{v-2} x \cdot \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx - \int \epsilon \varphi^{v-2} x dx$$

$$= \int \epsilon \varphi^{v-2} x \cdot (\epsilon \varphi x)' dx - I_{v-2} \stackrel{u=\epsilon \varphi x}{=} \int u^{v-2} du - I_{v-2} =$$

$$\frac{u^{v-1}}{v-1} - I_{v-2} = \frac{1}{v-1} \epsilon \varphi^{v-1} x - I_{v-2}$$

Για την ολοκλήρωση των $\epsilon \varphi^v x$, $\sigma \varphi^v x$ χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\epsilon \varphi^2 x = \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} - 1, \quad \sigma \varphi^2 x = \frac{1}{\eta \mu^2 x} - 1$$

και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεωρητική στήριξη της μεθόδου αποτελεί ο τύπος:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \text{ όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x)dx$$

με την προϋπόθεση ότι $\int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (όπου F μια παράγουσα της f).

Εφαρμόζεται από το 1ο μέλος στο 2ο σε ολοκληρώματα που έχουν η μπορούν να πάρουν την μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$ και ο υπολογισμός του $\int f(u)du$ είναι ευκολότερος και από το 2ο μέλος στο 1ο όταν ζητούμενο είναι το $I = \int f(x)dx$ και υπάρχει κατάλληλη αντικατάσταση $x = g(t)$ οπότε $dx = g'(t)dt$ που το $\int f(g(t))g'(t)dt$ υπολογίζεται εύκολα.

Εφαρμογές:

1. Σε πολυώνυμα

$$I = \int (2x+6)(x^2+6x+7)^8 dx = (\text{θέτουμε } u = x^2+6x+7 \text{ οπότε } du = (2x+6)dx)$$

$$= \int u^8 du = \frac{u^9}{9} + c = \frac{1}{9}(x^2+6x+7)^9 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Σε κλάσματα

$$\alpha. \int \frac{\ell n x}{x} dx = \int \ell n x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ell n x (\ell n x)' dx \stackrel{u=\ell n x}{=} \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ell n^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\beta. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{(\ln x)' dx}{\ln x \ln(\ln x)} \stackrel{u=\ln x}{=} \int \frac{du}{u \ln u} = \int (\ln u)' \frac{1}{\ln u} du \stackrel{y=\ln u}{=} \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \\ = \ln|\ln u| + c = \ln|\ln(\ln x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\gamma. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x)'}{e^x + 1} dx \stackrel{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u + 1} = \ln|u + 1| + c = \ln|e^x + 1| + c = \ln(e^x + 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\delta. \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx \stackrel{u=x^2+4x+5}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \\ \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2+4x+5} + c, c \in \mathbb{R}$$

3. Σε ρίζες

$$I = \int x\sqrt{x+1} \quad \text{Θέτουμε την ρίζα } \sqrt{x+1} = u \text{ οπότε } du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \text{ ή } dx = 2 \cdot u \cdot du.$$

Ακόμη $\sqrt{x+1} = u \Leftrightarrow x+1 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 - 1$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int (u^2 - 1)u2udu = \int (2u^4 - 2u^2)du = 2\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + c = \\ = \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

4. Σε ολοκλήρωση γινομένων της μορφής $I = \int \eta \mu^{\nu} \chi \sigma \nu^{\mu} x dx$

α. Αν υπάρχει περιττός εκθέτης κάνουμε διάσπαση.

$$\text{Έτσι } I = \int \eta \mu^3 \chi \sigma \nu^4 x dx = \int \eta \mu^2 \chi \sigma \nu^4 x \eta \mu x dx =$$

$$= -\int (1 - \sigma \nu^2 x) \sigma \nu^4 x (\sigma \nu x)' dx \stackrel{u=\sigma \nu x}{=} -\int (1 - u^2) u^4 du$$

$$= -\int (u^4 - u^6) du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{5}\sigma \nu^5 x + \frac{1}{7}\sigma \nu^7 x + c, c \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση που και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι χρησιμοποιούμε τους τύπους απο-

$$\text{τετραγωνισμού: } \sigma \nu^2 x = \frac{1 + \sigma \nu 2x}{2}, \eta \mu^2 x = \frac{1 - \sigma \nu 2x}{2}$$

$$\text{Έτσι } I = \int \sigma \nu^4 x dx = \int (\sigma \nu^2 x)^2 dx = \int \frac{(1 + \sigma \nu 2x)^2}{4} dx =$$

$$\int \frac{1 + 2\sigma \nu 2x + \sigma \nu^2 2x}{4} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \eta \mu 2x + \int \frac{1}{4} \sigma \nu^2 2x dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + \frac{1}{8}\int(1+\sigma\upsilon\nu 4x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\eta\mu 4x + c, c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογιστούν τα $I_1 = \int \epsilon\phi x dx$, $I_2 = \int \frac{1}{\eta\mu x} dx$.

Λύση

Έχουμε: $I_1 = \int \epsilon\phi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ell n|u| + c = -\ell n|\sigma\upsilon\nu x| + c, c \in \mathbb{R}$

$$I_2 = \int \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \stackrel{u=\sigma\upsilon\nu x}{=} -\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{A}{u+1} du + \int \frac{B}{u-1} du$$

όπου τα A, B υπολογίζονται κατά τα γνωστά δηλαδή $\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Εύρεση του τύπου συνάρτησης όταν γνωρίζουμε μια σχέση μεταξύ της συνάρτησης και της παραγώγου της.

Βασική επιδίωξη είναι από την δοσμένη σχέση να καταλήξουμε σε ισότητα που η ολοκλήρωση των δύο μελών να μας δίνει εξίσωση που μοναδικός άγνωστος θα είναι η $f(x)$.

Από τα δεδομένα αν υπάρχουν υπολογίζουμε την σταθερά c.

Παράδειγμα 8

A. Να βρεθεί συνάρτηση $f(x)$ με $Af = \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ για κάθε x τέτοια ώστε

$f'(x)(x^2 - x + 1) = (2x - 1)f(x)$ της οποίας η εφαπτομένη στο $A(2, f(2))$ έχει κλίση 18.

B. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις

α. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, $f(1) = 1$.

β. $f'(x) + f(x) = 2$ και το C_f περνά από $(1, e)$

γ. $f'(x) - f(x) = 1$ και C_f περνά από $(1, 1)$.

Λύση

$$A. \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \text{ οπότε } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \text{ ή } \ell n f(x) = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx \text{ ή}$$

$$\ell n f(x) = \ell n(x^2 - x + 1) + c = \ell n(x^2 - x + 1) + \ell n e^c = \ell n e^c (x^2 - x + 1).$$

Είναι $f(x) = e^c (x^2 - x + 1)$ και με $x = 2$ προκύπτει $f'(2) = 18 \Rightarrow$

υποθ.

$$\Rightarrow 3 \cdot 18 = 3f(2) \Rightarrow f(2) = 18 \Rightarrow 18 = e^c 3 \Rightarrow e^c = 6 \Rightarrow f(x) = 6(x^2 - x + 1)$$

B.α. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0, f(x) \neq 0,$

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = 2x \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int 2x dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}, c \in \mathbb{R} \quad \text{με } x=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{1+c} \Rightarrow c=0, c \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$$

β. Με τη χρήση της συνάρτησης e^x .

$f'(x) + f(x) = 2$ πολλαπλασιάζουμε με e^x και έχουμε:

$$f'(x)e^x + f(x)(e^x)' = 2e^x \Rightarrow [f(x)e^x]' = 2e^x \Rightarrow$$

$$\int [f(x)e^x]' dx = \int 2e^x dx \Rightarrow f(x)e^x = 2e^x + c \Rightarrow f(x) = 2 + ce^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

Με $x=1$ είναι $e = 2 + c - e^{-1} \Leftrightarrow c = e(e-2)$. Άρα $f(x) = 2 + e(e-2)e^{-x}$.

γ. Ομοίως $\frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1}{e^x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = e^{-x} \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} = \int e^{-x} dx \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{e^x} = -e^{-x} + c \Rightarrow f(x) = -1 + ce^x, x=1 \Rightarrow 1 = -1 + ce \Rightarrow c = \frac{2}{e} \Rightarrow f(x) = -1 + 2e^{x-1},$$

$c \in \mathbb{R}.$

Α.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int \frac{x^3 + 27}{x+3} dx$

β. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$

γ. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

δ. $\int e^x \sin e^x dx$

ε. $\int \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

στ. $\int \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} dx$

2. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

β. $\int \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 6} dx$

γ. $\int \epsilon\phi x dx$

δ. $\int \sigma\phi x dx$

ε. $\int \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} dx$

στ. $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

3. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int e^{-x} \eta \mu x \, dx$$

$$\beta. \int x^2 \ln x \, dx$$

$$\gamma. \int e^x \cdot \eta \mu 2x \, dx$$

$$\delta. \int \ln x \, dx$$

$$\epsilon. \int e^{2x} \sigma \upsilon \nu x \, dx$$

$$\sigma\tau. \int x^2 \cdot e^{-x} \, dx$$

4. Να βρείτε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) = 6x + 20, f'(-2) = -2, f(0) = 2$$

5. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x^2 - x + 1)f'(x) = (2x - 1)f(x)$$

και η εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 18.

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1$ να είναι η αρχική της συνάρτησης $g(x) = 3x^2 + x - 4$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\alpha. \int \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu^2 x + 3\eta \mu x + 2} \, dx, \beta. \int \frac{e^x}{(e^x + 1)(e^x + 2)} \, dx$

8. Να βρείτε την συνάρτηση f αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x)e^{f(x)} = 2x - 1$ και η γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 3.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, 1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

10. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$$

$$\beta. \int (\eta \mu (\eta \mu x + x) \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu (\eta \mu x + x) \, dx)$$

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Ένα δοχείο αρχικά περιέχει ένα λίτρο χημικής ουσίας X και 20 λίτρα νερό. Η ουσία X αντιδρά με το νερό ώστε να σχηματιστεί αέριο.

Τη χρονική στιγμή t sec απομένουν στο δοχείο u λίτρα της ουσίας X ενώ ο όγκος του νερού έχει μειωθεί κατά $2(1-u)$ λίτρα.

