

Γεωμετρία Α' Λυκείου

Κεφάλαιο 3ο : Τρίγωνα



ΑΣΚΗΣΗ (2_2814)

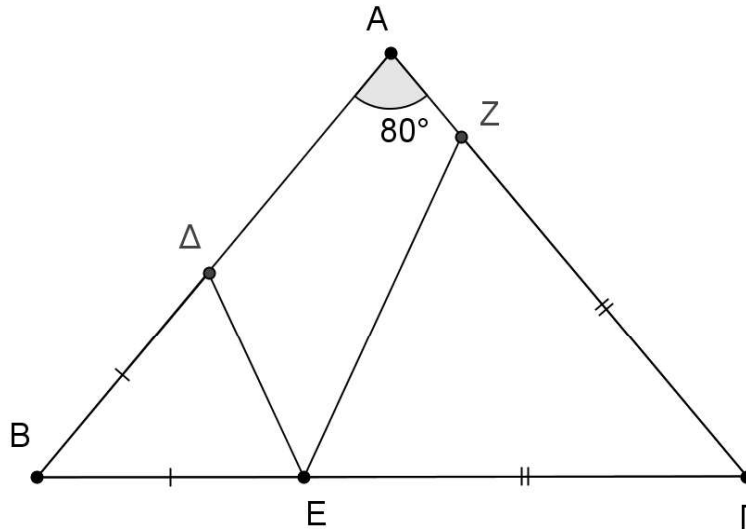
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.

α. Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $\triangle B\Delta E$ και $\triangle \Gamma Z E$

(Μονάδες 15)

β. Να υπολογιστεί η γωνία $\angle \Delta E Z$.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2816)**

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (K, ρ) φέρνουμε τις τέμνουσες του ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ ώστε $\Sigma B = \Sigma \Delta$. Τα $K\Lambda$ και KM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ του κύκλου αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $\triangle K\hat{B}\Sigma$ και $\triangle K\hat{\Delta}\Sigma$ είναι ίσα.

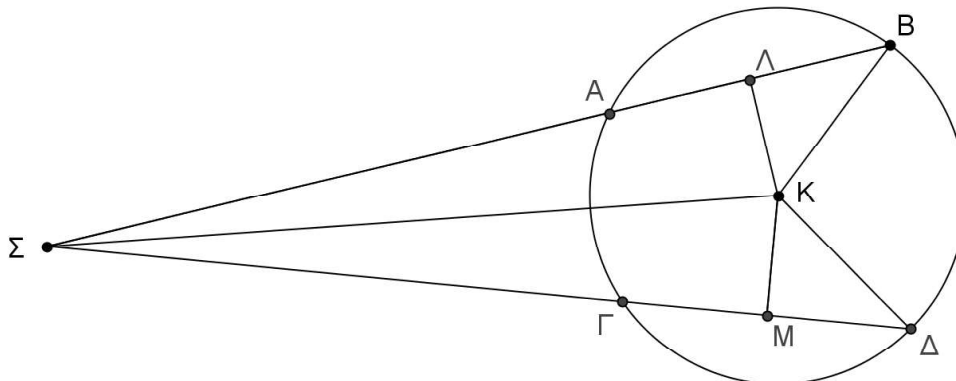
(Μονάδες 10)

ii) $K\Lambda = KM$.

(Μονάδες 10)

β. Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma \Delta$ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2837)

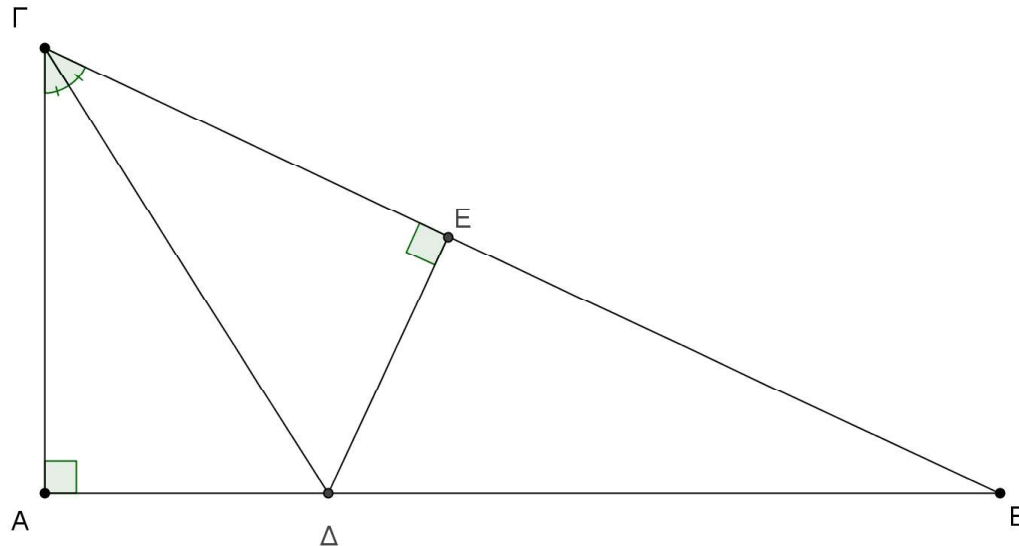
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$

(Μονάδες 13)

β) $A\Delta < \Delta B$

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2839)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

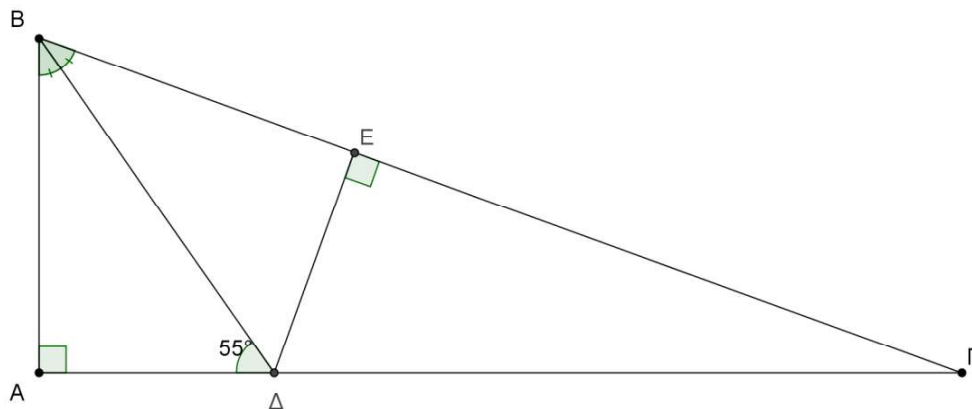
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle \Delta E$.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2845)

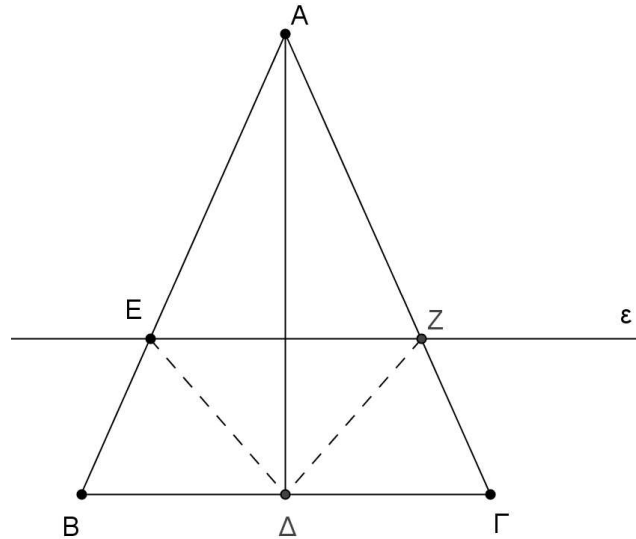
Σε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο AD και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\triangle EZD$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $\triangle E\Delta D$ και $\triangle Z\Delta D$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2846)**

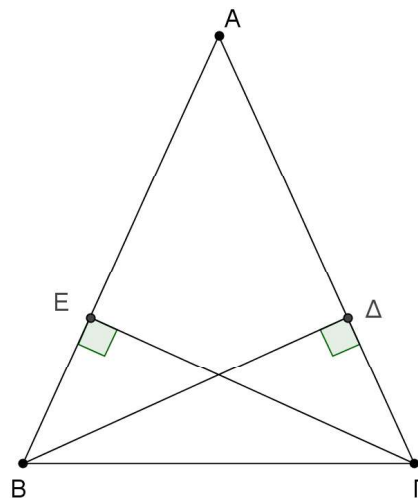
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle \Gamma E B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $AD=AE$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2847)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$.
Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου

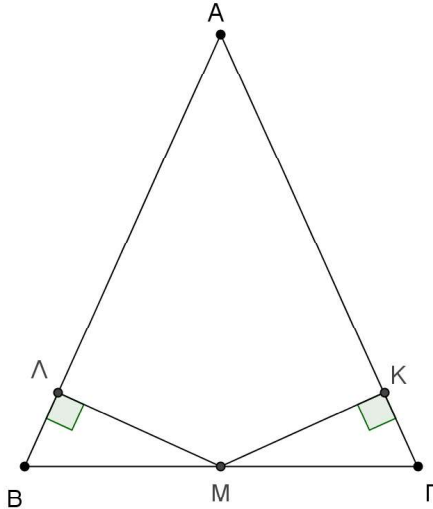
$\triangle AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK=ML$.

(Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{KML}$.

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2848)**

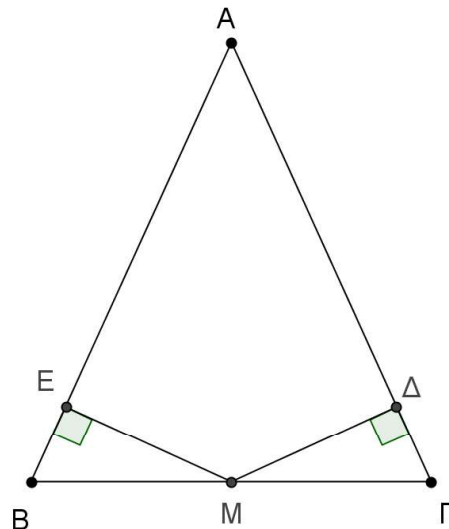
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = AG$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $M\Delta=ME$.

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $\triangle A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2853)

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\hat{X}\hat{O}\hat{\Psi}$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Μονάδες 25

ΑΣΚΗΣΗ (2_2854)

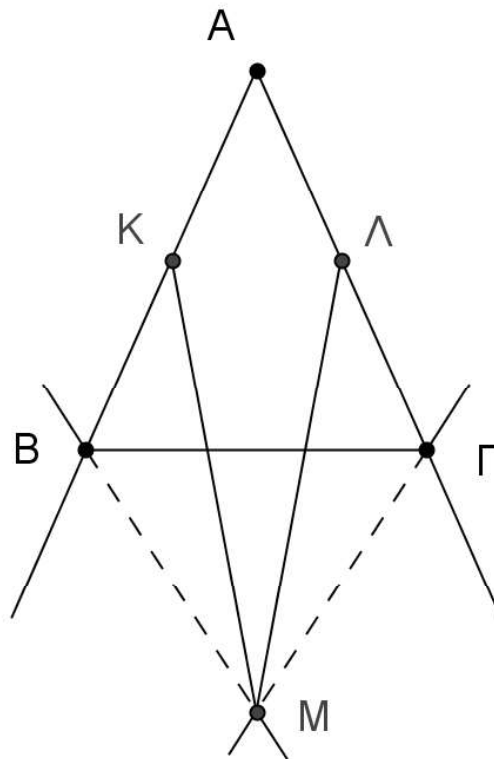
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle B\hat{M}\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=MG$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $MK=ML$.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2855)**

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{B}$.

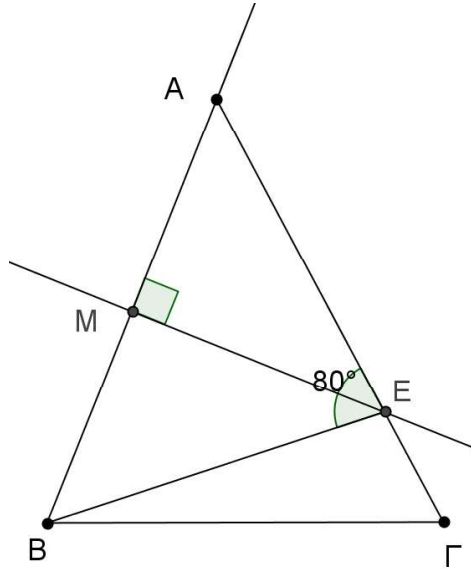
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$.

(Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AG στο εσωτερικό της σημείο Δ .

Αν η γωνία $\hat{A} \hat{\Delta} B$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A \hat{B} \Gamma$.

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2860)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

α) Το τρίγωνο BIG είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες.

Μονάδες 10

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (2_3417)

Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $A \hat{B} \Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A' \hat{B}' \Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $A \hat{B} \Gamma$ και $A' \hat{B}' \Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $A \hat{B} \Gamma$ και $A' \hat{B}' \Gamma'$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_3420)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη BD και GE είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Αν τα ύψη BD και GE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3421)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3423)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και BD η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία ED τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

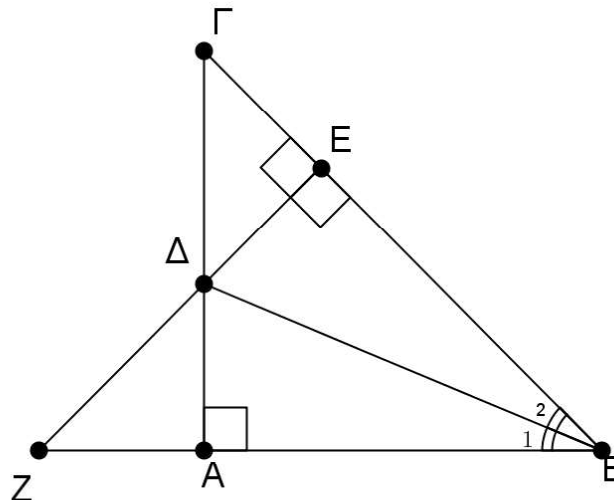
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_3425)

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε ΔΕ = ΑΔ.

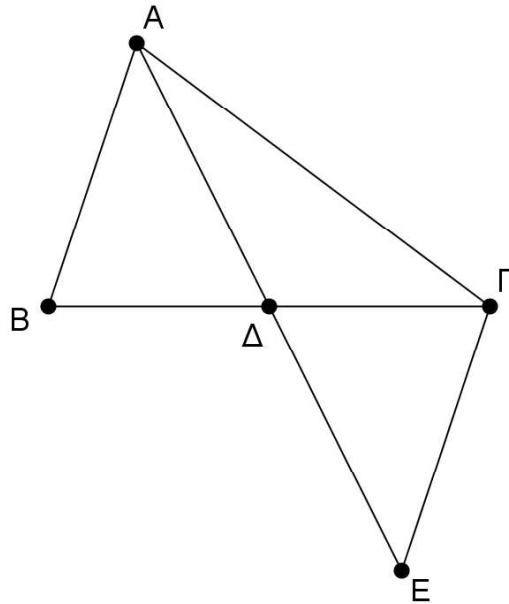
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = GE$

Μονάδες 12

β) $AD < \frac{AB + AG}{2}$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3426)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του Γ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $DE \perp BG$.