Ο ρυθμός μείωσης του όγκου της ουσίας X είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογος του γινομένου του όγκου της X και του όγκου του νερού που υπάρχει στο δοχείο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

α. Να δείξετε ότι $\frac{du}{dt} = -ku(9+u)$ όπου k είναι θετική σταθερά.

β. Να λύσετε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

γ. Αν είναι γνωστό ότι όταν $t = 30$ είναι $u = 0,9$ τότε να βρείτε:

i. Πόσος χρόνος χρειάστηκε ώστε το $\frac{1}{4}$ της αρχικής ποσότητας της X να αντιδράσει με το νερό.

ii. Ποιος είναι ο όγκος της X που απομένει στο δοχείο μετά τα 5 πρώτα λεπτά.

$$\text{Δίνεται: } \ell_{n1,1} \cong \frac{2}{21}, \ell_{n1,3} \cong \frac{16}{61}, \left(\frac{10}{11}\right)^{10} \cong \frac{5}{13}.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα που το καθένα έχει μήκος $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Σε κάθε υποδιάστημα που σχηματίζεται π.χ. στο $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ θεωρούμε τυχαίο σημείο ξ_k (μπορεί να είναι και ένα από τα άκρα) και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$$

το οποίο ονομάζουμε **άθροισμα Riemann της f στο $[a, b]$** . Το σύνολο των άκρων $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ των διαστημάτων ονομάζουμε διαμέριση P_n του $[a, b]$ και τα $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ **ενδιάμεσα σημεία** της διαμέρισης. Το προηγούμενο άθροισμα έχει όριο όταν $n \rightarrow +\infty$ το οποίο ονομάζουμε **ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$** και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ της διαμέρισης P_n και το συμβολίζουμε με $\int_a^b f(x)dx$

Έτσι έχουμε:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$$

Τα a, b ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης**. Αν ως ξ_k επιλέξουμε τα δεξιά άκρα των διαστημάτων

τότε $\xi_k = a + k\Delta x = a + k \frac{b-a}{n}$ και ο προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right]$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο $[a, b]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της f τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$. Άρα με $f(x) \geq 0$ είναι $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. Όπως ορίστηκε το ολοκλήρωμα προϋποθέτει ότι $a < b$. Μια επέκταση του ορισμού όταν $a \geq b$ γίνεται ως εξής:

Αν $\alpha = \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$.

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$, όπου f συνεχής στο Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$.

Σχόλιο: Δεν είναι απαραίτητο το γ να είναι μεταξύ των α, β αρκεί να ανήκει στο Δ .

π.χ. $\int_2^6 f(x) dx = \int_2^{10} f(x) dx + \int_{10}^6 f(x) dx$, αν 2, 6, 10 ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και η f είναι συνεχής σ' αυτό.

5. Αν $\alpha \leq \beta$ και f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

6. $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$, $\alpha \leq \beta$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

7. $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$.

8. Με χρήση των προηγούμενων ιδιοτήτων αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με m, M ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο της f , αντίστοιχα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $m \leq f(x) \leq M$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx \quad \text{δηλαδή} \quad m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

Για να δείξουμε μια διπλή ανισότητα με ολοκλήρωμα μελετούμε την υπό ολοκλήρωση (ή ολοκληρωτέα) συνάρτηση ως προς τα ακρότατα και εφαρμόζουμε την ιδιότητα 8.

π.χ. Ναδειχθεί ότι $4 \leq \int_1^3 2^x dx \leq 16$.

Έχουμε $f(x) = 2^x$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ οπότε: $m = 2^1 = 2$, $M = 2^3 = 8$.

Άρα $2 \leq 2^x \leq 8$ για κάθε $x \in [1, 3]$ τότε $\int_1^3 2 dx \leq \int_1^3 2^x dx \leq \int_1^3 8 dx$ δηλαδή

$$2(3-1) \leq \int_1^3 2^x dx \leq 8(3-1) \Leftrightarrow 4 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 16$$

Συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκλήρωμα με μεταβλητά όρια ολοκλήρωσης

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μια

παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left[\int_{\alpha}^x f(t) dt \right]' = f(x)$.

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Παρατήρηση: Τη μεταβλητή x ονομάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και αν τα όρια ολοκλήρωσης είναι σταθεροί αριθμοί το αποτέλεσμα θα είναι σταθερό ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Αν όμως εκτός της μεταβλητής ολοκλήρωσης υπάρχει στη συνάρτηση και άλλη μεταβλητή και σταθερά όρια τότε το εξαγόμενο είναι συνάρτηση της άλλης μεταβλητής

π.χ. $\int_{\alpha}^{\beta} (x-t)f(t) dt$ είναι συνάρτηση του x ενώ το $\int_{\alpha}^{\beta} (x-t)f(x) dx$ είναι συνάρτηση του t .

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ.)

Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο Δ και f συνεχής στο Δ και α, β ανήκουν στο Δ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης στο ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανάλογες των μεθόδων που αναφέραμε στο αόριστο ολοκλήρωμα. Υπενθυμίζουμε:

1. Μέθοδος παραγουσών
2. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.
3. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής.

B.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ****Κατηγορία – Μέθοδος 1**

Ολοκλήρωση με τη μέθοδο των παραγουσών.

Αφορά τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων για τις οποίες γνωρίζουμε την παράγουσα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_0^1 e^{3x+4} dx, \quad \text{ii. } \int_0^1 x(4x^2 - 2)^3 dx, \quad \text{iii. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx, \quad \text{iv. } \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$$

Λύση

$$\text{i. } (e^{3x+4})' = e^{3x+4} (3x+4)' = 3 \cdot e^{3x+4} \text{ είναι: } \int_0^1 e^{3x+4} dx = \frac{1}{3} [e^{3x+4}]_0^1 = \frac{1}{3} (e^7 - e^4) = \frac{e^7 - e^4}{3}$$

$$\text{ii. Είναι } ((4x^2 - 2)^4)' = 4(4x^2 - 2)^3 (4x^2 - 2)' = 4(4x^2 - 2)^3 8x = 32x(4x^2 - 2)^3$$

$$\int_0^1 (4x^2 - 2)^3 dx = \frac{1}{32} [(4x^2 - 2)^4]_0^1 = \frac{1}{32} (2^4 - (-2)^4) = \frac{1}{32} \cdot 0 = 0$$

$$\text{iii. Είναι } \left(\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right)' = -\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)' = -2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ οπότε}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx = -\frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = -\frac{1}{2} \left(-\eta\mu \frac{\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{iv. Είναι } (\sqrt{x^2+16})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+16}} (x^2+16)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \text{ οπότε}$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx = [\sqrt{x^2+16}]_0^3 = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 (|x-1| - |x+1| - 4) dx$.

Λύση

Θέτουμε $f(x) = |x-1| - |x+1| - 4$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών.

$$\text{Av } x \leq -1: f(x) = -x+1 - (-x-1) - 4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x+1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2$$

$$\text{Av } -1 < x < 1: f(x) = -x+1 - (-x+1) - 4 \Leftrightarrow f(x) = -x+1+x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -2x-4$$

$$\text{Av } x \geq 1: f(x) = x-1 - (x+1) - 4 \Leftrightarrow f(x) = x-1-x-1-4 \Leftrightarrow f(x) = -6$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{av } x \leq -1 \\ -2x-4 & \text{av } -1 < x < 1 \\ -6 & \text{av } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (-2) dx + \int_{-1}^1 (-2x-4) dx + \int_1^2 (-6) dx =$$

$$= -2 \int_{-2}^{-1} dx - 2 \int_{-1}^1 x dx - 4 \int_{-1}^1 dx - 6 \int_1^2 dx = -2[x]_{-2}^{-1} - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 - 4[x]_{-1}^1 - 6[x]_1^2 = -16$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

α. Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \text{ ή}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g''(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

όπου F, G παράγουσες των f, g αντίστοιχα και η επιλογή κατάλληλης παράγουσας γίνεται με τα ίδια κριτήρια όπως και στα αόριστα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 (2x+1)e^x dx, \quad I_2 = \int_0^1 x 2^x dx, \quad I_3 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln^2 x}{x^2} dx, \quad I_4 = \int_0^\pi e^{3x} \sin x dx, \quad I_5 = \int_0^\pi x e^x \sin x dx$$

Λύση

$$\bullet I_1 = \int_0^1 (2x+1)(e^x)' dx = [(2x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (3e-1) - 2(e-1) = e+1$$

$$\bullet I_2 = \int_0^1 x 2^x dx = \int_0^1 x \frac{(2^x)'}{\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} [x \cdot 2^x]_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 2^x dx = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} [2^x]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$$

$$\bullet I_3 = -\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x}\right)' \ell n^2 x = -\left[\frac{1}{x} \ell n^2 x\right]_{1/2}^1 + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} 2 \ell n x \frac{1}{x} dx = 2 \ell n^2 \frac{1}{2} - 2 \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x}\right)' \ell n x dx =$$

$$2 \ell n^2 \frac{1}{2} - 2 \left[\frac{1}{x} \ell n x\right]_{1/2}^1 + 2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} dx = \dots$$

$$\bullet I_4 = \int_0^\pi e^{3x} (\eta \mu x)' dx = [e^{3x} \eta \mu x]_0^\pi - 3 \int_0^\pi e^{3x} \eta \mu x dx = 3 \int_0^\pi e^{3x} (\sigma \nu x)' dx =$$

$$[3e^{3x} \sigma \nu x]_0^\pi - 3 \int_0^\pi 3e^{3x} \sigma \nu x dx \Rightarrow I_4 = -3e^{3\pi} - 3 - 9I_4 \Leftrightarrow 10I_4 - 3(e^{3\pi} + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_4 = -\frac{3}{10}(e^{3\pi} + 1)$$

$$\bullet I_5 = \int_0^\pi x e^x \sigma \nu x dx$$

Αρχικά επιλύουμε το αόριστο ολόκληρωμα $I = \int x e^x \sigma \nu x dx$

$$\text{Έχουμε } \int e^x \sigma \nu x dx = \int (e^x)' \sigma \nu x dx = e^x \sigma \nu x - \int e^x (\sigma \nu x)' dx =$$

$$= e^x \sigma \nu x + \int e^x \eta \mu x dx = e^x \sigma \nu x + \int (e^x)' \eta \mu x dx = e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x - \int e^x \sigma \nu x dx \text{ οπότε}$$

$$2 \int e^x \sigma \nu x dx = e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x \text{ δηλαδή } \int e^x \sigma \nu x dx = \frac{e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x}{2} + c$$