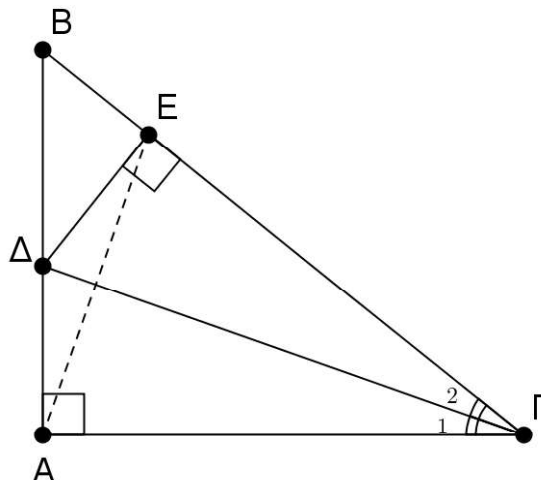
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_4974)

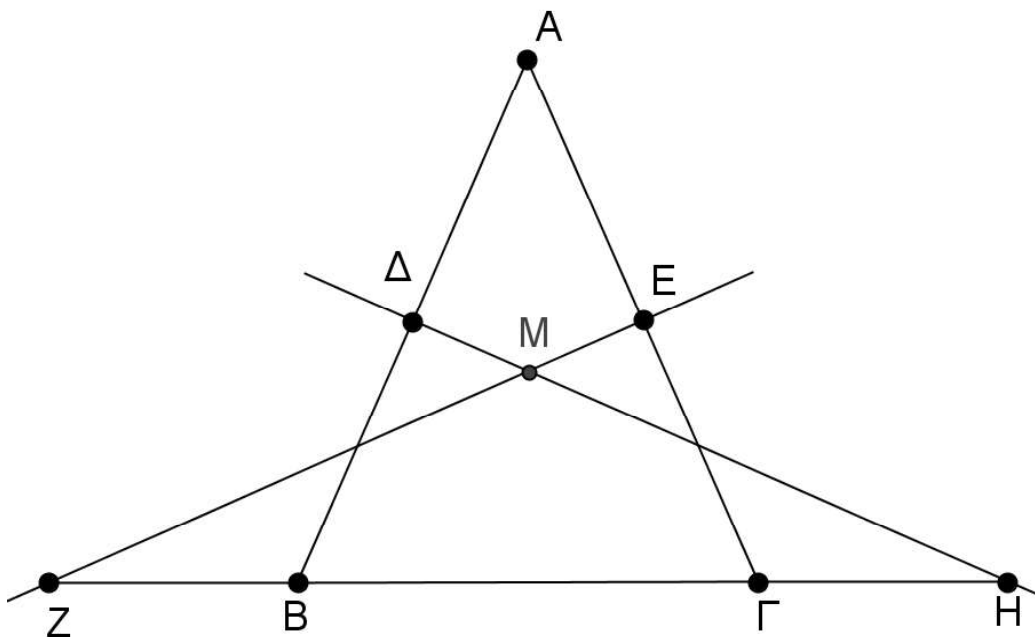
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5017)**

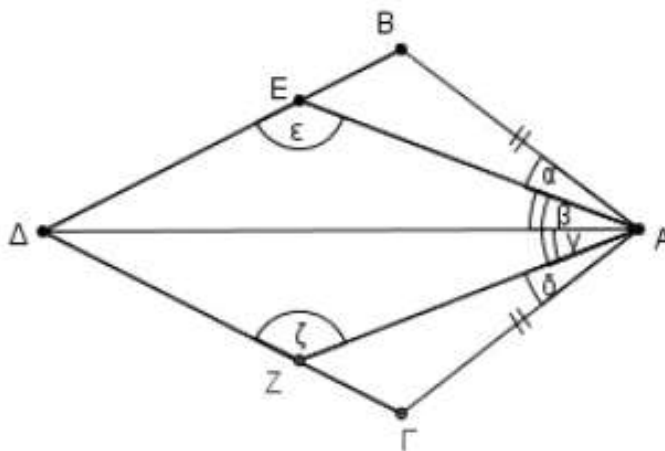
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα

Μονάδες 12

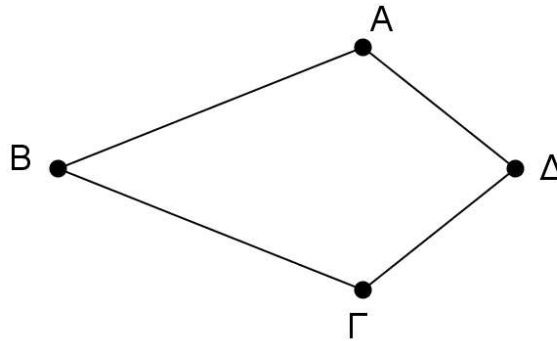
β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5029)

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{BA\Gamma} = \hat{B\Gamma A}$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5035)

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και $A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.

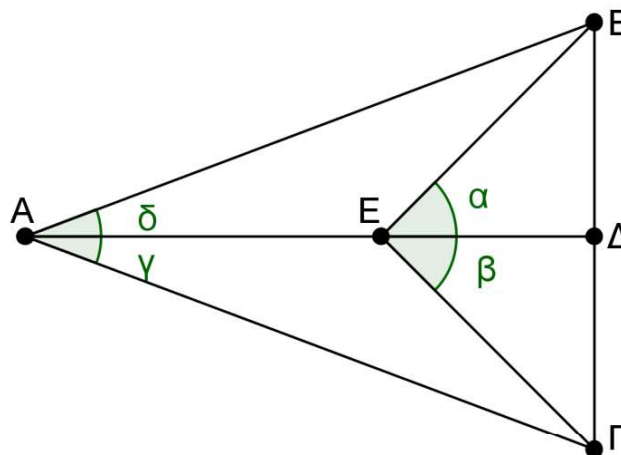
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5048)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

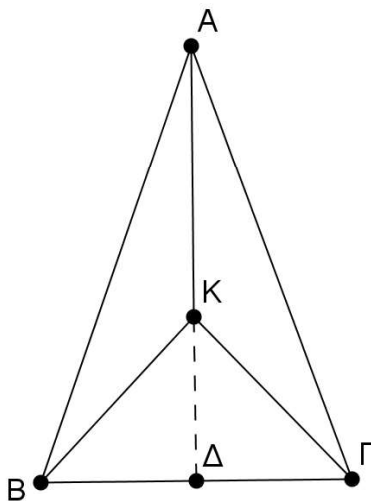
(Μονάδες 12)

β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$ του τριγώνου $BK\Gamma$.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5053)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{\epsilon\zeta}} = \widehat{\Gamma_{\epsilon\zeta}}$

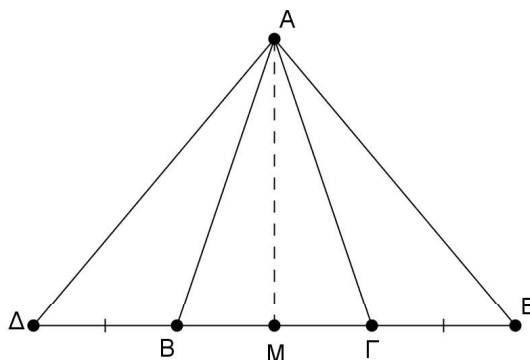
(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5075)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5127)

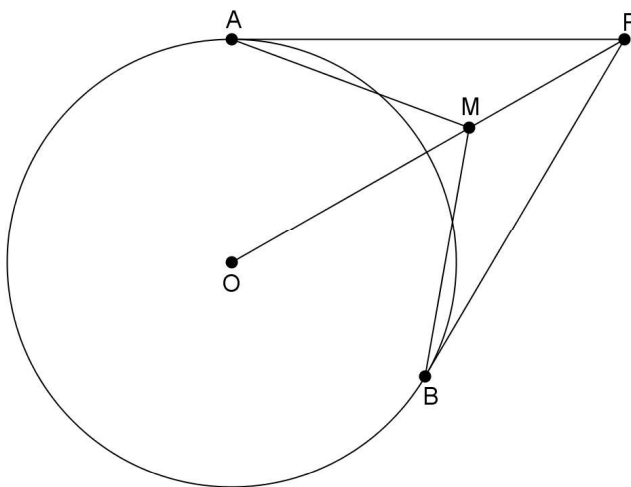
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5136)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσα .

Μονάδες 5

β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\epsilon\Gamma$ είναι ίσα .

Μονάδες 10

γ) το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5139)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$ ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας K . Στην

προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές

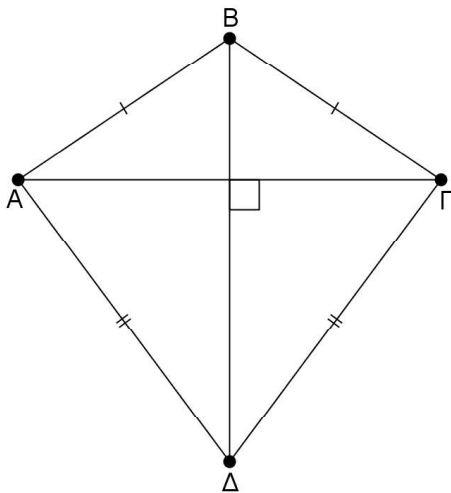
Μονάδες 12

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5144)

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι :



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 12

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5157)

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οχ και Ογ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι :

α) $ΜΑ = ΜΒ$.

Μονάδες 15

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5567)

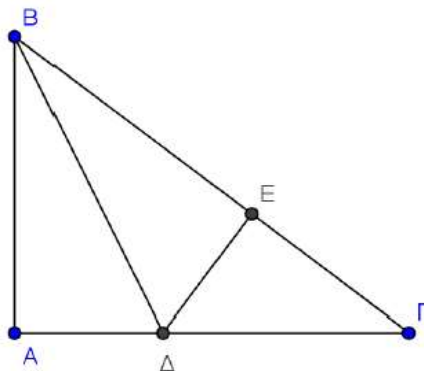
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40° να υπολογίσετε την γωνία ΑΟΒ.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5582)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AD = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$.

Μονάδες 6

β) $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 10

γ) $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (2_5591)

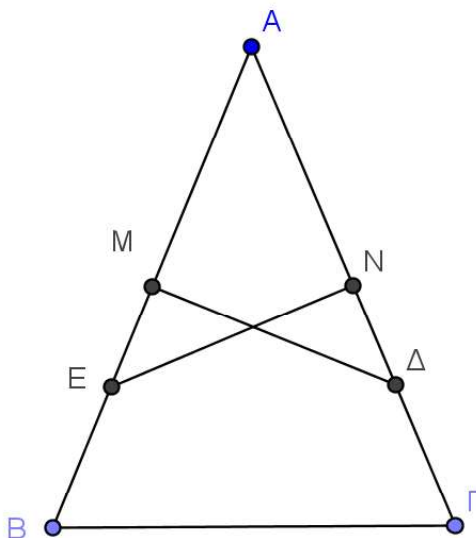
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Αν $AB = AG$ τότε $M\Delta = NE$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5595)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

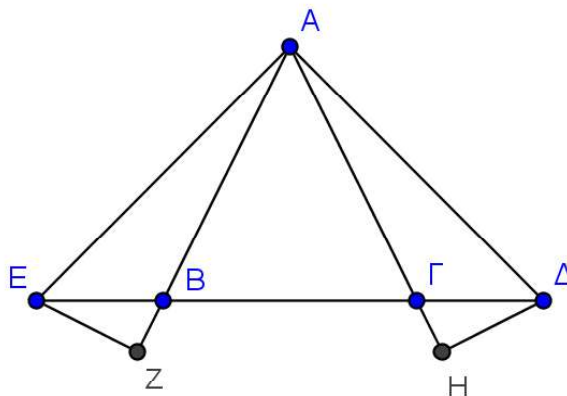
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$.

Μονάδες 12

β) $EZ = \Delta H$.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5597)**

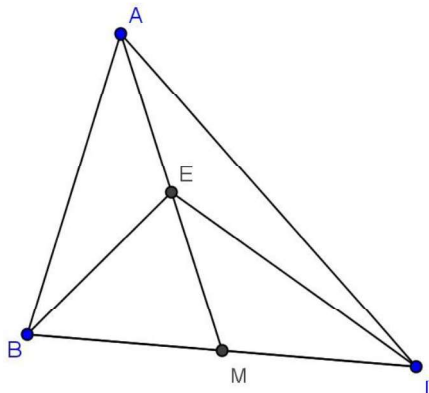
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$ να αποδείξετε ότι:

α) $\angle AEB = \angle EM\Gamma$.

Μονάδες 12

β) $AB = E\Gamma$.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5603)**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $A\Delta$ είναι διχοτόμος

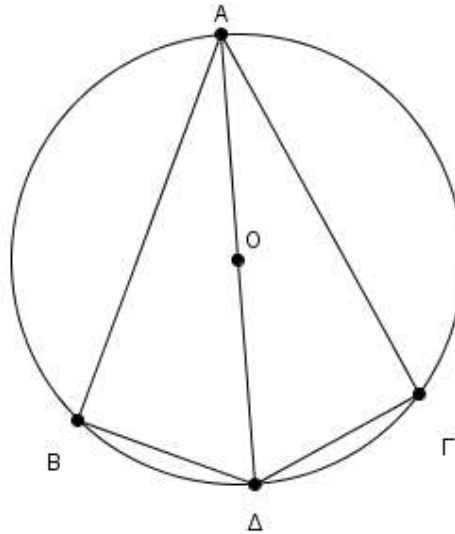
της γωνίας ΒΑΓ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα.

Μονάδες 10

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5607)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ , οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ .

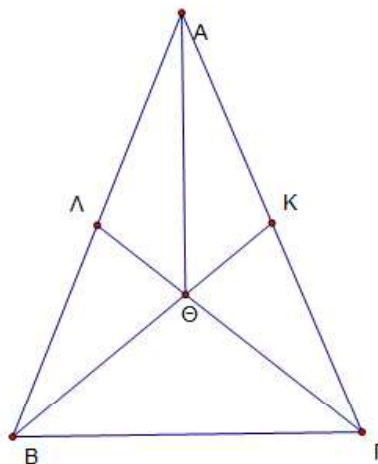
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5613)

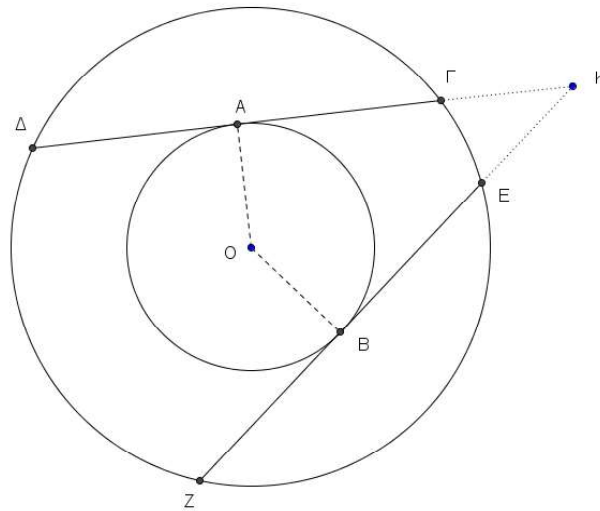
Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

Μονάδες 12

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5619)**

Δίνεται γωνία $\chi A\gamma$ και η διχοτόμος της $A\delta$, από τυχαίο σημείο B της $A\gamma$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την $A\chi$ στο Γ .

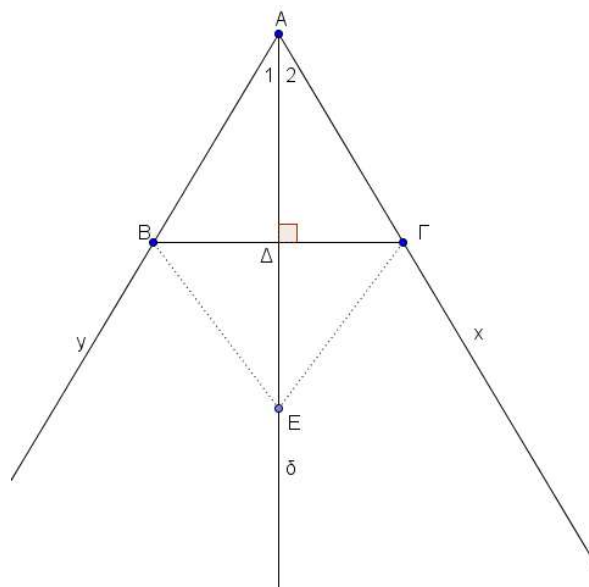
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5628)**

Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο $Ο$ έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$, και τα σημεία $Η$ και $Ζ$ στα τμήματα $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ = ΟΖ$.

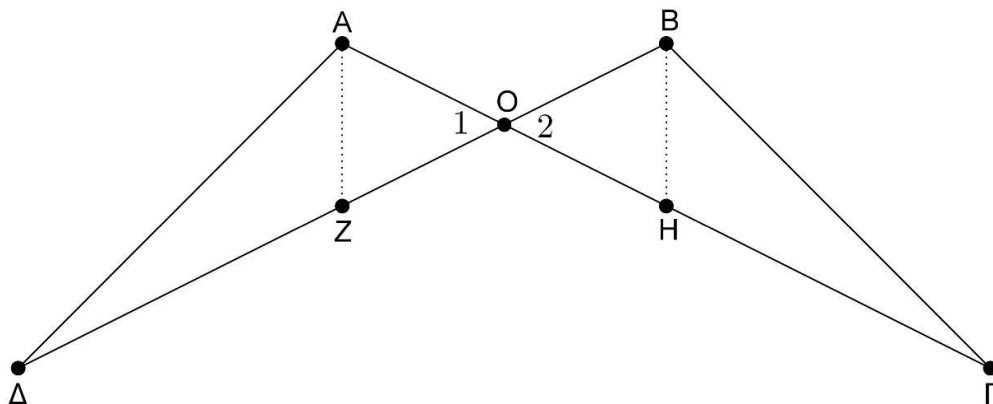
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $ΑΔΟ$ και $ΒΓΟ$ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $AZ = BH$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5630)**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από τα μέσα $Κ$ και $Λ$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα $ΚΕ$ και $ΛΖ$ στην πλευρά $ΒΓ$.

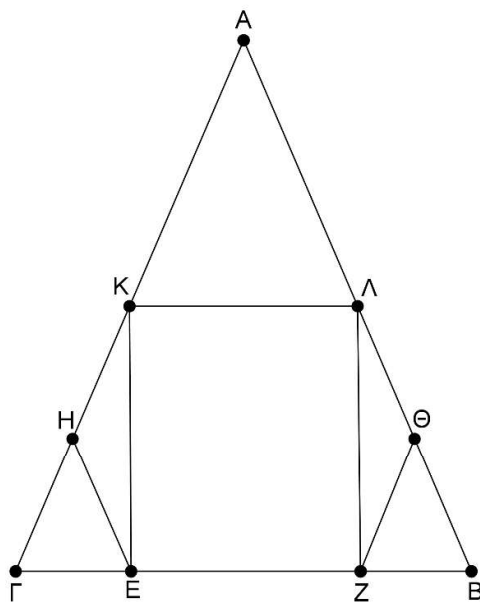
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΚΕΓ$ και $ΛΖΒ$ είναι ίσα.

Μονάδες 15

β) $ΕΗ = ΖΘ$, όπου $Η, Θ$ τα μέσα των τμημάτων $ΚΓ, ΛΒ$ αντίστοιχα.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5633)**

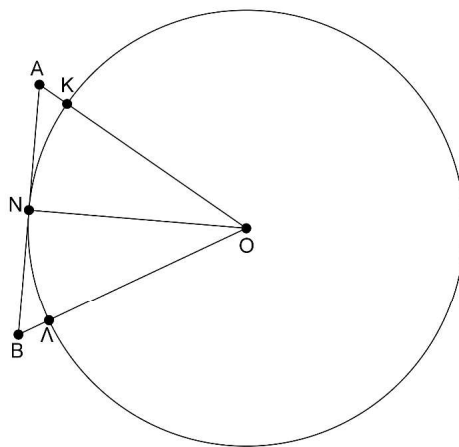
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν το κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
- Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

Μονάδες 13

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5634)**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO

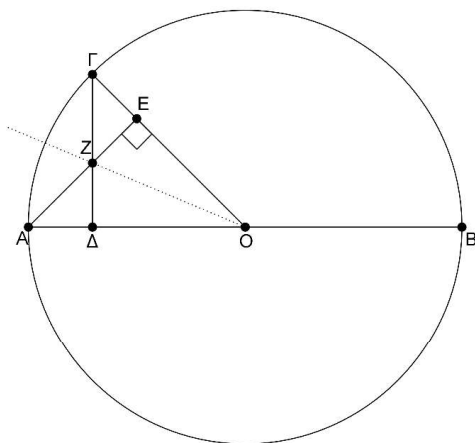
Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 13

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5647)

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

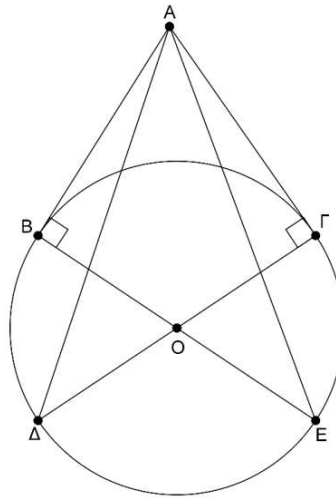
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5733)**

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) Ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

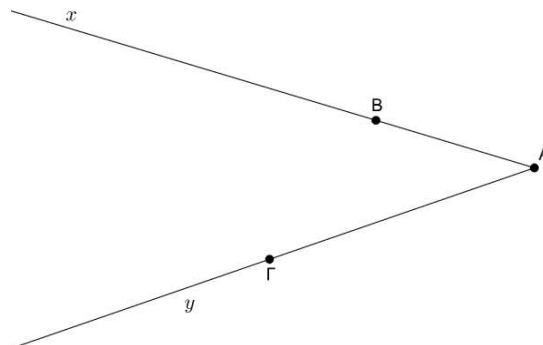
Μονάδες 9

β) Ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 9

γ) Ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (2_6592)

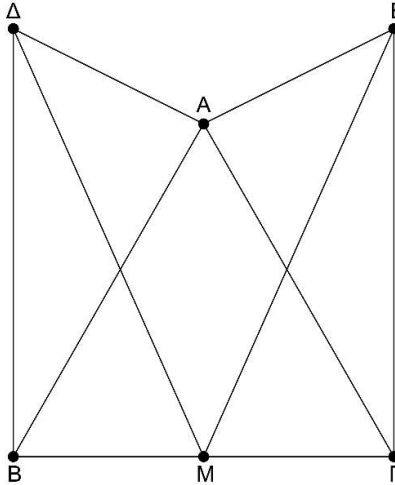
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $BD \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $BD = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) $AD = AE$.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6886)**

[είναι από το κεφάλαιο 2ο]

Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε :

α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,

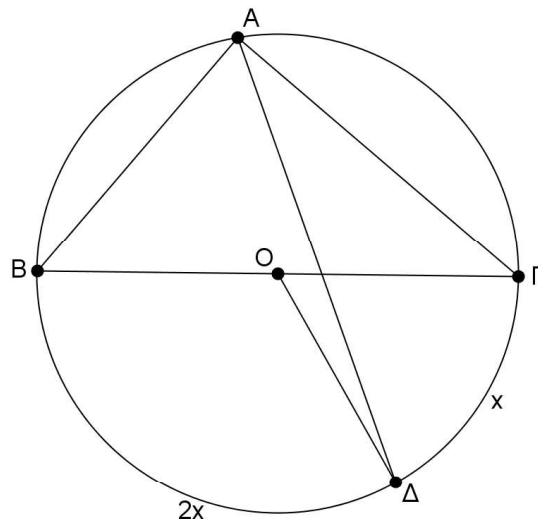
Μονάδες 8

β) τη γωνία $BO\Delta$,

Μονάδες 9

γ) τη γωνία $BA\Delta$.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (2_7453)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\hat{A}=90^\circ$ και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z . Να αποδείξετε ότι :

α) $BE = AB$,

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 4ο : Παράλληλες ευθείες



ΑΣΚΗΣΗ (2_2825)

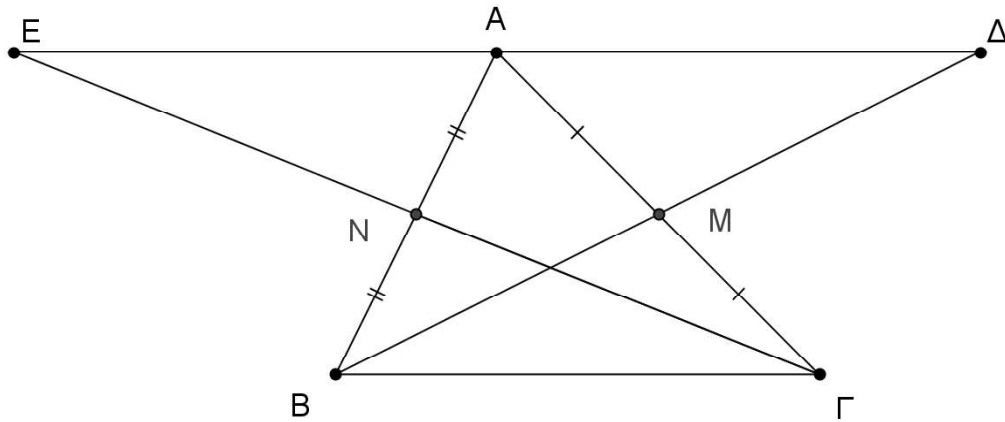
Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, στο οποίο φέρνουμε τις διαμέσους του BM και GN .
 Προεκτείνουμε την BM προς το M κατά τμήμα $MD=BM$ και την GN προς το N κατά τμήμα $NE=GN$.

α) Να αποδείξετε ότι $AD \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E, A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2857)**

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$.

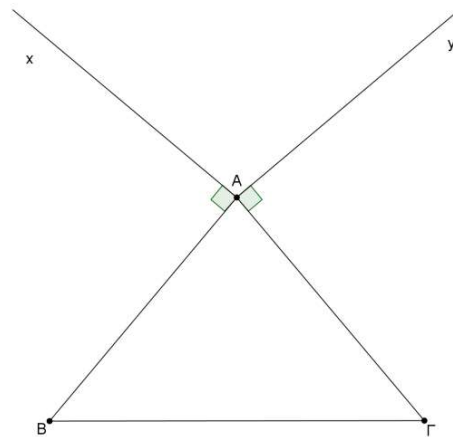
Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Μονάδες 12

β) Αν η γωνία BAG είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3424)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$

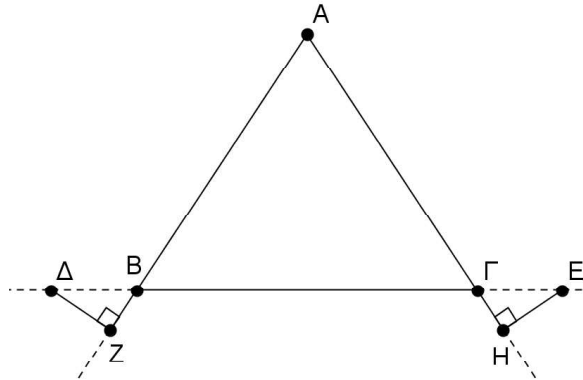
Μονάδες 10

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές

Μονάδες 7

β) Αν $\angle A = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

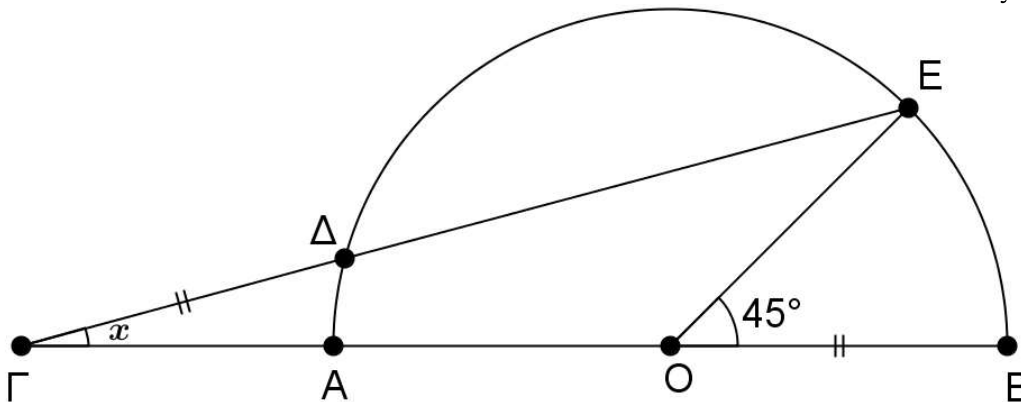
Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_4972)**

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και η γωνία

$\angle BOE = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \Delta\Gamma O = x$.