$$\text{Ισχύει } \left(\int e^x \sigma \nu x dx\right)' = \frac{1}{2}(e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x)' \text{ οπότε } e^x \sigma \nu x = \frac{1}{2}(e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x)' \quad (1)$$

$$\text{Επομένως, } I \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x) - \frac{1}{2} \int (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x) (x)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x) - \frac{1}{2} \int [e^x (\eta \mu x)' + (e^x)' \eta \mu x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x) - \frac{1}{2} \int [e^x \eta \mu x]' dx = \frac{1}{2} x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x) - \frac{1}{2} e^x \eta \mu x + c$$

$$\text{Επομένως, } I_5 = \frac{1}{2} [x (e^x \sigma \nu x + e^x \eta \mu x)]_0^\pi - \frac{1}{2} [e^x \eta \mu x]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2} \pi (e^\pi \sigma \nu \pi + e^\pi \eta \mu \pi) - \frac{1}{2} (e^\pi \eta \mu \pi - e^0 \eta \mu 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi (e^\pi (-1) + e^\pi \cdot 0) - \frac{1}{2} (0 - 0) = -\frac{\pi e^\pi}{2}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα: $\int_0^1 x e^{-x} dx$, $\int_1^e x^2 \ln x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Λύση

$$\bullet \int_0^1 x e^{-x} dx = -\int_0^1 x (e^{-x})' dx = -[x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 x' e^{-x} dx =$$

$$= -[x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -[x e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\bullet \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx =$$

$$\frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\eta \mu x)' dx = [x \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \eta \mu x dx = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \eta \mu 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + [\sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \sigma \nu \frac{\pi}{2} - \sigma \nu 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Μέθοδος Αντικατάστασης. Εκφράζεται από τους τύπους

$$\int_a^{\beta} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u) du \quad \text{όπου } u = g(x), \quad du = g'(x) dx.$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\varepsilon \varphi^3 x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx$, $I_2 = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$,

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x + 3 \eta \mu x + 2} dx, \quad I_4 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sigma \varphi(\ln x)}{x} dx, \quad I_5 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

Λύση

$$\bullet I_1 = \int_0^{\pi/4} \varepsilon \varphi^3 x \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon \varphi^3 x (\varepsilon \varphi x)' dx \quad \text{θέτουμε } u = \varepsilon \varphi x \quad \text{οπότε } du = (\varepsilon \varphi x)' dx.$$

$$\text{Αν } x=0 \text{ τότε } u=0. \text{ Αν } x=\pi/4 \text{ τότε } u=1. \text{ Έχουμε } I_1 = \int_0^1 \frac{u^3}{4} du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

• $I_2 = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$. Θέτουμε $u = x^2 - 1$ οπότε $du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{du}{2}$. Αν $x = 0$ τότε $u = -1$.

Αν $x = 1$ τότε $u = 0$. Είναι $I_2 = \int_{-1}^0 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} [e^u]_{-1}^0 = \frac{1}{2} [e^0 - e^{-1}] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

• $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta \mu x)'}{\eta \mu^2 x + 3 \eta \mu x + 2} dx = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 3u + 2} = \int_0^1 \left[\frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} \right] du = \dots$ (θέσαμε $\eta \mu x = u$)

• $I_4 = \int_{e^{5/6}}^{e^{\pi/2}} \sigma \phi(\ln x) (\ln x)' dx = \int_{\ln e^{5/6}}^{u=\ln x} \sigma \phi(u) du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sigma \nu u}{\eta \mu u} du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\eta \mu u} (\eta \mu u)' du =$

$\int_{\pi/6}^{\pi/2} [\ln(\eta \mu u)]' du = [\ln(\eta \mu u)]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln \eta \mu \frac{\pi}{2} - \ln \eta \mu \frac{\pi}{6} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$

• $I_5 = \int_{e^2}^{e^5} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$. Θέτουμε $\ln(\ln x) = u$ οπότε $[\ln(\ln x)]' dx = du \Leftrightarrow \frac{1}{x \ln x} dx = du$.

Αν $x = e^5$ τότε $u = \ln(\ln e^5) = \ln 5$. Αν $x = e^2$ τότε $u = \ln(\ln e^2) = \ln 2$.

Έχουμε $I_5 = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{u} du = [\ln|u|] = \ln|\ln 5| - \ln|\ln 2|$.

Εφαρμογές με αντικατάσταση $x = \varphi(t)$

Παράδειγμα 6

α. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$I_1 = \int_{-p}^p \sqrt{\rho^2 - x^2} dx$, $\rho > 0$, αντικαθιστώντας $x = \rho \eta \mu \theta$,

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $I_2 = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$, αν η f είναι περιττή στο $[-a, a]$.

ii. $I_3 = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ αν η f είναι άρτια στο $[-a, a]$.

Λύση

α. Θέτουμε $x = \rho \eta \mu \theta$ και για να είναι “1-1” παίρνουμε $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

με $x = -\rho$ είναι $\eta \mu \theta = -1$ οπότε $\theta = -\frac{\pi}{2}$, με $x = \rho$ είναι $\eta \mu \theta = 1$ οπότε $\theta = \frac{\pi}{2}$

Επίσης $dx = \rho \sigma \nu \theta d\theta$ και $\sqrt{\rho^2 - x^2} = \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \eta \mu^2 \theta} = \sqrt{\rho^2 \sigma \nu^2 \theta} = \rho \sigma \nu \theta$

Έχουμε $I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \sigma \nu \theta \cdot \rho \sigma \nu \theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \nu^2 \theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \sigma \nu 2\theta}{2} d\theta =$

$= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta + \frac{1}{2} \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \nu 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \rho^2 [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4} \rho^2 [\eta \mu 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi \rho^2$

Σχόλιο: Το ολοκλήρωμα I εκφράζει το εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας ρ .

β. Αν η f περιττή τότε $f(-x) = -f(x)$ στο $[-\alpha, \alpha]$

Έχουμε $I_2 = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = I + J$. Για το I θέτουμε $x = -u$ οπότε $dx = -du$.

Αν $x = -\alpha$ τότε $u = \alpha$. Αν $x = 0$ τότε $u = 0$.

Έχουμε $I = \int_{\alpha}^0 f(-u)(-du) \stackrel{f \text{ περιττή}}{=} \int_{\alpha}^0 f(u) du = -\int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (1)$

οπότε $I_2 \stackrel{(1)}{=} -\int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 0$

ii. Ομοίως αν f άρτια τότε $f(-x) = f(x)$ στο $[-\alpha, \alpha]$ και έχουμε:

$I_3 = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx$. Θέτουμε $-x = u$ οπότε $dx = -du$.

Αν $x = -\alpha$ τότε $u = \alpha$ και αν $x = 0$ τότε $u = 0$.

Έχουμε $I_3 = \int_{\alpha}^0 f(u)(-du) + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(u) du + \int_0^{\alpha} f(x) dx =$
 $= \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx$, θέτοντας $x = 2\eta\mu t$ και $x = \epsilon\phi t$ αντίστοιχα.

Λύση

• Θέτουμε $x = 2\eta\mu t$ οπότε $(x)' dx = (2\eta\mu t)' dt$ ή $dx = 2\sigma\upsilon\nu t dt$

Αν $x = 0$ είναι $0 = 2\eta\mu t \Leftrightarrow \eta\mu t = 0$ οπότε $t = 0$

Αν $x = 2$ είναι $2 = 2\eta\mu t \Leftrightarrow \eta\mu t = 1$ οπότε $t = \frac{\pi}{2}$

Έτσι $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\eta\mu^2 t} \cdot 2\sigma\upsilon\nu t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\eta\mu^2 t)} \cdot 2\sigma\upsilon\nu t dt =$

$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t} \cdot \sigma\upsilon\nu t \cdot dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2} \cdot dt =$

$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2t dt = 2[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\eta\mu 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + (\eta\mu\pi - \eta\mu 0) = \pi$

Για τον υπολογισμό του I_2 θέτουμε $x = \epsilon\phi t$ οπότε $(x)' dx = (\epsilon\phi t)' dt$ ή $dx = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t} dt$.

Αν $x = -1$ είναι $\epsilon\phi t = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi t = \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ οπότε $t = -\frac{\pi}{4}$

Αν $x = 1$ είναι $\epsilon\phi t = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi t = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$ οπότε $t = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\text{Έτσι } I_2 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t} \frac{1}{\sin^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\eta\mu^2 t}{1+\sin^2 t}} \frac{1}{\sin^2 t} dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\eta\mu^2 t + \sin^2 t} \frac{1}{\sin^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 t + \sin^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = [t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx \quad \text{ii. } \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx$$

Λύση

$$\text{i. } \text{Θέτουμε } x = \frac{\pi}{2} - t \text{ τότε } (x)' dx = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)' dt \text{ ή } dx = -dt$$

$$\text{Αν } x = 0 \text{ τότε } 0 = \frac{\pi}{2} - t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Αν } x = \frac{\pi}{2} \text{ τότε } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - t \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Έτσι } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu t) dt \stackrel{t=x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx$$

$$\text{ii. } \text{Θέτουμε } x = \pi - t \text{ τότε } (x)' dx = (\pi - t)' dt \text{ ή } dx = -dt$$

$$\text{Αν } x = 0 \text{ τότε } 0 = \pi - t \Leftrightarrow t = \pi$$

$$\text{Αν } x = \pi \text{ τότε } \pi = \pi - t \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{Έτσι } \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = -\int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\eta\mu(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\eta\mu t) dt =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\eta\mu t) dt - \int_0^{\pi} t f(\eta\mu t) dt \stackrel{t=x}{=} \pi \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx - \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx$$

$$\text{Δηλαδή } \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx - \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Η συνάρτηση που ορίζεται από ολοκλήρωμα και η παράγωγός της.

$$\text{α. Εύρεση του πεδίου ορισμού της } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της προς ολοκλήρωση συνάρτησης και απαιτούμε τα άκρα να είναι στο ίδιο διάστημα ώστε η ολοκληρούμενη συνάρτηση να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί το σύνολο ορισμού των συναρτήσεων και η παράγωγός τους.

$$1. F(x) = \int_3^x \sqrt{t^2 - 4} dt,$$

$$2. G(x) = \int_2^x \sqrt{t^3 - t} dt$$

Λύση

1. Πρέπει $t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -2$ ή $t \geq 2 \Leftrightarrow t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Επειδή το $3 \in [2, +\infty)$ πρέπει

$$\text{και το } x \in [2, +\infty). \text{ Άρα } A_F = [2, +\infty) \text{ και } F'(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

2. Πρέπει $t^3 - t \geq 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-1) \geq 0 \quad t \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$. Επειδή το $2 \in [1, +\infty)$ πρέπει

$$\text{και το } x \in [1, +\infty). \text{ Άρα } A_G = [1, +\infty) \text{ και } G'(x) = \sqrt{x^3 - x}$$

β. Εύρεση του πεδίου ορισμού σύνθετης συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα

$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$, με $f(t)$ συνεχή στο Δ . Απαιτούμε στο διάστημα του πεδίου ορισμού της $f(t)$ που ανήκει το a στο ίδιο διάστημα να ανήκει και η $g(x)$. Εννοείται ότι έχουμε πάρει τους περιορισμούς που απαιτούνται για την $g(x)$.