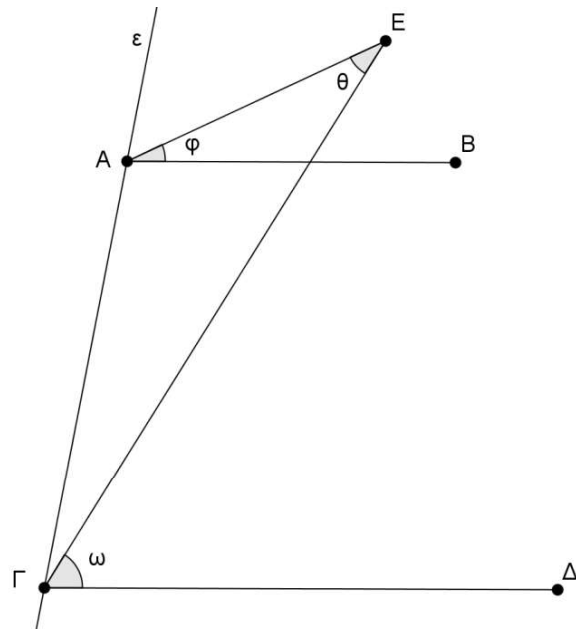
Μονάδες 25

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5040)**

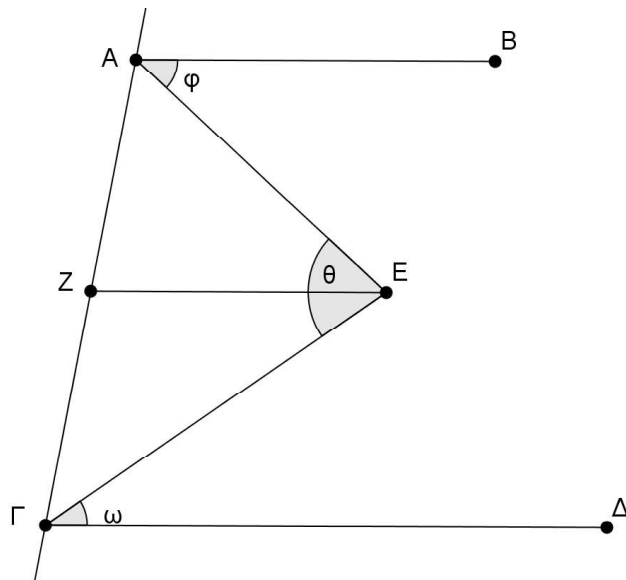
Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



ΑΣΚΗΣΗ (2_5055)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = KG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

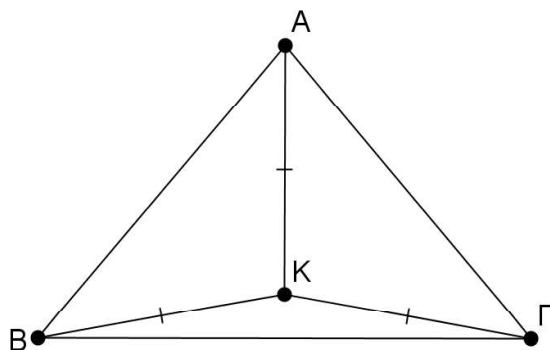
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{AΓK}$

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BKΓ}$.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5061)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

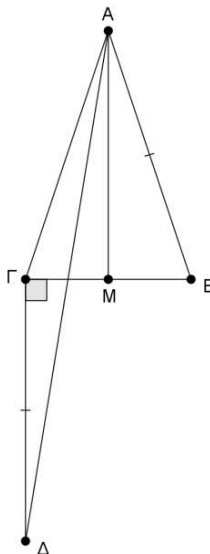
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\Delta A$.

(Μονάδες 12)

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M A \Gamma$.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5064)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας

$\hat{A}_{\text{εξ}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

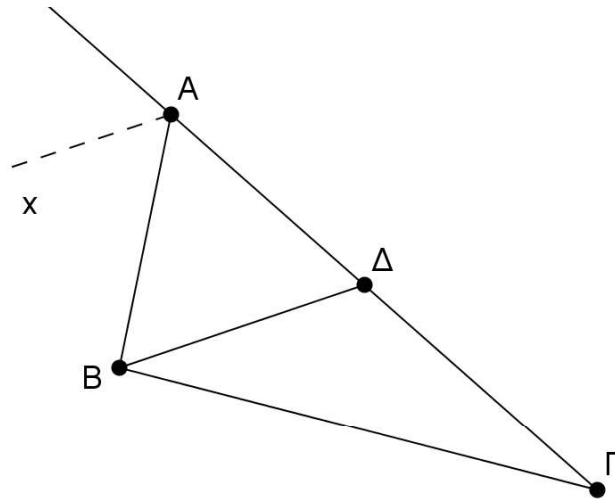
(Μονάδες 10)

ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $\angle B\Delta A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5066)

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $\epsilon\Delta // B\Gamma$

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5080)

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία A .

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5089)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta\epsilon \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta\epsilon\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta\epsilon B$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5092)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $A = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\Delta A\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5094)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της

γωνία A και η $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $B = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

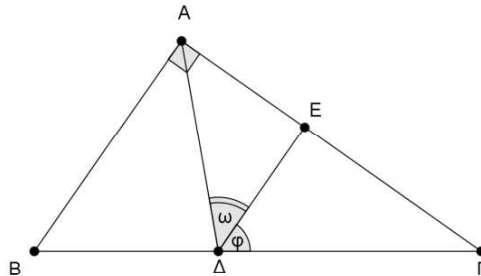
(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες φ και ω .

(Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5100)**

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{BAG} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\hat{AB\Delta} = \hat{A\Gamma E} = 110^\circ$.

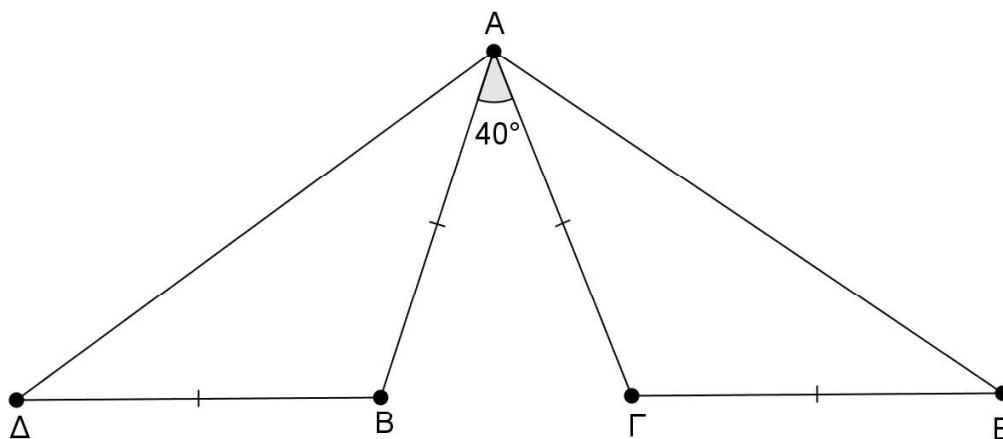
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5134)**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB .

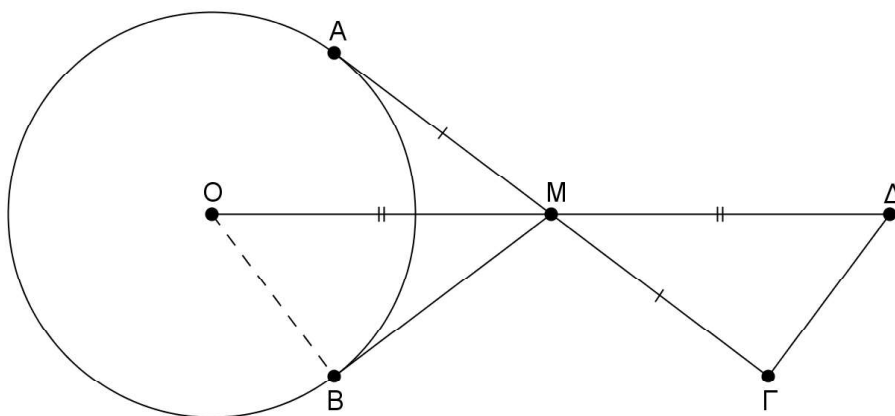
Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $MF = MA$ και την OM κατά τμήμα $MD = MO$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $MΓΔ$ είναι ίσα, και να γράψετε τα στοιχεία τους.

Μονάδες 13

β) Να αιτιολογήσετε γιατί $OA \parallel ΓΔ$.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5562)**

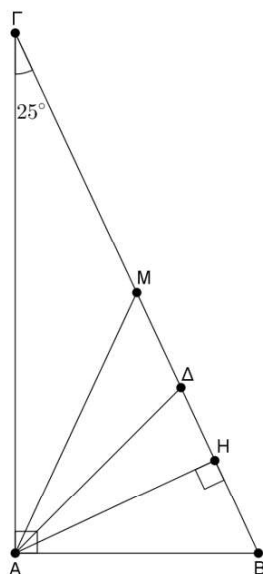
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB , HAB , $AΔB$.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{MAD} = \hat{DAH} = 20^\circ$.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5570)**

Στα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΔΕ (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

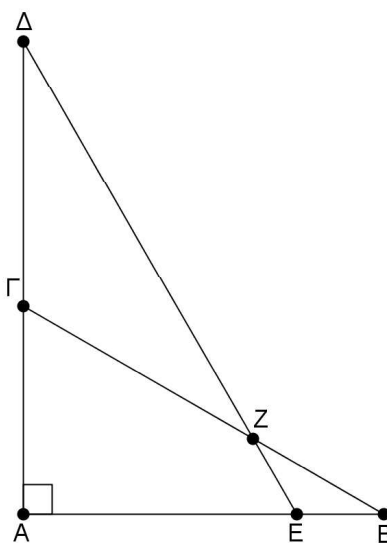
$$\hat{B} = \hat{A} = 30^\circ.$$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου AEGZ.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και EBZ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5572)**

Στο παρακάτω σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD = AZ$,

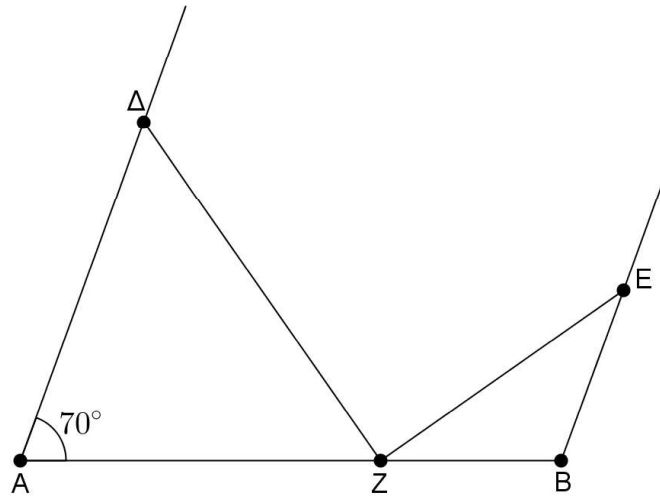
$$BE = BZ \text{ και } \hat{A} = 70^\circ.$$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων AΔZ και BZE.

Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5578)**

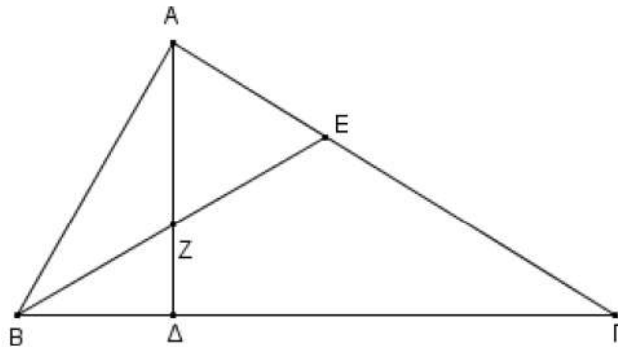
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $A + \Gamma = 2B$ και $A = 3\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι ίση με 60°

Μονάδες 10

β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5599)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του AD τέτοια ώστε $BA\Delta = 30^\circ$.

Θεωρούμε σημείο E στην AG τέτοιο ώστε $AD = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

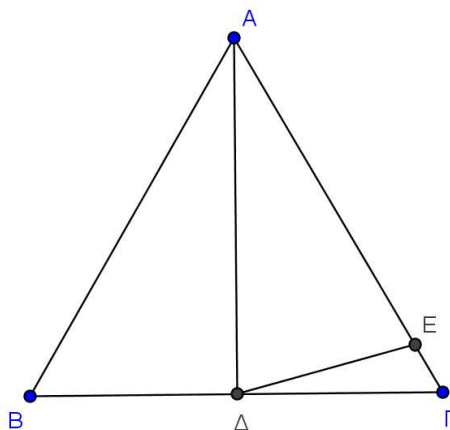
Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5626)**

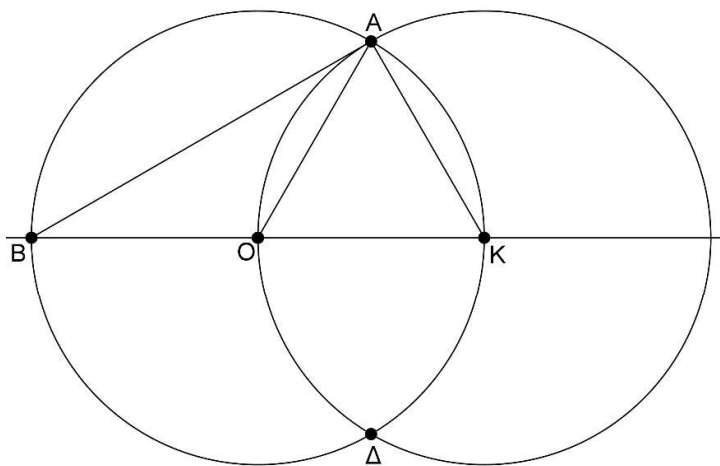
Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5652)**

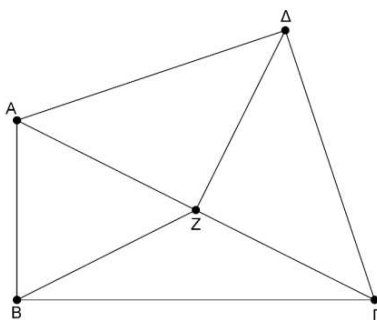
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\Delta = 90^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

Μονάδες 13

β) Αν $\angle A\Gamma B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle B\Delta\Delta$ και $\angle B\Gamma\Delta$.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6002)**

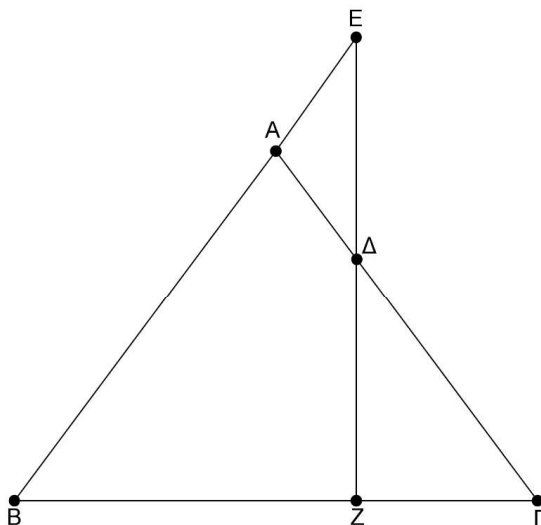
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς AG , ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

Μονάδες 10

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6584)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την AG στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ADE .