Όσον αφορά και την παράγωγο της H είναι $H'(x) = f(g(x))g'(x)$

$$\text{Δηλαδή } \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x))g'(x).$$

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί το ευρύτερο σύνολο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η $H(x) = \int_1^{x^2+1} \sqrt{5-t} dt$ καθώς και η παράγωγός της.

Λύση

Πεδίο ορισμού της $f(t) = \sqrt{5-t}$ είναι το $A_f = (-\infty, 5]$. Το πεδίο ορισμού της $g(x) = x^2 + 1$ είναι το $\mathbb{R}$.

$$\text{Πρέπει: } x^2 + 1 \in (-\infty, 5] \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $H(x)$ είναι :

$$A_H = [-2, 2] \text{ και } H'(x) = \sqrt{5 - (x^2 + 1)}(x^2 + 1)' = \sqrt{4 - x^2} 2x$$

$$\gamma. \text{ Η παράγωγος της } g(x) = \int_{h(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt$$

Επιλέγουμε $a \in A_f$

$$g(x) = \int_{h(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = -\int_a^{h(x)} f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt.$$

$$\text{Οπότε } g'(x) = -f(h(x))h'(x) + f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

δ. Η παράγωγος της $g(x) = \int_a^{\beta} (x-t)f(t)dt$

$$g(x) = \int_a^{\beta} (x-t)f(t)dt = \int_a^{\beta} xf(t)dt - \int_a^{\beta} tf(t)dt = x \int_a^{\beta} f(t)dt - \int_a^{\beta} tf(t)dt$$

$$\text{Άρα } g'(x) = (x)' \int_a^{\beta} f(t)dt + x \left(\int_a^{\beta} f(t)dt \right)' - \left(\int_a^{\beta} tf(t)dt \right)' =$$

$$\int_a^{\beta} f(t)dt + x \cdot 0 - 0 = \int_a^{\beta} f(t)dt$$

ε. Η παράγωγος της $g(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$

$$g(x) = \int_a^x xf(t)dt - \int_a^x tf(t)dt \Leftrightarrow g(x) = x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

$$\text{Άρα } g'(x) = \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) \Leftrightarrow g'(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ζ. Οι μορφές $g(x) = \int_a^{\beta} f(x-t)dt$, $h(x) = \int_a^x f(x-t)dt$, $\Phi(x) = \int_a^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ παραγωγίζονται αφού πρώτα μετασχηματίζουμε τα ολοκληρώματα κάνοντας αντίστοιχα τις αντικαταστάσεις $x-t=u$, $\frac{x}{t}=u$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Εύρεση του τύπου συνάρτησης f όταν γνωρίζουμε σχέση στην οποία υπάρχει $\int_a^x f(x)dt$.

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση ώστε να εξαλείφονται τα ολοκληρώματα.

Η τυχούσα σταθερά που θα προκύψει, υπολογίζεται αν θέσουμε σε υπόθεση και συμπεράσματος όπου x το ένα όριο ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 11

Αν $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ $x > 0$, $t > 0$ να βρεθεί η $G''(1)$.

Λύση

$$G'(x) = f(x) = \int_1^{3x} \frac{e^u}{\sqrt{u}}du. \text{ Άρα } G''(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{3x}}(3x)' = \frac{3e^{3x}}{\sqrt{3x}}. \text{ Επομένως } G''(1) = \frac{3e^3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^3$$

Παράδειγμα 12

Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\int_a^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x} - e^{-a} - e^{-x}f(x)$.

Λύση

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της υπόθεσης και έχουμε:

$$e^{-x}f(x) = -e^{-x} - (-e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)) \stackrel{\text{πράξεις}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{-x}f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -x + c$$

Στην υπόθεση για $x = a$ έχουμε $f(a) = 0$.

Στο συμπέρασμα για $x = a$ έχουμε $f(a) = -a + c \Leftrightarrow 0 = -a + c \Leftrightarrow c = a$. Άρα $f(x) = -x + a$

Παράδειγμα 13

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\int_1^{x^2} f(t) dt = x^2 \ln x$, $x > 0$. Να βρείτε το $f(1)$ και το $f(4)$.

Λύση

$$\int_1^{x^2} f(t) dt = x^2 \ln x \text{ οπότε } \left(\int_1^{x^2} f(t) dt \right)' = (x^2 \ln x)' \Leftrightarrow f(x^2)(x^2)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$2xf(x^2) = 2x \ln x + x \quad (1)$$

$$\text{Η (1) για } x=1 \text{ γίνεται: } 2 \cdot 1 \cdot f(1^2) = 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 \Leftrightarrow 2f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (1) για } x=2 \text{ γίνεται: } 2 \cdot 2 \cdot f(2^2) &= 2 \cdot 2 \cdot \ln 2 + 2 \Leftrightarrow 4f(4) = 4 \ln 2 + 2 \Leftrightarrow \\ 2f(4) &= 2 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow f(4) = \frac{2 \ln 2 + 1}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 14

Να βρείτε την συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και την τιμή του λ αν ισχύει: $2x^2 - \int_{\lambda}^x f(t) dt = 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ισχύει $2x^2 - \int_{\lambda}^x f(t) dt = 8 \quad (1)$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη οπότε:

$$\left(2x^2 - \int_{\lambda}^x f(t) dt \right)' = (8)' \Leftrightarrow 4x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x. \text{ Θέτουμε στην (1) } f(t) = 4t \text{ και}$$

$$\text{έχουμε: } 2x^2 - \int_{\lambda}^x 4t dt = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\lambda}^x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 \frac{x^2 - \lambda^2}{2} = 8 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2x^2 + 2\lambda^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 2$$

Παράδειγμα 15

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (1+x^2) \left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right]$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Όταν παραγωγίζουμε για να εξαλείψουμε ένα ολοκλήρωμα λύνουμε ως προς αυτό ώστε να εξαλειφεται με την πρώτη παραγωγήιση.

Έτσι έχουμε: $\frac{f(x)}{1+x^2} = 1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\left[\frac{f(x)}{1+x^2} \right]' = \frac{f(x)}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1+x^2} = c \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x (1+x^2)$$

(χρησιμοποιήσαμε την πρόταση: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$)

Στην υπόθεση για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$
 Στο συμπέρασμα για $x = 0$ έχουμε $f(0) = c$ } $c = 1$. Άρα $f(x) = e^x (1+x^2)$

Παράδειγμα 16

Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x) = \eta\mu x + \int_0^x e^{-t} f(x-t) dt \quad (1)$$

Λύση

Αρχικά μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^x e^{-t} f(x-t) dt$

- Θέτουμε $x-t = u \Leftrightarrow -t = u-x$.
- $(x-t)' dt = du \Leftrightarrow -dt = du \Leftrightarrow dt = -du$.
- Αν $t=0$ τότε $u=x$. Αν $t=x$ τότε $u=0$.

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται: $I = \int_x^0 e^{u-x} f(u) (-du) = -\int_x^0 \frac{1}{e^x} e^u f(u) du = \frac{1}{e^x} \int_0^x e^u f(u) du$

Έτσι $f(x) = \eta\mu x + \frac{1}{e^x} \int_0^x e^u f(u) du \Leftrightarrow e^x f(x) = e^x \eta\mu x + \int_0^x e^u f(u) du$.

Άρα $(e^x f(x))' = (e^x \eta\mu x)' + \left(\int_0^x e^u f(u) du \right)' \Leftrightarrow$

$$(e^x)' f(x) + e^x f'(x) = (e^x)' \eta\mu x + (e^x)(\eta\mu x)' + \left(\int_0^x e^u f(u) du \right)' \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \eta\mu x + (\sigma\upsilon\nu x) e^x + e^x f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

Άρα $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$ (2)

Θέτουμε $x=0$ στις (1) και (2) και έχουμε:

$f(0) = 0$ και $f(0) = c-1$. Άρα $c-1=0 \Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + 1$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όπως είδαμε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής και $a \in \Delta$.

Την συνάρτηση λοιπόν αυτή μπορούμε να την συναντήσουμε σε οποιοδήποτε θέμα συνέχειας και παραγώνων π.χ. Bolzano, ακρότατα το Θ. Fermat, καμπυλότητα, όρια, ασύμπτωτες, σε θέματα Rolle και Μέσης Τιμής.

Στα λυμένα παραδείγματα που ακολουθούν θα τονιστούν κάποια σημεία που θέλουν μεγαλύτερη προσοχή.

Παράδειγμα 17

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2 \int_0^x dt, & x > 0 \\ 2 \int_0^x \frac{dt}{2t+1}, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Λύση

- Αν $x > 0$, η $f(x) = 2 \int_0^x dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.
- Αν $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, η $f(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{2t+1}$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής.

Επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

- Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \int_0^x \frac{dt}{2t+1} = 2 \int_0^0 \frac{dt}{2t+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \int_0^x dt = 2 \int_0^0 dt = 0$$

$$\text{και } f(0) = 2 \int_0^0 \frac{dt}{2t+1} = 0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0.$$

- Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \int_0^x \frac{dt}{2t+1} - \left(\frac{0}{0}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left[2 \int_0^x \frac{dt}{2t+1}\right]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cdot \frac{1}{2x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{2x+1} = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \int_0^x dt - \left(\frac{0}{0}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[2 \int_0^x dt\right]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot 1}{1} = 2.$$

Άρα $f'(0) = 2$ και επομένως η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

$$\text{Είναι } \left[\int_x^0 f(t) dt\right]' = -f(x), \quad \left[\int_0^x dt\right]' = 1.$$

Παράδειγμα 18

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt$.

Λύση

Θα βρούμε το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt$.

Το πεδίο ορισμού της $f(t) = (t^2 - 5t + 4)e^{-t}$ είναι το $\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g(x) = x^2$ είναι το $\mathbb{R}$ και επειδή $g(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της F είναι το $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = \left(\int_0^{x^2} (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt \right)' = (x^4 - 5x^2 + 4)e^{-x^2} (x^2)' = 2x(x^4 - 5x^2 + 4)e^{-x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^4 - 5x^2 + 4)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή }$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 2 \text{ έχουμε :}$$

Πίνακας προσήμου των τιμών της F'

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$F'(x)$	-	o	+	o	+	o	+
$F(x)$							
		T.E.	T.M.	T.E.	T.M.	T.E.	

Άρα για $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $F(-2)$, $F(0)$, $F(2)$ αντίστοιχα, ενώ για $x = -1$, $x = 1$ η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $F(-1)$, $F(1)$ αντίστοιχα.

$$\text{Έχουμε: } F(0) = \int_0^0 (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt = 0$$

Παρατηρούμε ότι : η F είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$F(-x) = \int_0^{(-x)^2} (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt = \int_0^{x^2} (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt = F(x)$$

$$\text{Επομένως } F(-2) = F(2) \text{ και } F(-1) = F(1).$$

$$\text{Έχουμε } F(1) = \int_0^1 (t^2 - 5t + 4)e^{-t} dt = -\int_0^1 (t^2 - 5t + 4)(e^{-t})' dt =$$

$$= -[(t^2 - 5t + 4)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 [(t^2 - 5t + 4)' e^{-t}] dt = -4 + \int_0^1 (2t - 5)e^{-t} dt =$$

$$= -4 - \int_0^1 (2t - 5)(e^{-t})' dt = -4 - [(2t - 5)e^{-t}]_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-t} dt = -4 - \left[-3\frac{1}{e} + 5 \cdot 1 \right] - 2[e^{-t}]_0^1 =$$

$$-4 + \frac{3}{e} - 5 - 2\left(\frac{1}{e} - 1\right) = -4 + \frac{3}{e} - \frac{2}{e} + 2 = -2 + \frac{1}{e} = \frac{1 - 2e}{e}$$

Άρα $F(-1) = F(1) = \frac{1-2e}{e}$. Ανάλογα υπολογίζουμε το $F(-2) = F(2)$.

Παράδειγμα 19

Έστω $F(x) = \int_0^{x^2+x} \sqrt{t+3} dt$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F στο $x = -\frac{1}{2}$ παρουσιάζει αρνητικό ελάχιστο.

Λύση

Δίνεται $F(x) = \int_0^{x^2+x} \sqrt{t+3} dt$.

$$f(t) = \sqrt{t+3}, A_f = [-3, +\infty) \quad g(x) = x^2 + x, A_g = \mathbb{R}$$

Επομένως ζητάμε εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε $(x^2 + x) \in [-3, +\infty)$ δηλαδή

$$x^2 + x \geq -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ διότι } \Delta < 0. \text{ Άρα } A_F = \mathbb{R}$$

$$F'(x) = \left(\int_0^{x^2+x} \sqrt{t+3} dt \right)' = \sqrt{x^2+x+3} (2x+1), A_{F'} = \mathbb{R}$$

$$\text{Έχουμε } F'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2+x+3} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} (x^2+x+3 > 0, x \in \mathbb{R}) \\ \text{αφού } \Delta < 0 \end{matrix}$$

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$F'(x)$	-	o	+
$F(x)$			

O.E.

Πράγματι λοιπόν για $x = -\frac{1}{2}$ η F παρουσιάζει ελάχιστο και ίσο με $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $F\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.

1ος τρόπος

$$\text{Έχουμε: } F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \sqrt{t+3} dt = \int_0^{-\frac{1}{4}} (t+3)^{\frac{1}{2}} (t+3)' dt = \left[\frac{(t+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3} \left[(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \left(\left(-\frac{1}{4} + 3 \right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right) < 0, \text{ διότι}$$

$$\frac{11}{4} < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} < 0.$$

2ος τρόπος

Έχουμε $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{-1/4} \sqrt{t+3} dt = -\int_{-1/4}^0 \sqrt{t+3} dt$ (1) Επειδή $\sqrt{t+3} > 0$ για κάθε $t \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$

ισχύει $\int_{-1/4}^0 \sqrt{t+3} dt > 0 \Leftrightarrow -\int_{-1/4}^0 \sqrt{t+3} dt < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.

Παράδειγμα 20

Να βρεθεί το όριο της $f(x) = \frac{\int_0^x (\eta \mu t - t) dt}{\eta \mu x - x \sigma \nu x}$ όταν $x \rightarrow 0$.

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\int_0^x (\eta \mu t - t) dt\right]'}{(\eta \mu x - x \sigma \nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - x}{\sigma \nu x - \sigma \nu x - x(-\eta \mu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta \mu x - x}{x \eta \mu x} \right] \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma \nu x - 1}{\eta \mu x + x \sigma \nu x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta \mu x}{\sigma \nu x + \sigma \nu x - x \eta \mu x} = 0$$

Παράδειγμα 21

Έστω $\beta > \alpha > 0$ και η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ και έστω

$g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_{\alpha}^x f(t) dt$, $x > 0$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε:

α. Η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

β. $g(x_0) = 2 + f(x_0)$

Λύση

α. Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την g στο $[\alpha, \beta]$

- Η g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Η g παραγωγίσιμη στο (α, β)

$$\bullet g(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 2 + \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 2, \quad g(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \stackrel{\text{υποθ.}}{=} 2 + \frac{1}{\beta} \cdot 0 = 2$$

Δηλαδή $g(\alpha) = g(\beta)$.

Άρα από το Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, οπότε η

εφαπτομένη στο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

β. Από υπόθεση έχουμε: $g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt \Leftrightarrow xg(x) = 2x + \int_a^x f(t) dt \Leftrightarrow$

$$\int_a^x f(t) dt = xg(x) - 2x \Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt = x(g(x) - 2) \quad (1)$$

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = \left[x(g(x) - 2) \right]' \Leftrightarrow f(x) = (x)'(g(x) - 2) + x(g(x) - 2)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x) - 2 + xg'(x) \quad (2)$$

Θέτουμε στην (2) όπου x το x_0 και έχουμε:

$$f(x_0) = g(x_0) - 2 + x_0 g'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0) - 2 + x_0 \cdot 0 \quad (\text{διότι από α ερώτημα το } g'(x_0) = 0)$$

$$\Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) + 2$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ανισότητες με ολοκληρώματα

α. Γνωρίζουμε ότι αν $f(x) \geq 0$ για τα $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ (θεωρία) ή

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0 \text{ αν η } f \text{ δεν έχει τιμή } 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

β. Αν $f(x) \geq g(x)$ για τα $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$.

Απόδειξη

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M οπότε

$$m \leq f(x) \leq M \text{ τότε } \int_a^\beta m dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta M dx \text{ ή}$$

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

Παράδειγμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $f'(x) + 2xf(x) = 0$ και η C_f περνά από σημείο $A(1, 1)$.

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f .

β. Ναδειχθεί ότι $\frac{x-1}{2x^2} f(x) \leq \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt \leq \frac{x-1}{2}$.

Λύση

α. $\frac{f'(x)}{f(x)} = -2x$ Άρα $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (-2x) dx \Leftrightarrow \ln f(x) = -x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = e^{-x^2 + c}$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το $A(1,1)$ έχουμε:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = e^{-1+c} \Leftrightarrow e^{c-1} = e^0 \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{Άρα } f(x) = e^{-x^2+1}$$

β. Έστω $g(t) = \frac{f(t)}{2t^2} = \frac{e^{-t^2+1}}{2t^2}, t \in [1, x]$

$$g'(t) = \frac{-2te^{-t^2+1} \cdot 2t^2 - e^{-t^2+1} \cdot 4t}{4t^4} = -\frac{4te^{-t^2+1}(t^2+1)}{4t^4} = \frac{-e^{-t^2+1}(t+1)}{t^3} < 0 \quad \text{οπότε η } g \text{ είναι γνη-}$$

$$\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \text{ φθίνουσα στο } [1, x]. \text{ Έχουμε } g(1) = \frac{f(1)}{2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2} \text{ και } g(x) = \frac{e^{-x^2+1}}{2x^2} = \frac{f(x)}{2x^2}.$$

Επειδή $1 < t < x \Leftrightarrow g(x) < g(t) < g(1)$ (διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα)

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{2x^2} \leq \frac{f(t)}{2t^2} \leq \frac{1}{2} \text{ για κάθε } t \in [1, x].$$

$$\text{Άρα } \int_1^x \frac{f(x)}{2x^2} dt \leq \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{2} dt \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x^2} f(x) \leq \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

Εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής για την εύρεση ορίου

Παράδειγμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - 2, x \in \mathbb{R}.$

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt.$

Λύση

$$\alpha. f'(x) = -\frac{(\sqrt{x^2+4})'}{x^2+4} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = -\frac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Επομένως η f παρουσιάζει στο $x = 0$ μέγιστο, το $f(0) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

β. Με $x > 0$ και $t \in [x, x+1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε: $x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow$

$f(x+1) \leq f(t) \leq f(x)$. Ολοκληρώνουμε ως προς t και έχουμε:

$$\int_x^{x+1} f(x+1) dt \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \int_x^{x+1} f(x) dt \Leftrightarrow f(x+1) \int_x^{x+1} dt \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x) \int_x^{x+1} dt$$

(οι ποσότητες $f(x+1)$, $f(x)$ είναι σταθεροί όροι στην ολοκλήρωση ως προς t)

$$\Leftrightarrow f(x+1)(x+1-x) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x)(x+1-x) \Leftrightarrow f(x+1) \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x) \text{ και}$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} - 2 \right] \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2 \right] \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt \leq -2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = -2$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8

Αναγωγικοί τύποι

Παράδειγμα 24

Ναδειχθείότι $I_v = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^v x dx = \left(1 - \frac{1}{v}\right) I_{v-2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } I_v &= \int_0^{\pi/2} \eta\mu^v x dx = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^{v-1} x \eta\mu x dx = -\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{v-1} x (\sigma\upsilon\nu x)' dx = \\ &= -[\eta\mu^{v-1} x \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (\eta\mu^{v-1} x)' \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= -\left[\eta\mu^{v-1} \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \eta\mu^{v-1} 0 \sigma\upsilon\nu 0\right] + \int_0^{\pi/2} (v-1) \eta\mu^{v-2} x (\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} (v-1) \eta\mu^{v-2} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx = (v-1) \int_0^{\pi/2} \eta\mu^{v-2} x (1 - \eta\mu^2 x) dx = \\ &= (v-1) \int_0^{\pi/2} (\eta\mu^{v-2} x - \eta\mu^v x) dx = (v-1) \int_0^{\pi/2} \eta\mu^{v-2} x dx - (v-1) \int_0^{\pi/2} \eta\mu^v x dx = \\ &= (v-1) I_{v-2} - (v-1) I_v = (v-1) I_{v-2} - v I_v + I_v \Leftrightarrow I_v + v I_v - I_v = (v-1) I_{v-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2} \Leftrightarrow I_v = \left(1 - \frac{1}{v}\right) I_{v-2} \end{aligned}$$

Δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Ναδειχθείότιαν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha + \beta - x) dx$

(Απ.: $u = \alpha + \beta - x$ με άκρα $\begin{matrix} x = \alpha, u = \beta \\ x = \beta, u = \alpha \end{matrix}$, $dx = -du$ κ.λ.π. .)