Μονάδες 9

γ) Αν η γωνία B είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας Γ , να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (2_6593)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

Μονάδες 13

β) Αν $A = 75^\circ + B$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_6595)

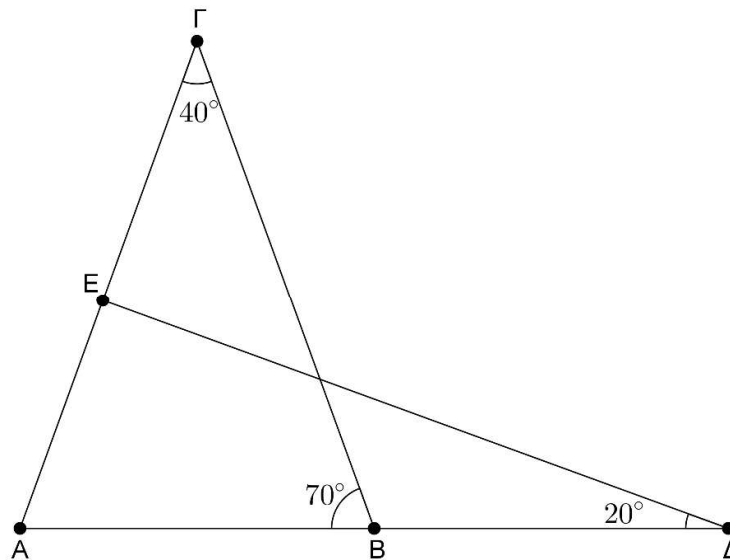
Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

Μονάδες 13



Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 5ο

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία



ΑΣΚΗΣΗ (2_2817)

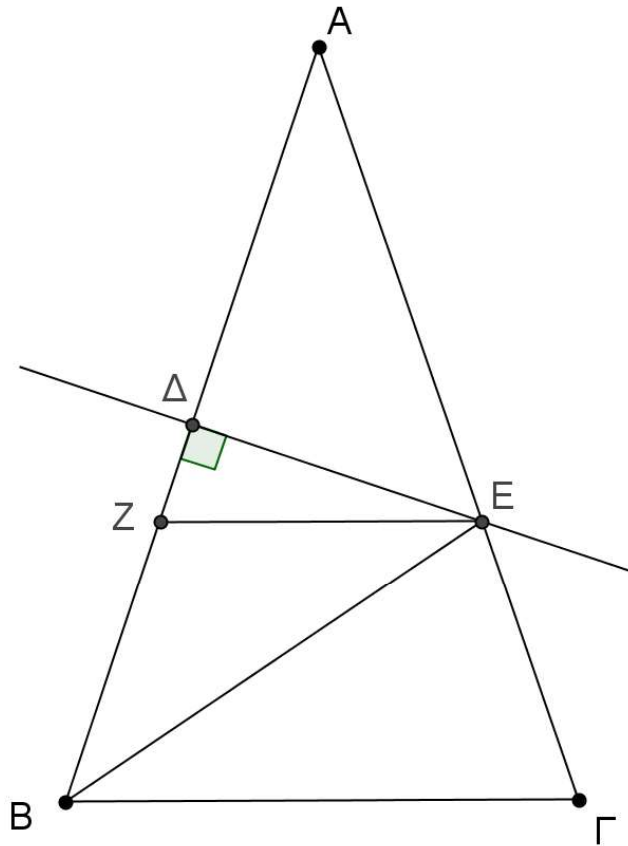
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α Να αποδείξετε ότι $AE=BE$.

(Μονάδες 15)

β Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BGEZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2822)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι

α Το τρίγωνο $\hat{B}A\hat{E}$ είναι ισοσκελές.

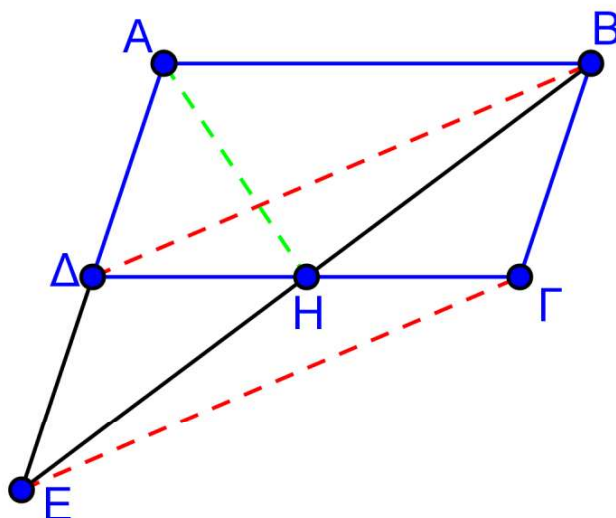
(Μονάδες 7)

β Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ Η AH είναι διάμεσος του τριγώνου $\hat{B}A\hat{E}$.

(Μονάδες 9)

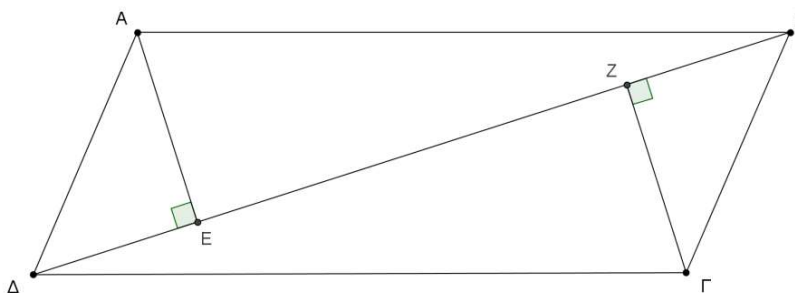
**ΑΣΚΗΣΗ (2_2827)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στην ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} \hat{D} E = \hat{\Gamma} \hat{B} Z$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2829)**

Δίνεται τρίγωνο $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ=ΒΑ με ΜΔ//ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ=ΓΑ με ΜΕ//ΓΑ. Να αποδείξετε ότι :

α) ΔΑ=ΑΕ

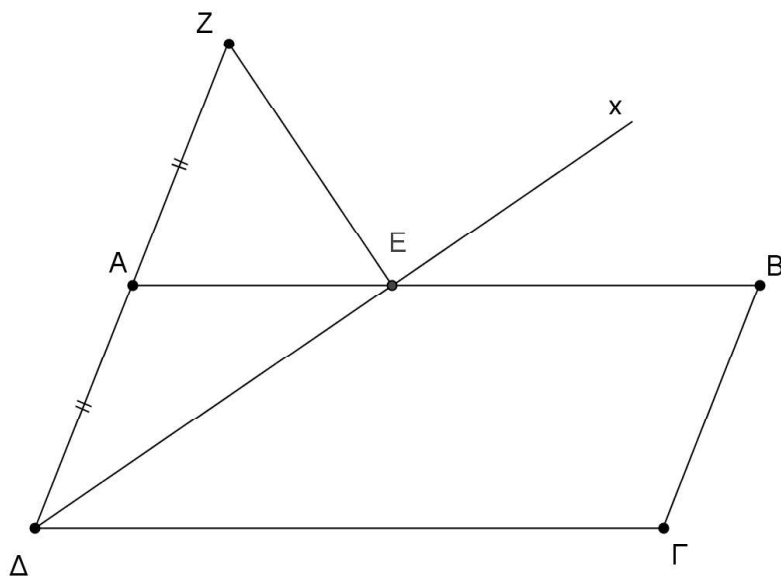
(Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΒΓ

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2834)**

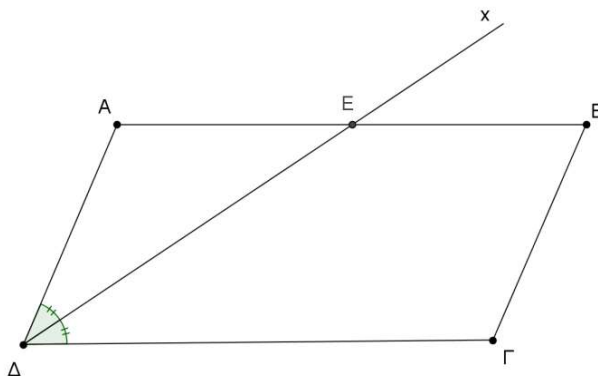
Δίνεται παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle A\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Είναι το E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2836)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος $O\Gamma$, ώστε $OE=OZ$.

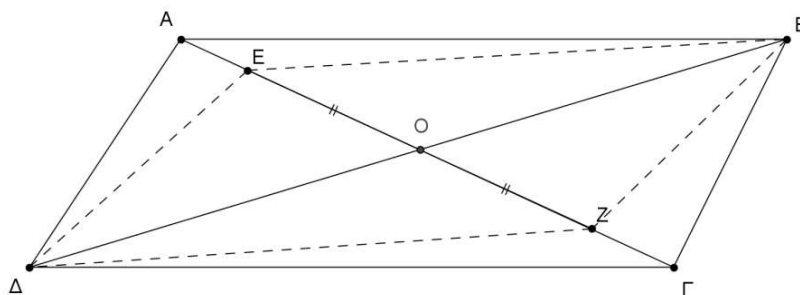
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E=BZ$.

(Μονάδες 12)

β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2841)**

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\triangle \hat{A} B \Gamma (\hat{A} = 90^\circ)$ και $\Delta \Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$

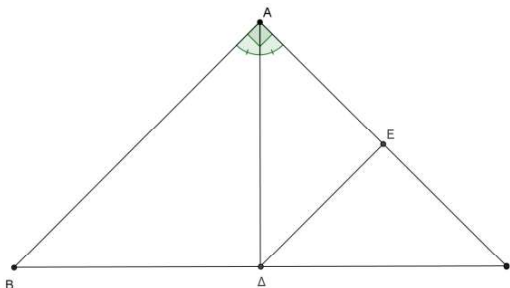
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $\triangle \hat{E} \Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2844)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη

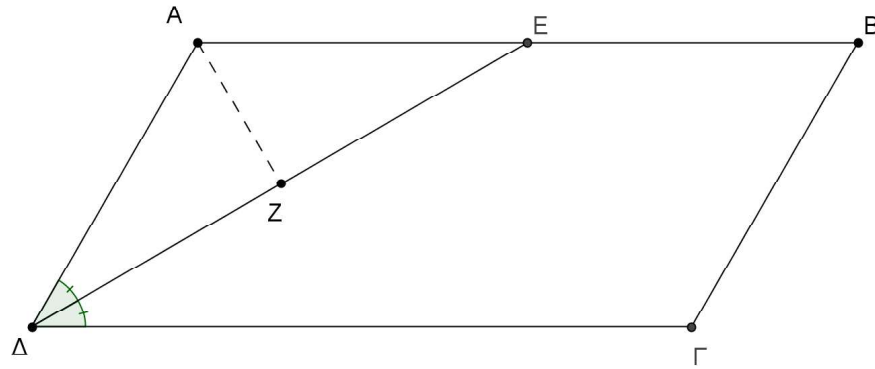
διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη ΔE . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $\angle A \hat{E} = 30^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2850)**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών AD και $B\Gamma$ αντιστοίχως.

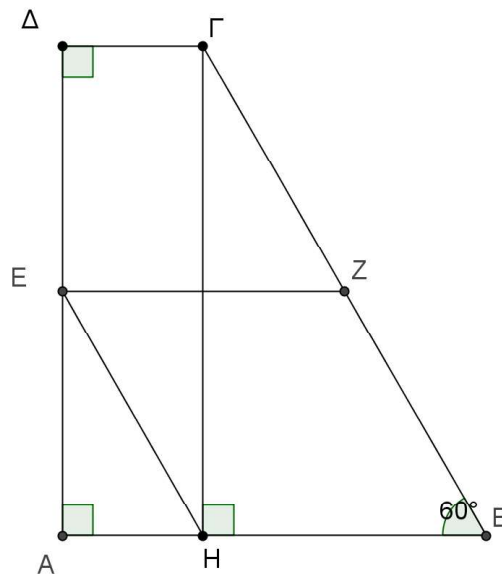
Να δείξετε ότι:

α) $AB = 3\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $EBZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2858)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ (2_3411)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_2849)

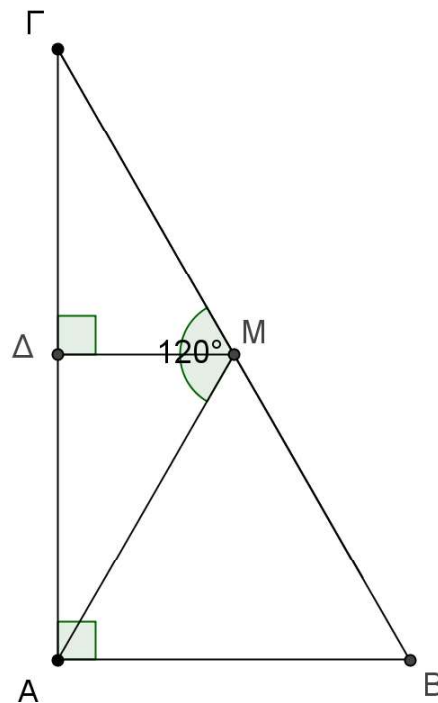
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \hat{A} B \Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$ cm. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\angle A M \Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4$ cm.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2852)

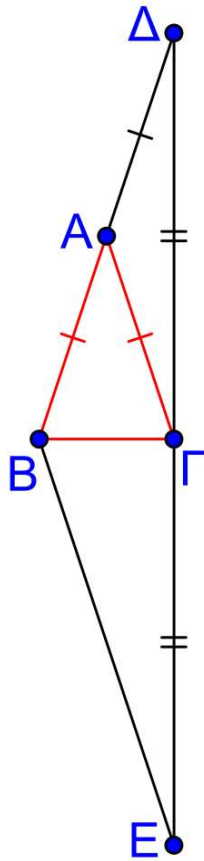
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle \hat{A} B \Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle \hat{A} \Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = BE/2$.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_2851)**

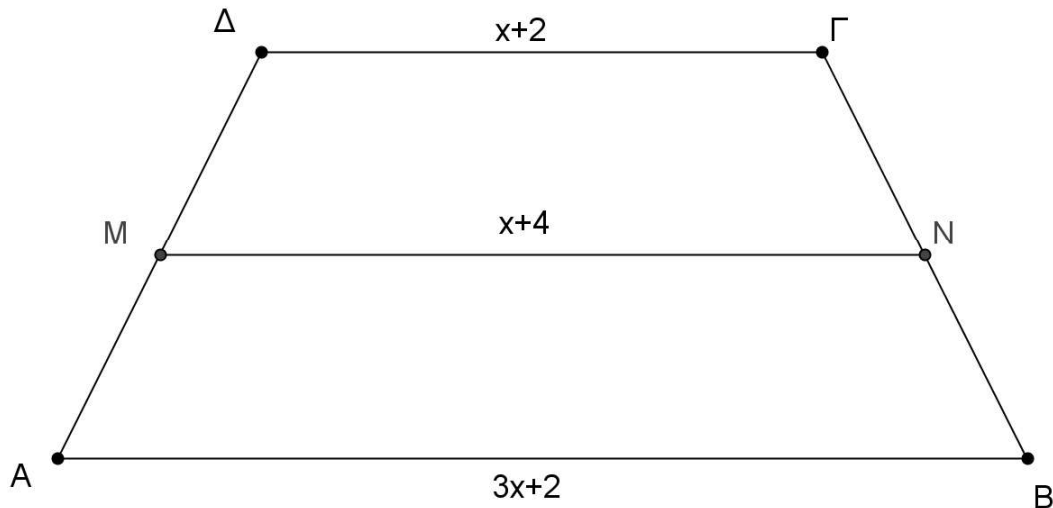
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > \Gamma\Delta$ και $AD = BG$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι: $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

(Μονάδες 13)



ΑΣΚΗΣΗ (2_2856)

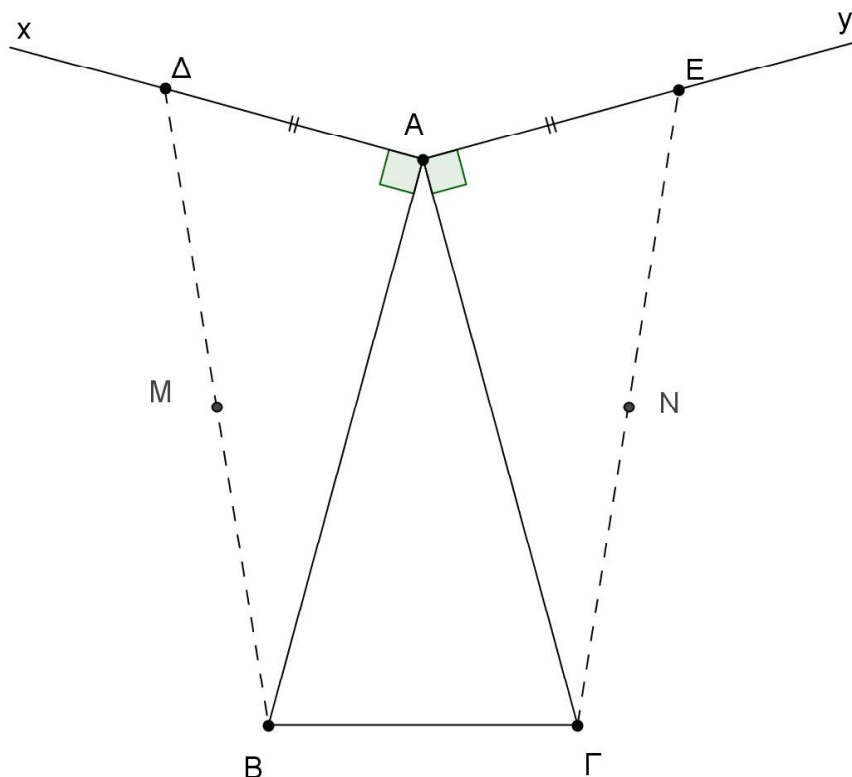
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=GE$.

(Μονάδες 12)

β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και GE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3412)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

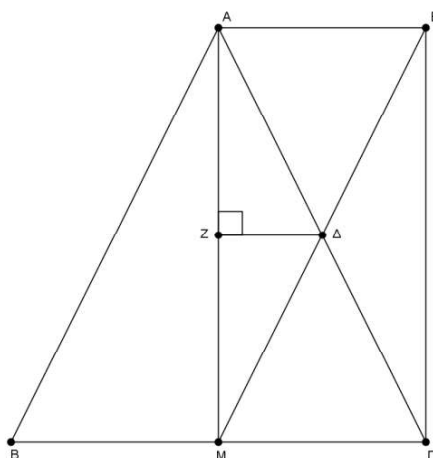
Αν το σημείο Z είναι το ίχνος του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3414)**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$.

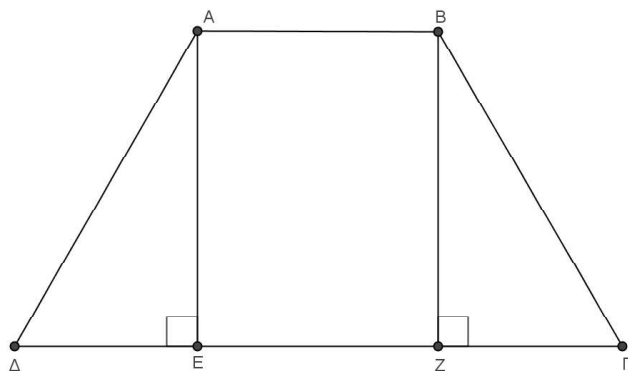
Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3415)**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρνουμε τα ύψη του AE και BZ .

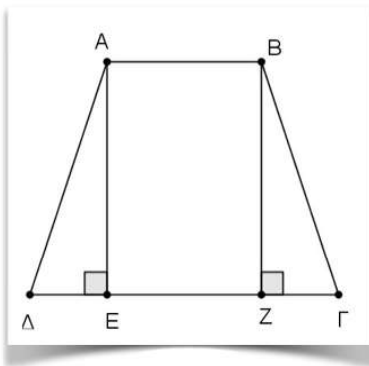
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$

Μονάδες 12

β) $AZ = BE$

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_3416)

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

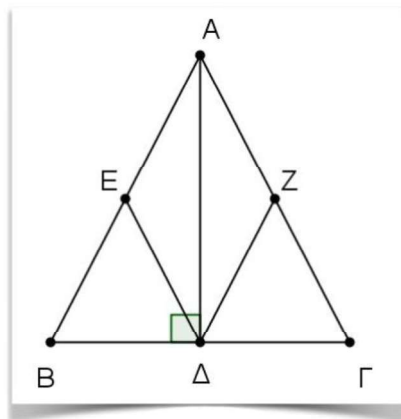
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα

Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_3418)**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_3419)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

Μονάδες 12

β) Το τρίγωνο $A\hat{\Gamma}E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3422)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_3427)

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι
 $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$

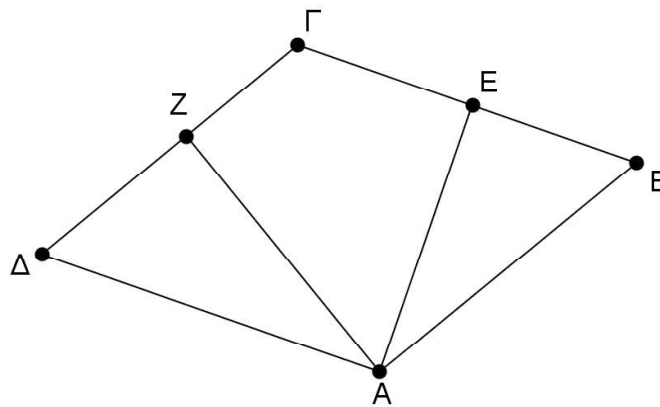
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

Μονάδες 12

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

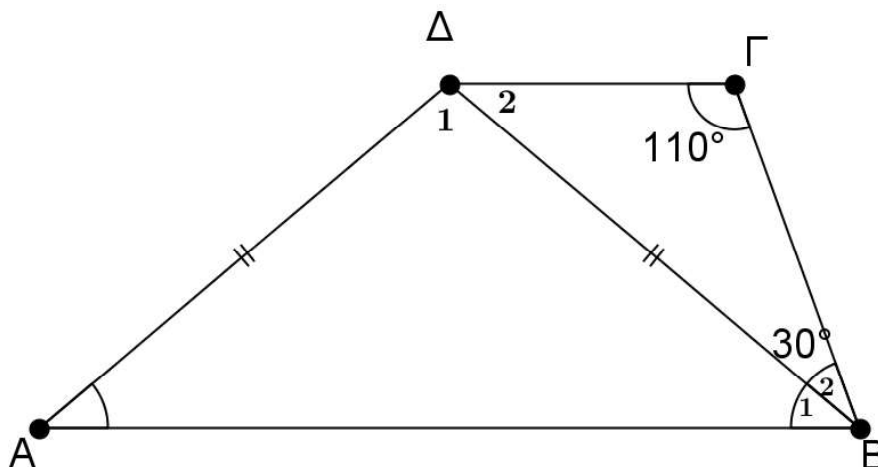
Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_4973)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AD . Αν η γωνία $\Gamma = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta B\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta B$.

Μονάδες 25



ΑΣΚΗΣΗ (2_5007)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των DZ και ΓE .

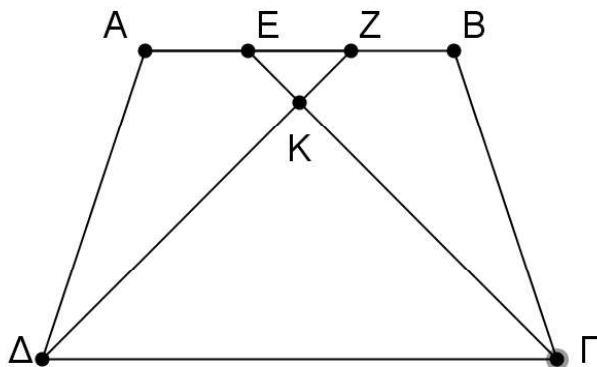
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$

Μονάδες 13

β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5021)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα

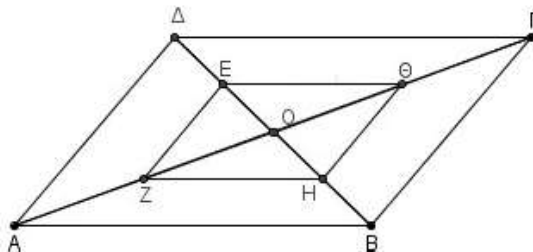
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (2_5024)

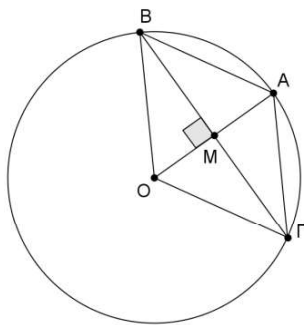
Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος

Μονάδες 12



ΑΣΚΗΣΗ (2_5033)

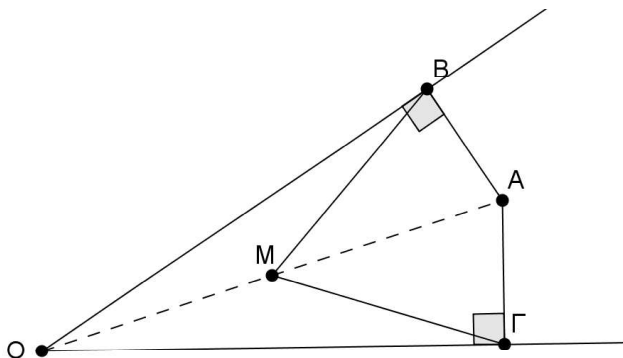
Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AG προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

- β) $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} = 2\hat{x}\hat{O}\hat{y}$

(Μονάδες 15)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5039)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

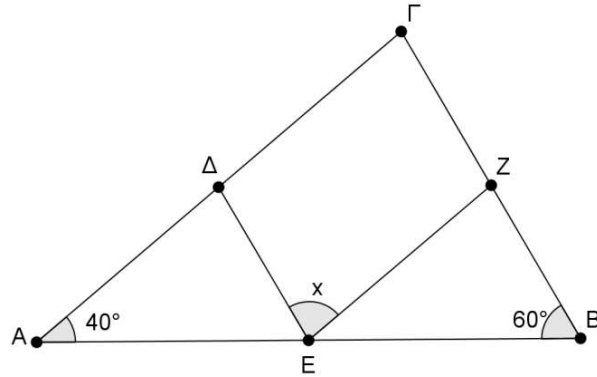
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

- β) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 80^\circ$.

(Μονάδες 9)

- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{D\epsilon Z}$ (Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5059)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο

ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\hat{A}\Delta B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

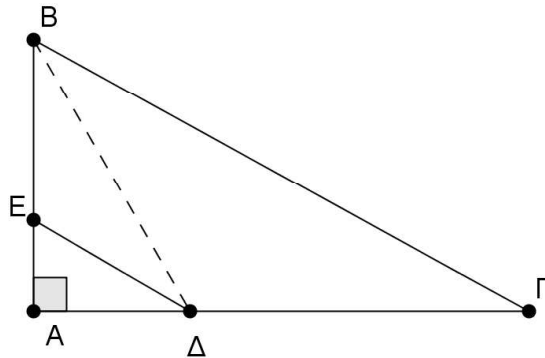
β) Αν $\hat{A}\Delta B = 60^\circ$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

II. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5069)**

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα

$AD = AB$ και $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η προέκτασή της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά $E\Delta$ του τριγώνου ΔAE .

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5071)

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5073)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

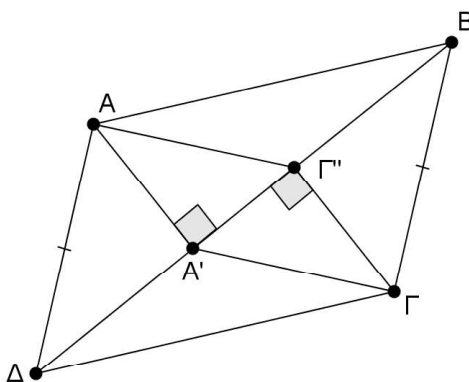
(Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5096)**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της

$B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ .

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

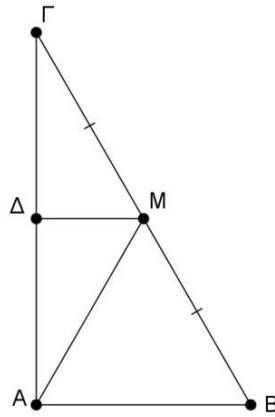
(Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5103)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 40^\circ$ και $B = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

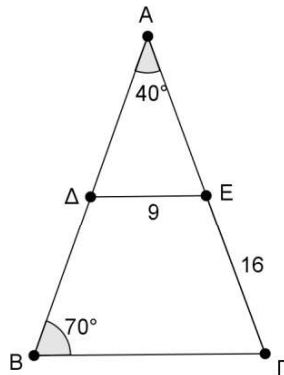
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5104)**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_5108)

Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $HBZ = E\Delta\Theta$

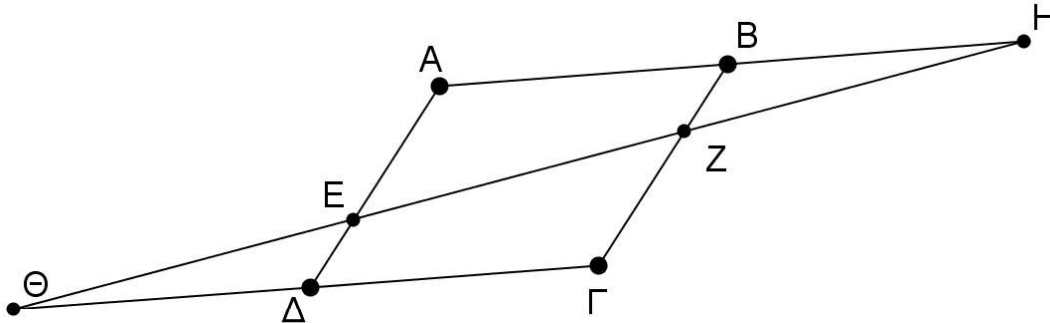
(Μονάδες 8)

$$\beta) \hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$$

(Μονάδες 8)

$$\gamma) BH = \Theta\Delta$$

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5111)**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta E\Gamma = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$

(Μονάδες 8)

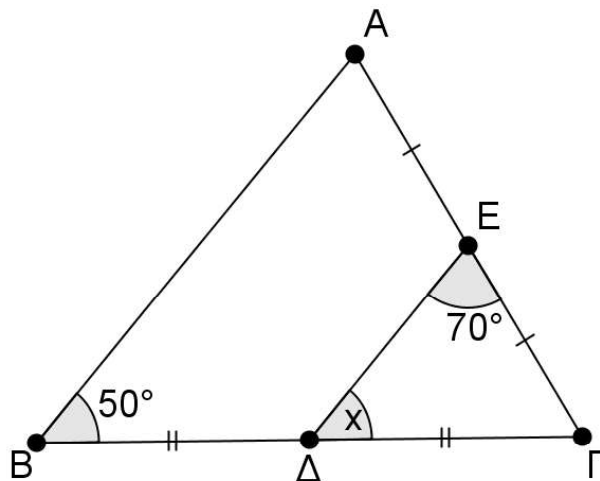
β) Να υπολογίσετε

Ι. τη γωνία x

(Μονάδες 8)

ΙΙ. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5113)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΔ=9$, $ΕΓ=10$ και $ΒΓ=30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

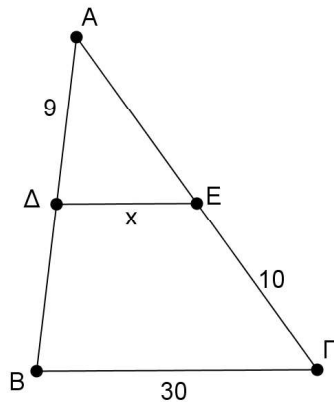
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5114)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $AE=8$, $ED=9$ και $ΔB=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

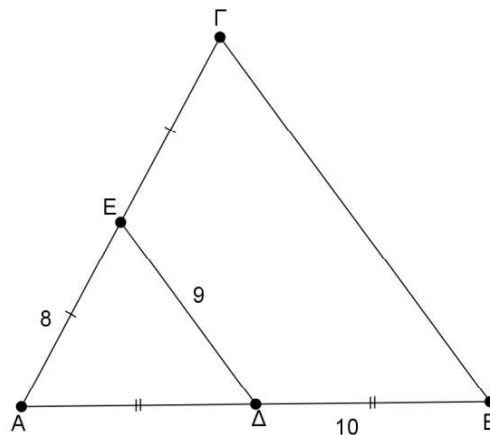
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετράπλευρου ΔΕΓΒ.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (2_5117)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD = ED = ΔB$ με $AE = 8$ και $ΔB = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

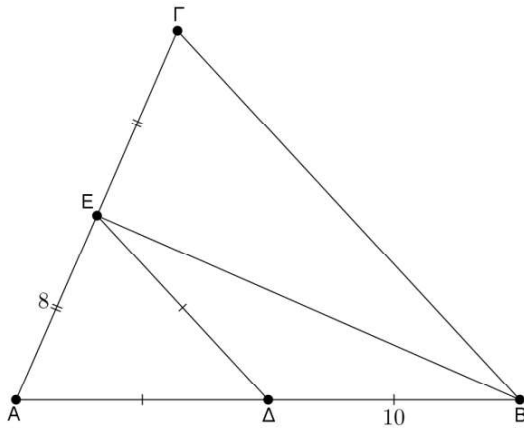
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 20$.