2. Αν f συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ ισχύουν:

$$\alpha. \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx \quad \beta. \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} [f(x) + f(-x)] dx$$

(Υπ.: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx$, $u = -x$ κ.λ.π.)

3. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) dx$.

$$(Y\pi.: \begin{matrix} x = u - \gamma, & x = \alpha, u = \alpha + \gamma \\ & x = \beta, u = \beta + \gamma \end{matrix}, dx = du \text{ κ.λ.π.})$$

4. Αν f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$ τότε $\int_{\alpha\theta}^{\beta\theta} f(x) dx = \theta \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

$$(Y\pi.: u = \frac{x}{\theta} \text{ κ.λ.π.})$$

5. Αν $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να δείχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

$$(Y\pi.: \begin{matrix} x = \alpha + \beta - u, & x = \alpha, u = \beta \\ & x = \beta, u = \alpha \end{matrix}, dx = -du \text{ κ.λ.π.})$$

6. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} [f(\alpha) + f(\beta)]$$

$$(Y\pi.: \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = c(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, u = \alpha + \beta - x \text{ κ.λ.π.} \\ \text{για το ολοκλήρωμα του πρώτου μέρους})$$

7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\alpha. f'' \text{ γνήσια αύξουσα}, \quad \beta. \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = -2\pi, \quad \gamma. f'(\pi) = \pi.$$

Να δείχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

(Απ.: Βρίσκουμε ότι $f'(0) = \pi$ στο $[0, \pi]$ για την f' Εφαρμόζεται το Θ. Rolle υπάρχει

$x_0 \in (0, \pi): f''(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο

άρα x_0 = σημείο καμπής. f'' γνήσια μονότονη άρα μοναδική ρίζα το x_0)

8. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 tf^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

$$(A\pi.: \text{Με } u = xt \begin{cases} t=0, u=0 \\ t=1, u=x \end{cases}, du = xdt, dt = \frac{1}{x} du \Rightarrow f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^x uf^2(u) du \Rightarrow$$

$$f(x) = 1 - 2 \int_0^x uf^2(u) du \Rightarrow f'(x) = -2xf^2(x) \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \int \left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int 2x dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \xrightarrow[\text{Σομπ.}]{\text{Υπόθ.}} \begin{matrix} \rightarrow x=0, f(0)=1 \\ \rightarrow x=0, c=\frac{1}{f(0)}=1 \end{matrix} \left\} f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \right.$$

9. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείχθεί ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $(-3, 0)$.

(Υπ.: $g(0) = 1$, $g(-3) = 25 - \int_0^{24} f(t) dt$ αλλά $\int_0^{24} f(t) dt \geq \int_0^{24} 2 dt = 48 \Rightarrow g(-3) < 0$ κ.λ.π., Bolzano)

10. Έστω $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ και $g(x) = \int_0^x h(t) dt$. Να δείξετε ότι $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$.

11. Αν η f είναι περιοδική με περίοδο T τότε $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

(Υπ.: Έχουμε $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_a^{a+T} f(x) dx = I_1 + I_2$ για το I_2 θέτουμε

$$dx = du$$

$$x = y + T \quad \begin{matrix} x = T, u = 0 \\ x = a + T \Rightarrow u = a \end{matrix} \Rightarrow I_2 = \int_0^a f(u+T) du = \int_0^a f(u) du, \quad T = \text{περίοδος}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^a f(x) dx \Rightarrow I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

12. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad \beta. \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx \quad \gamma. \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

13. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x \cdot \sigma \nu \nu x dx \quad \beta. \int_0^{\pi} x^2 \cdot \eta \mu x dx \quad \gamma. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \eta \mu 2x} dx$$

14. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx \quad \beta. \int_0^1 \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6} dx$$

15. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_v = \frac{1}{v-1} I_{v-1}$, για κάθε $v \geq 3$.

16. Αν $I_v = \int_0^e (\ln x)^v dx$, $v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι ισχύει: $I_v = e - v \cdot I_{v-1}$, για κάθε $v \geq 1$.

17. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, \beta]$ και ισχύουν:

$$f(a) = f(\beta) = g(a) = g(\beta) = 0 \text{ να δείξετε ότι: } \int_a^\beta f''(x) \cdot g(x) dx = \int_a^\beta f(x) \cdot g''(x) dx$$

18. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $f(x) = f(a + \beta - x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Να δείξετε ότι:
$$\int_a^\beta x f(x) dx = \frac{a+\beta}{2} \cdot \int_a^\beta f(x) dx.$$

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^\nu (1-x)^\mu dx = \int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu dx \quad \text{με } \mu, \nu > 0$$

20. Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \cdot e^x dx$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \geq 2$, $I_\nu = e - \nu \cdot I_{\nu-1}$ και να υπολογίσετε το I_3 .

21. Να δείξετε ότι: $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(2-x) dx$

22. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_0^1 x \cdot e^{-2x} dx \qquad \beta. \int_0^1 x \cdot \ln(4+x^2) dx \qquad \gamma. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

23. Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha. \int_0^2 2x^2 \cdot \eta\mu(x^3+2) dx \qquad \beta. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2} dx \qquad \gamma. \int_0^{2e} |\ln x - 1| dx$$

24. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και για την οποία ισχύει: $f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 4]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x f(t) dt = 4$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 4)$.

25. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$
(Γενικές Εξετάσεις 1996)

26. Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και ισχύουν: $\int_0^\pi f(x) + f''(x) \eta\mu x dx = 2$ και $f(\pi) = 5$ να βρείτε το $f(0)$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(x) + f(1-x) = x - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{12}$.

28. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_3^x f(t) dt \geq x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $f(3)$.
29. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_3^x \sqrt{t^2 - 4} dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
30. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - t} dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
31. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F με τύπο $F(x) = \int_{\frac{1}{3}}^x \ln(x - x^3) dt$
32. α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $f(x) = c \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Αν $f(x) = \int_{-1}^x f(t) dt + 1$ να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$.
33. Αν ισχύει $\int_{3^{2\lambda} + 9^\lambda}^{11 \cdot 4^{k-1} + 4^{k+1}} f(x) dx = 0$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-1, 1]$, για την οποία ισχύει: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{-1} f(x) dx$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

- α. Η συνάρτηση $g(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$.
- β. Η εξίσωση $f(x) + f(-x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες ρ_1, ρ_2 με $-1 < \rho_1 < 0 < \rho_2 < 1$.
- γ. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-1, 1]$, τότε $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Α.

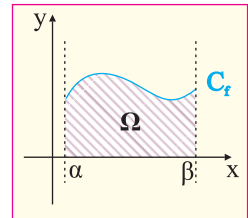
ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- 1.α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(x) ≥ 0$ τότε το εμβαδόν του χωρίου $Ω$ που ορίζεται από την C_f (γραφική παράσταση της f) τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = α$, $x = β$ είναι

$$E(Ω) = \int_a^b f(x) dx$$

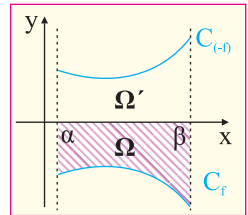
Παρατήρηση

Το χωρίο $Ω$ ορίζεται και ως το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύουν $α ≤ x ≤ β$ και $0 ≤ y ≤ f(x)$.



- β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(x) ≤ 0$ για τα $x ∈ [α, β]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου $Ω$ που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = α$, $x = β$ είναι

$$E(Ω) = \int_a^b [-f(x)] dx .$$



Ισοδύναμη έκφραση του $E(Ω)$:

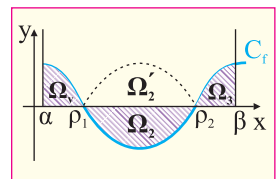
Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύουν $α ≤ x ≤ β$ και $f(x) ≤ y ≤ 0$.

- γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση f στο $[α, β]$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x = α$, $x = β$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(Ω) = \int_a^b |f(x)| dx .$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$$\begin{aligned} E(Ω) &= E(Ω_1) + E(Ω_2) + E(Ω_3) = \\ &= \int_a^{\rho_1} f(x) dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (-f(x)) dx + \int_{\rho_2}^{\beta} f(x) dx \end{aligned}$$



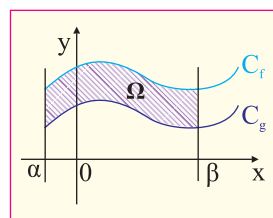
2. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων

f, g στο $[\alpha, \beta]$ και από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.

Ειδικότερα:

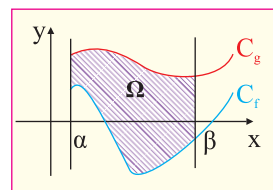
α. Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$$



β. Αν $f(x) \leq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)] dx$$



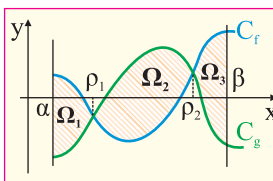
γ. Αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

$$\text{τότε } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx.$$

Στο παράδειγμα του σχήματος είναι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) =$$

$$\int_{\alpha}^{\rho_1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\rho_2}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$



B.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$.

Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 2$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$.

Λύση

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον $x'x$. Θέτουμε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλαδή

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \text{ και}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

$-\infty$	1	2	$-\infty$	
+	o	-	o	+

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \frac{11}{6} \text{ τ.μ.}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την C_f , την C_g τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Αποδεικνύουμε ότι η $(f - g)$ είναι συνεχής.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $(f - g)$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - x^2$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 3$.

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g :

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 4x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) - g(x) = x^2 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2) \text{ οπότε}$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \text{ και}$$

$$f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$$

	0		2	
+	o	-	o	+

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [-1, 0]$ είναι $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

$$\text{για κάθε } x \in [0, 2] \text{ είναι } f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$\text{για κάθε } x \in [2, 3] \text{ είναι } f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$\text{Έτσι } E = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx + \int_2^3 (f(x) - g(x)) dx = 8 \text{ τ.μ.}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

α. Για να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$, θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E = \int_{p_1}^{p_k} |f(x)| dx$, όπου p_1 η μικρότερη ρίζα της f και p_k η μεγαλύτερη ρίζα της f .

β. Ομοίως όταν ζητείται να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την C_g , θα εφαρμόσουμε τον τύπο $E = \int_{p_1}^{p_k} |f(x) - g(x)| dx$, όπου p_1 , p_k η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα ρίζα της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^3 - x \text{ και τον } x'x.$$

Λύση

Βρίσκουμε που τέμνει η C_f τον $x'x$. Είναι

x	-1	0	1
f(x)	-	+	-

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f δηλ.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

$$\text{Άρα το εμβαδόν είναι: } E = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 x^3 dx - \int_{-1}^0 x dx - \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των

$$\text{συναρτήσεων } f(x) = 3x^4 + x^2 \text{ και } g(x) = 2x^4 + 2x^2.$$

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g :

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 = 2x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$:

$$\text{Είναι } f(x) - g(x) = 3x^4 + x^2 - 2x^4 - 2x^2 = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x-1)(x+1)$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

-1	1
+	+

$$f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1].$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$: $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

$$\text{Άρα } E = \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^1 (-x^4 + x^2) dx = \dots = \frac{4}{15} \text{ τ.μ.}$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{2}{x}$

και την ευθεία $x + 2y - 5 = 0$.

Λύση

- Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων της $f(x) = \frac{2}{x}$ και

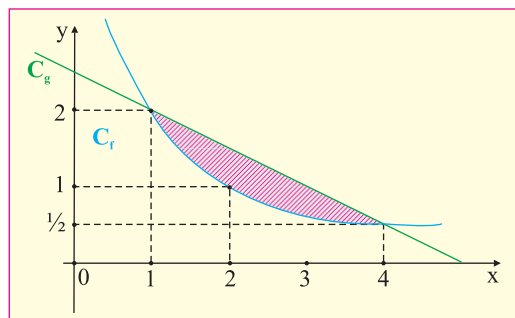
της ευθείας $x + 2y - 5 = 0$.

Είναι

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \frac{2}{x} \\ x + 2y - 5 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y = \frac{2}{x} \\ y = \frac{5-x}{2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x} = \frac{5-x}{2} \Leftrightarrow 4 = 5x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$$\text{Είναι } E = \int_1^4 (g(x) - f(x)) dx = \int_1^4 \left(\frac{5-x}{2} - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{1}{4}(15 - 8\ln 4) \text{ τ.μ.}$$

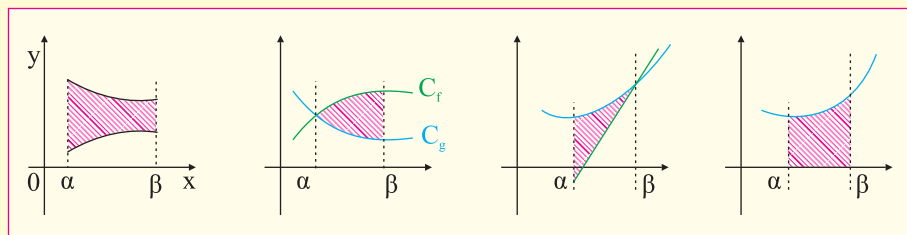
Κατηγορία – Μέθοδος 4

Στις περιπτώσεις που ο υπολογισμός του εμβαδού δεν είναι άμεσα υπολογίσιμος από τα προηγούμενα, χωρίζουμε την επιφάνεια σε επιμέρους χωρία που την επικαλύπτουν και είναι υπολογίσιμα. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρίων.

Στην ίδια λογική της **επικάλυψης** είναι και η περίπτωση που βρίσκουμε το ζητούμενο εμβαδόν από την διαφορά υπολογίσιμων χωρίων.

Στον καθορισμό των χωρίων αποφασιστικό ρόλο παίζουν **οι γραφικές παραστάσεις** των συναρτήσεων του προβλήματος.

Τα χωρία θα καθορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις μόνο δύο συναρτήσεων και δύο κατακόρυφες ευθείες όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα.



Παράδειγμα 6

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2, 4)$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(-2, 4)$. Είναι

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -2 \\ f(x_0) &= f(-2) = (-2)^2 = 4 \\ f'(x) &= 2x \\ f'(x_0) &= f'(-2) = -4 \end{aligned} \right\} \text{ και η εξίσωση της εφαπτομένης:}$$

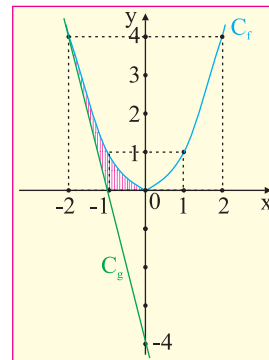
$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 4 = -4(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$y = -4x - 8 + 4 \Leftrightarrow y = -4x - 4. \text{ Θέτουμε } g(x) = y = -4x - 4$$

σχεδιάζουμε την C_f και την ευθεία ε .

Βρίσκουμε που τέμνει η ευθεία τον $x'x$. Για $y = 0$ έχουμε $x = -1$.

$$\text{Είναι } E = \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 4x + 4) dx + \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$$

**Παράδειγμα 7**

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των

συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln \frac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

Λύση

Είναι $x > 0$. Θέτουμε $h(x) = y = \ln 2$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g, h (ανά δύο).

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

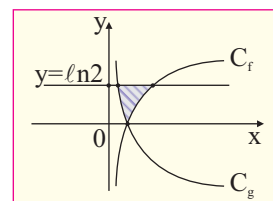
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ απορ.} \end{cases}$$

$$\text{Επίσης } f(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{και } g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h με:

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \quad h(x) = y = \ln 2$$



$$\begin{aligned}
 \text{Είναι } E &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (h(x) - g(x)) dx + \int_1^2 (h(x) - f(x)) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln 2 + \ln x) dx + \int_1^2 (\ln 2 - \ln x) dx = \\
 &= \ln 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx + \ln 2 \int_1^2 dx - \int_1^2 \ln x dx = \\
 &= \ln 2 [x]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x)' \ln x dx + \ln 2 [x]_1^2 - \int_1^2 (x)' \ln x dx = \\
 &= \ln 2 \left[1 - \frac{1}{2} \right] + [x \ln x]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx + \ln 2 [2 - 1] - [x \ln x]_1^2 + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= \frac{\ln 2}{2} + \left(1 \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) - [x]_{\frac{1}{2}}^1 + \ln 2 - (2 \ln 2 - 1 \ln 1) + [x]_1^2 = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις

$$y = 2 - x \text{ και } y^2 = x.$$

Λύση

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραμμών:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow (2 - x)^2 = x \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

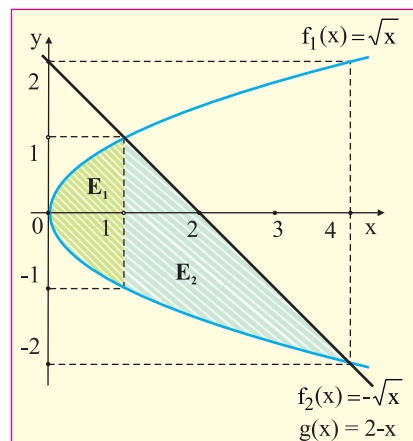
- Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις της ευθείας

$$y = 2 - x \text{ και της παραβολής } y^2 = x.$$

$$\text{Είναι } E = 2E_1 + E_2$$

$$E = 2 \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^4 (g(x) - f_2(x)) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x}) dx =$$

$$2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int_1^4 x dx + \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{27}{6} \text{ τ.μ.}$$



Γ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

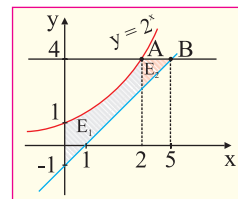
Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις: $y = 4$, $y = 2^x$, $x = 0$, $y = x - 1$.

Λύση

Έστω Α το σημείο τομής της 2^x και της $y = 4$ οπότε $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Έστω Β το σημείο τομής της $y = 4$ και $y = x - 1$ οπότε $x = 5$.



Το Ε χωρίζεται σε E_1 και E_2 : $E = E_1 + E_2 = \int_0^2 [2^x - (x-1)]dx + \int_2^5 [4 - (x-1)]dx =$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 + \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_2^5 = \left(\frac{3}{\ln 2} + \frac{9}{2} \right) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$ και το σημείο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη στο Α.

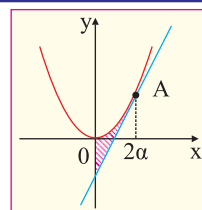
Λύση

Η εφαπτομένη στο $A(2\alpha, 8\alpha^2)$ έχει εξίσωση $y - 8\alpha^2 = 8\alpha(x - 2\alpha)$ αφού $f'(2\alpha) = 4 \cdot 2\alpha = 8\alpha$.
Εί-
ναι $y = 8\alpha x + 8\alpha^2 - 16\alpha^2 \Leftrightarrow y = 8\alpha x - 8\alpha^2$
επειδή $f''(x) = 8 > 0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα στο R
οπότε $f(x) > g(x) = y = 8\alpha x - 8\alpha^2$.