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5118)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

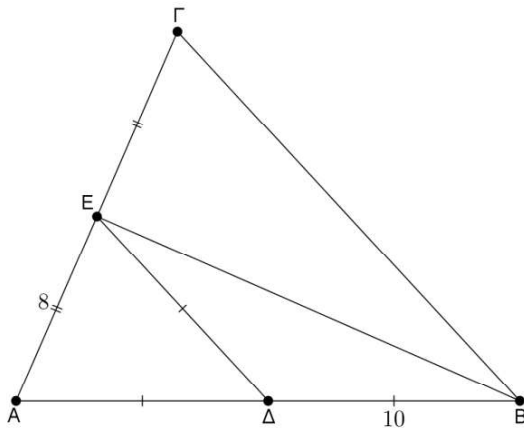
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5124)**

Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E = 5$, $BK \perp AD$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

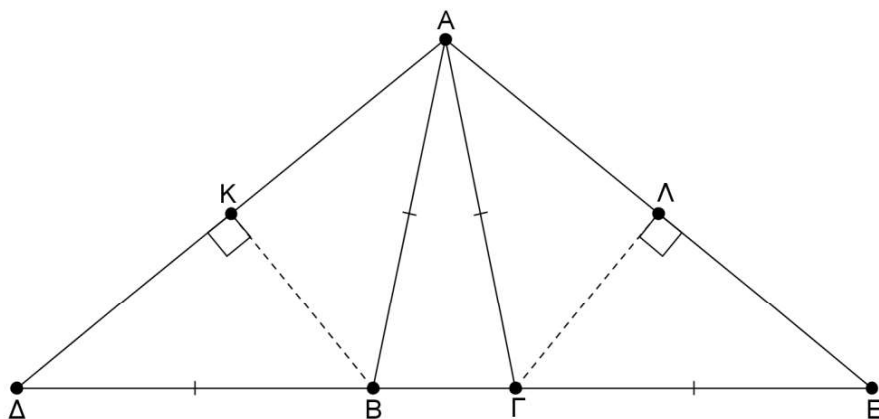
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AD και AE .

Μονάδες 10

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5129)**

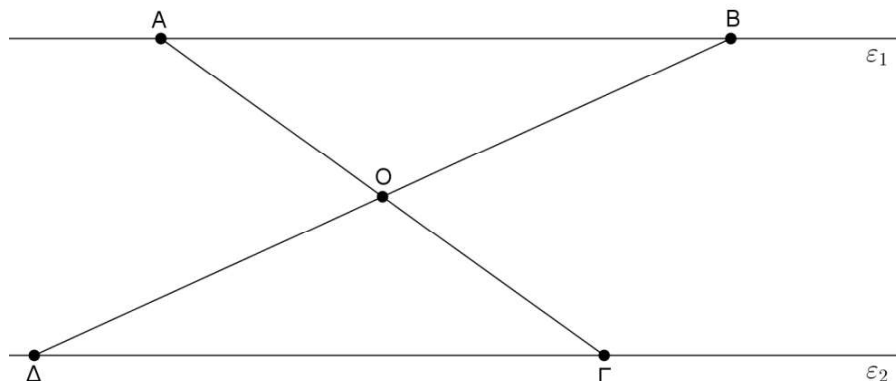
Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της BD . Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα στοιχεία τους .

Μονάδες 12

β) το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο .

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5132)**

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

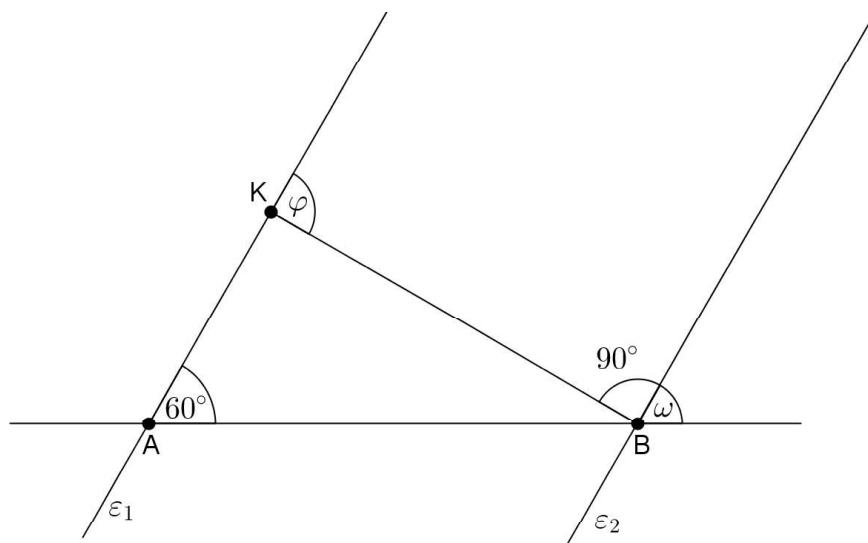
Μονάδες 10

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή της.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5142)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ .

Μονάδες 12

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες ADE και $ED\Gamma$.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_5149)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

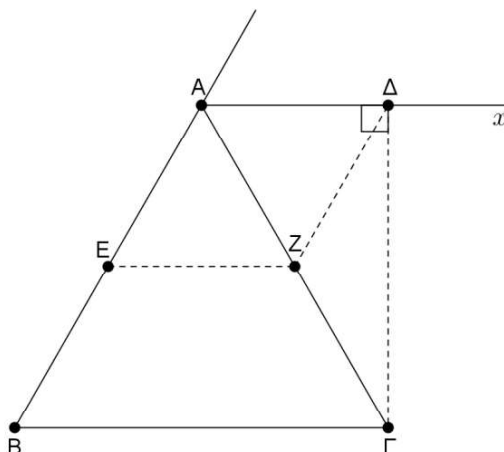
Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 12

β) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5162)

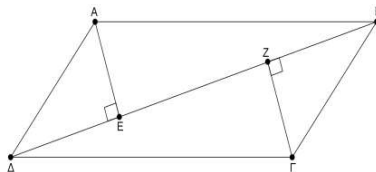
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ κάθετους στην διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $AE = \Gamma Z$.

Μονάδες 15

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5167)**

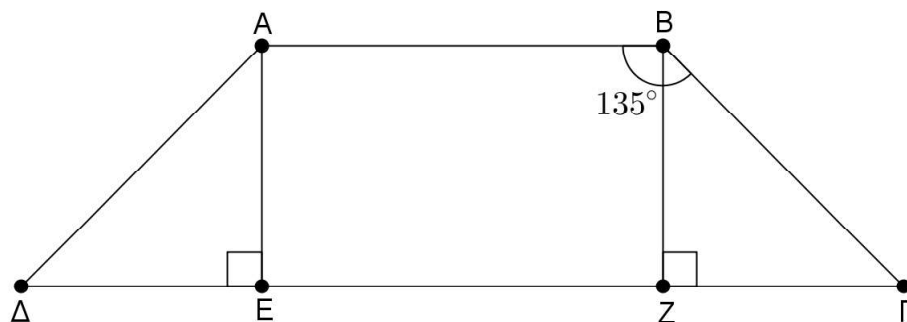
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5557)**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2 \text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (2_5569)

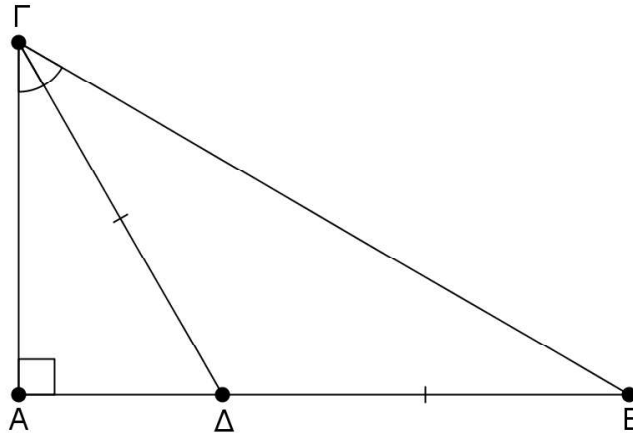
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

Μονάδες 12

β) $AB = 3 \text{ cm}$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5574)**

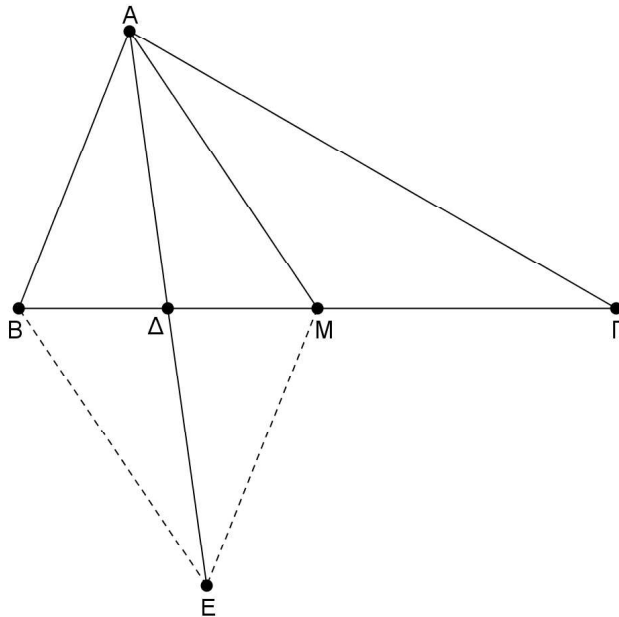
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) $ME = M\Gamma$

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5554)**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ε) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

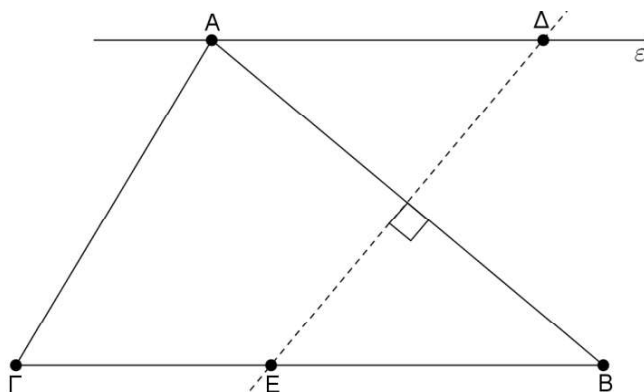
Μονάδες 6

β) Αν M είναι το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5565)**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου ΑΒΓΔ.

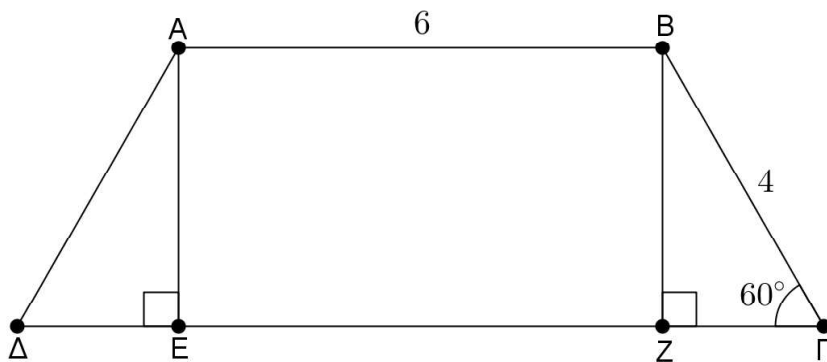
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα.

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5566)**

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου ΑΒΓΔ.

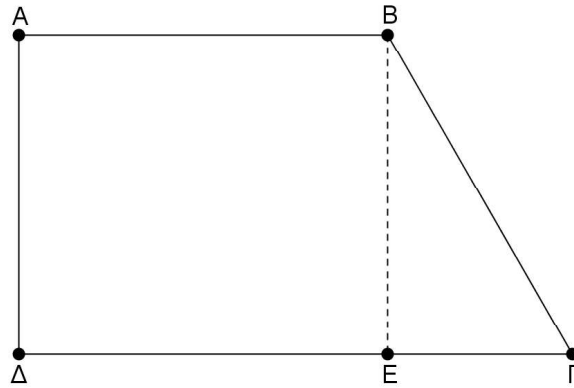
Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = B\Gamma$.