Το εμβαδόν του χωρίου είναι :

$$E = \int_0^{2\alpha} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{2\alpha} (2x^2 - 8\alpha x + 8\alpha^2)dx = \frac{16\alpha^3}{3} \text{ τ.μ.}$$

Η σχετική θέση της C_f με την εφαπτομένη της $y = g(x)$ σε σημείο Α καθορίζεται από το πρόσημο της $f''(x)$. Έτσι αν $f''(x) > 0$, $x \in \Delta$ τότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος Δ .



Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ και $M\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που άγονται από το Μ στην καμπύλη της f και στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις παραπάνω εφαπτόμενες.

Λύση

Έστω (x_0, y_0) ένα σημείο επαφής. Το $M \notin C_f$, άρα βρίσκουμε τα σημεία επαφής λύνοντας το

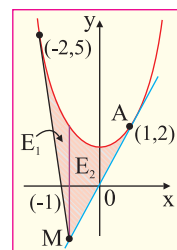
$$\text{σύστημα } \begin{cases} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}, \text{ όπου } (x, y) \text{ οι συντεταγμένες του } M, \text{ δηλαδή}$$

$$\begin{cases} -1 - y_0 = -x_0 - 2x_0^2 \\ y_0 = x_0^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x = g_1(x) \\ y = -4x - 3 = g_2(x) \end{cases}$$

Η ευθεία $x = -\frac{1}{2}$ χωρίζει το χωρίο σε δύο χωρία, οπότε:

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-2}^{-1/2} [f(x) - g_2(x)]dx + \int_{-1/2}^1 [f(x) - g_1(x)]dx =$$

$$\int_{-2}^{-1/2} [x^2 + 1 - (-4x - 3)]dx + \int_{-1/2}^1 (x^2 + 1 - 2x)dx = \frac{57}{8} - \frac{33}{8} = 3 \text{ τ.μ.}$$



Άσκηση 4

Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$).

i. Να υπολογίσετε το $E(\lambda)$.

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

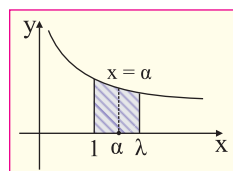
iii. Να προσδιορίσετε την ευθεία $x = a$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

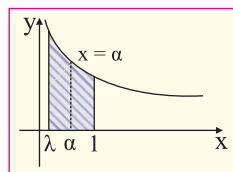
i. Η f είναι συνεχής και $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις $\lambda > 1$ και $0 < \lambda < 1$.

$$\text{Αν } \lambda > 1 \text{ τότε } E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$$



$$\text{Αν } 0 < \lambda < 1 \text{ τότε } E(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx = \int_\lambda^1 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_\lambda^1 = -1 + \frac{1}{\lambda}$$



ii. Είναι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$ και

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\lambda} \right) = +\infty$$

iii. Για τον προσδιορισμό του a θα πρέπει να ισχύει:

$$\text{Αν } \lambda > 1, \text{ τότε } \int_1^a f(x) dx = \frac{E(\lambda)}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{a} + 1 = \frac{-\frac{1}{\lambda} + 1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{a} = \frac{\lambda - 1}{2\lambda} - 1 \Leftrightarrow a = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

$$\text{Αν } 0 < \lambda < 1, \text{ τότε } \int_a^1 f(x) dx = \frac{E(\lambda)}{2} \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{a} = \frac{-1 + \frac{1}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1 - \lambda}{2\lambda} + 1 \Leftrightarrow a = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

Άσκηση 5

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα $[a, \beta]$ με $a > 0$, $f(a) > 0$ και γνησίως αύξου-

σα με τα κοίλα άνω. Να δειχθεί η σχέση: $f(a)(\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(\beta)}{2}(\beta - a)$

Λύση

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$:

$$\text{Είναι } a \leq x \Leftrightarrow f(a) \leq f(x) \text{ οπότε } \int_a^\beta f(a) dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \text{ ή } (\beta - a)f(a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \quad (1)$$

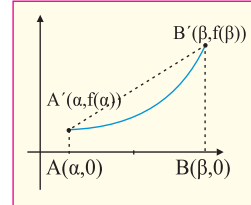
Πρέπει να δείξουμε την ανισότητα $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$. Επειδή η f στρέφει τα κοί-

λα άνω στο διάστημα $[a, b]$ η χορδή $A'B'$ είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f . Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου με κορυφές τα σημεία $A'(a, f(a))$, $B'(\beta, f(\beta))$, $B(\beta, 0)$, $A(a, 0)$ είναι μεγαλύτερο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την $x = a$, $x = \beta$, τον x' και

και την C_f και είναι ίσο με $\int_a^b f(x) dx$. Είναι

$$E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(AA' + BB')AB}{2} = \frac{f(a) + f(\beta)}{2}(b-a) \text{ οπότε}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(\beta)}{2}(b-a) \quad (2). \text{ Από (1) και (2) εδείχθη το ζητούμενο.}$$



Άσκηση 6

i. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις

$$x = 2, x = 3 \text{ για } f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

ii. Ομοίως για την $f(x) = x^2 - 2x$ και $x = 0, x = 3$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(x) \geq 0$, για $x \in [2, 3]$.

$$\text{Άρα } E = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{25}{3} \text{ τ.μ.}$$

ii. Προφανώς η f έχει ρίζες 0, 2 και $f(x) \geq 0$, για $x \in [2, 3]$ ενώ $f(x) \leq 0$, για $x \in [0, 2]$.

$$\text{Άρα } E = \int_0^2 [-f(x)] dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και τα σημεία καμπής της C_f

iii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική ασύμπτωτη την $y = 0$.

iv. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της f .

v. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την οριζόντια ασύμπτωτή της και

$$\text{τις ευθείες } x = \lambda \text{ και } x = -\lambda \text{ με } \lambda > 0 \text{ να δείξετε ότι } E(\lambda) = 2 \int_0^\lambda f(x) dx.$$

vi. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων

στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων x και $e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Η e^{-x^2} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση της $(-x^2)$ με

την e^x . Είναι $f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} (1 - x^2)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	o	+	o	-
$f(x)$					

T.E. T.M.

ii. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο των $e^{\frac{-x^2}{2}}$ και $(1 - x^2)$

$$\text{Είναι } f''(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} (-x)(1 - x^2) + e^{\frac{-x^2}{2}} (-2x)$$

$$f''(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} (x^3 - 3x) = e^{\frac{-x^2}{2}} [x(x^2 - 3)]$$

$$\text{με } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}$$

Η f είναι κυρτή όταν $f''(x) \geq 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα σημεία με τετμημένες $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$			
$f'(x)$	-	o	+	o	-	+
$f(x)$						
	$\Sigma.K.$	$\Sigma.K.$	$\Sigma.K.$			

iii. Η $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$ ως συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{-x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} x} = 0$$

Άρα ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y = 0 \cdot x + 0$ ή $y = 0$.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = \lim_{x^2=y} e^{\frac{-y}{2}} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} x} = 0.$$

Άρα ασύμπτωτη και στο $-\infty$ είναι η $y = 0$.

Υπενθύμιση

Η $y = ax + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη

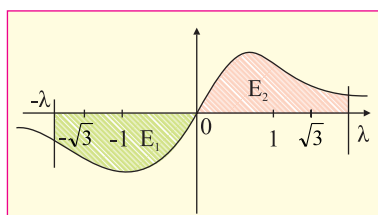
στην C_f στο $+\infty$ όταν $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

iv. Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	o	+	+	o	-
$f''(x)$	-	o	+	+	o	-	+
$f(x)$							
	ΣΚ		ΤΕ		ΣΚ		ΤΜ
					ΣΚ		

Η γραφική παράσταση



v. Η f είναι **περιττή** αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = -f(x)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x = -\lambda$, $x = 0$ και την $y = 0$ είναι

$E_1 = \int_{-\lambda}^0 -f(x) dx$ αφού $f(x) < 0$. (Θέτουμε $x = -t$ οπότε $dx = -dt$ για $x = 0$ είναι $t = 0$ ενώ για $x = -\lambda$ είναι $t = \lambda$).

Έτσι $E_1 = \int_{\lambda}^0 -f(-t)(-dt) = -\int_{\lambda}^0 f(t) dt = \int_0^{\lambda} f(t) dt = E_2$ επομένως

$E = E_1 + E_2$ οπότε $E(\lambda) = 2 \int_0^{\lambda} f(x) dx$.

vi. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\lambda} f(x) dx = \int_0^{\lambda} xe^{\frac{-x^2}{2}} dx = -\int_0^{\lambda} e^{\frac{-x^2}{2}} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' dx =$

$$= -\int_0^{\lambda} \left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)' dx = -\left[e^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^{\lambda} = -\left(e^{\frac{-\lambda^2}{2}} - e^0\right) = 1 - e^{\frac{-\lambda^2}{2}} \text{ οπότε } E(\lambda) = 2\left(1 - e^{\frac{-\lambda^2}{2}}\right) \text{ και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2\left(1 - e^{\frac{-\lambda^2}{2}}\right) = 2(1 - 0) = 2 \text{ τ.μ.}$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ και τον άξονα x' .
2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = |\ln x|$ και την ευθεία $y = 1$.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 - 5x^2$, $g(x) = x^3 - 4x^2$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$.
4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{6}{x-1} - 3$ και την ευθεία $3x + y - 9 = 0$.

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^3 + x^2 - x - 2$.
6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.
7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $f(x) = e^x$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,e)$. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δύο αυτές εφαπτόμενες και την C_f .
8. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 2x - 1$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = 2$.
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο $(1,1)$ και τον άξονα $x'x$.
10. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)$ αντίστοιχα.
Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

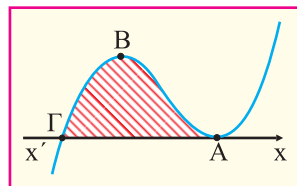
Ε

ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

- A. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της καμπύλης $y = x^3 - 12x + 16$.

Να υπολογίσετε:

- Τις συντεταγμένες των σημείων A και B.
- Τις συντεταγμένες του Γ, του σημείου δηλαδή που η καμπύλη $y = x^3 - 12x + 16$ τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



- B. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Με $E(\kappa)$, $\kappa \in (0,1)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = f(\kappa)$. Να βρεθεί ο κ ώστε το $E(\kappa)$ να γίνεται ελάχιστο.