Μονάδες 9

γ) Αν Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5568)**

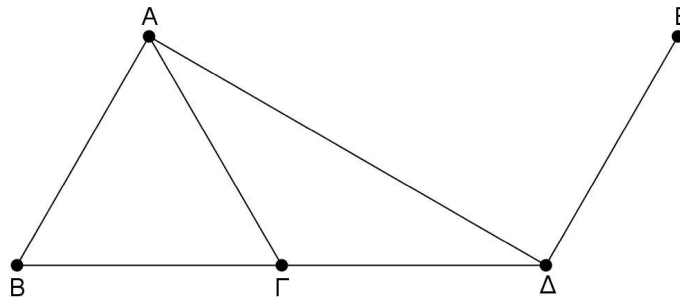
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$ (A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5575)**

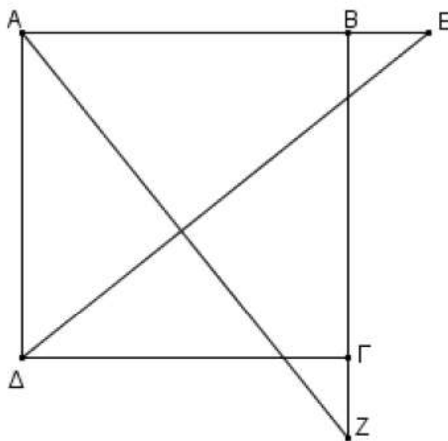
Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5577)**

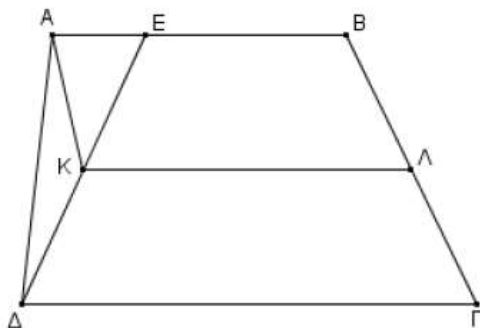
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των ED και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5581)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ (2_5583)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$), $2\Gamma = B$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

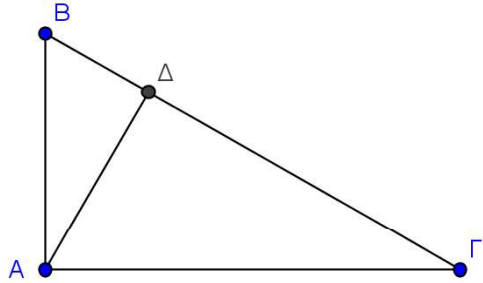
Μονάδες 9

β) Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$.

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5585)**

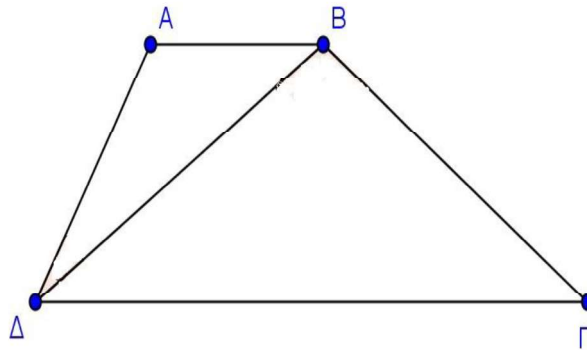
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\Delta B\Gamma = 110^\circ$ και $\Delta AB = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ .

Μονάδες 11

β) Τη γωνία A .

Μονάδες 14

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5586)**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i) $\angle ABE$

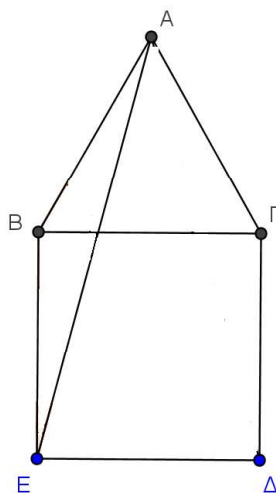
Μονάδες 8

ii) $\angle BEA$

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5587)**

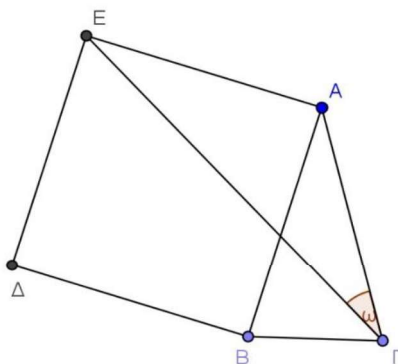
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) $2\epsilon\Gamma A = 90^\circ - \beta A\Gamma$

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5588)**

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

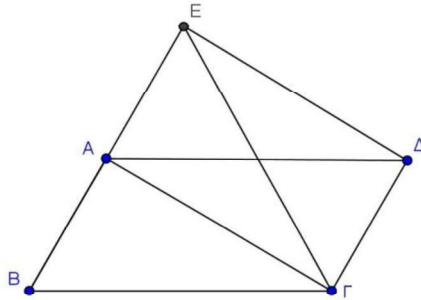
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) $\beta\Gamma A = \alpha\Delta E$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5589)**

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

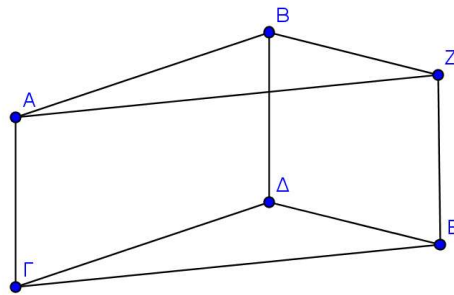
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΓΕΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

β) $ABZ = \Gamma\Delta E$.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5590)**

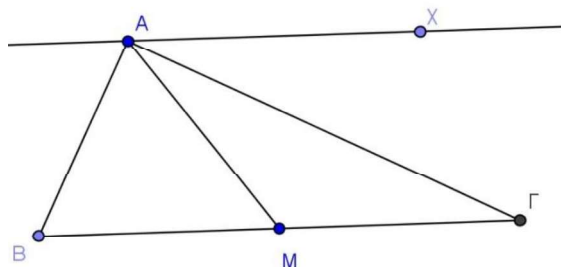
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $MA\Gamma = M\Gamma A$

Μονάδες 12

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5593)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$ τότε:

i) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

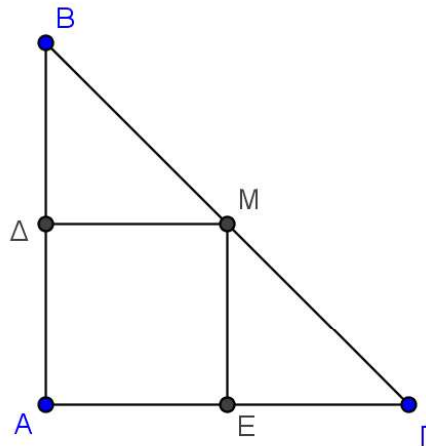
Μονάδες 8

ii) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5601)**

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 13

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (2_5612)

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

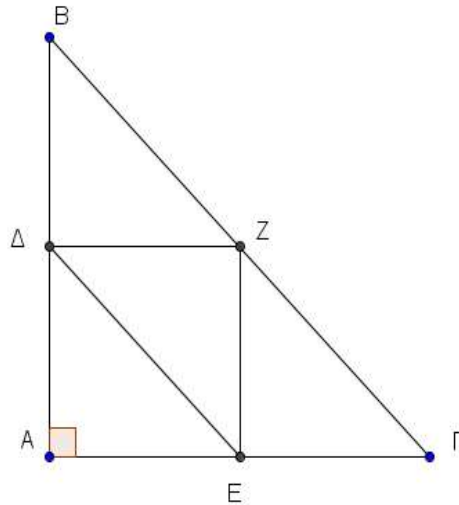
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5615)**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $MD = ME$.

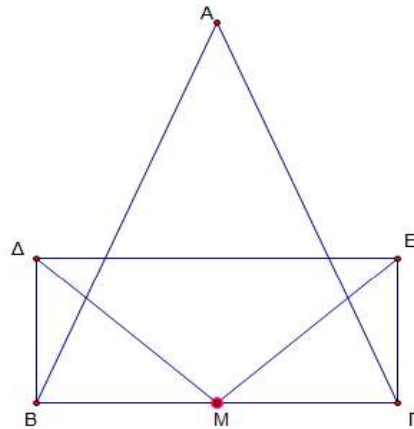
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5617)**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

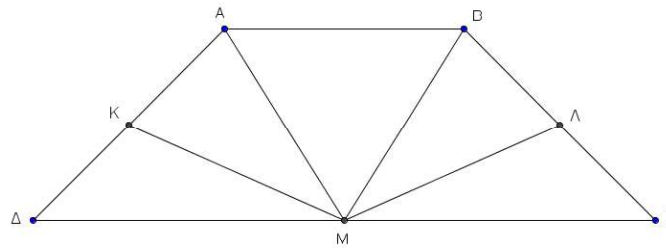
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.

Μονάδες 12

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5621)**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

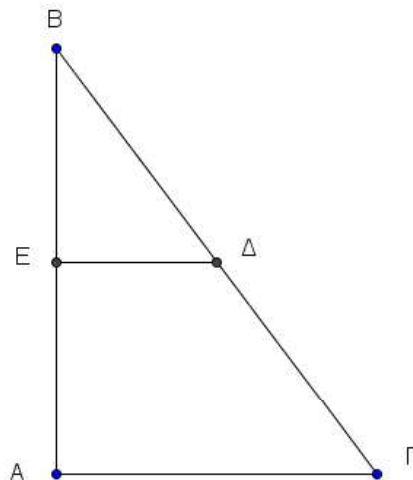
β) $B\Gamma = \dots\dots\dots$

Μονάδες 9

γ) $A\Delta = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5635)**

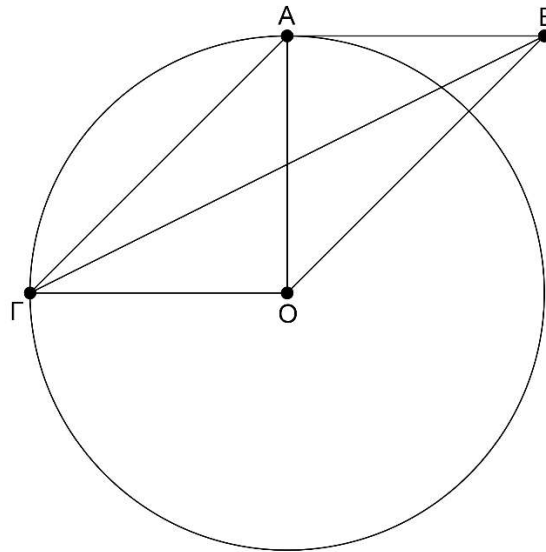
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $ABOG$.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5637)**

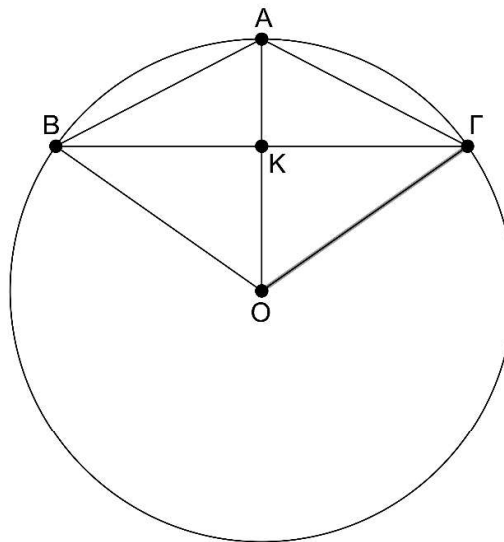
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $ΑΓΟΒ$.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5638)**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma = (AB = A\Gamma)$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$

Μονάδες 10

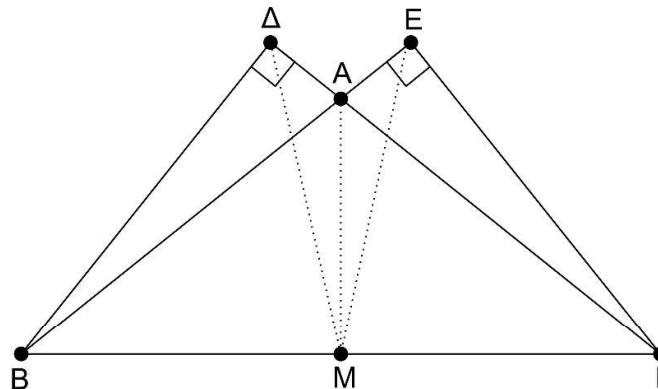
β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:

ι. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

Μονάδες 8

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5641)**

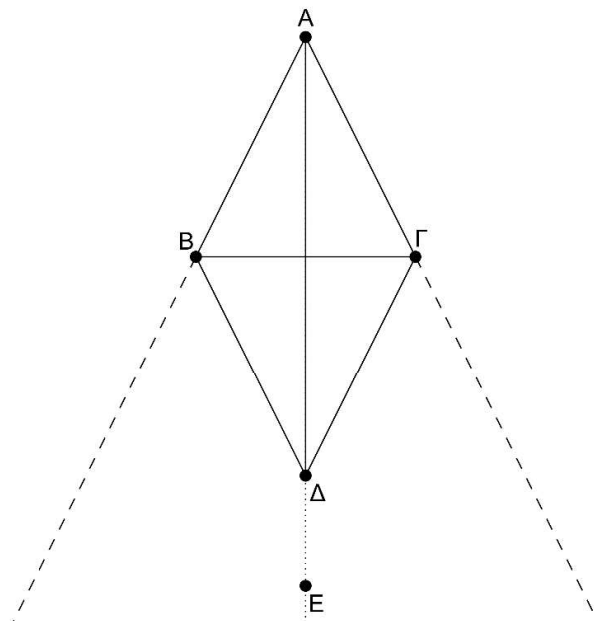
Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).

Μονάδες 10

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5644)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $A = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

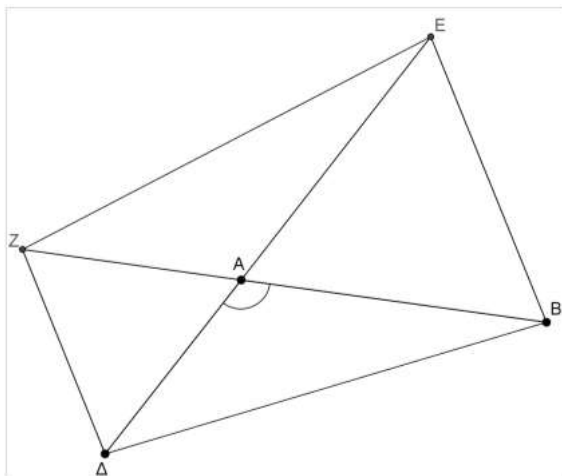
[lisari – team](#)

«Β Θέματα»

Μονάδες 12

β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5646)**

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

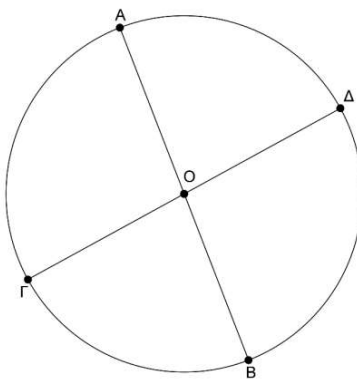
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες.

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 12

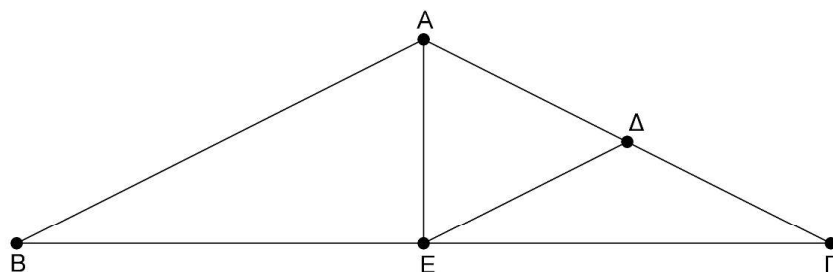
**ΑΣΚΗΣΗ (2_5653)**Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, και γωνία $B = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα τν ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 16

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5654)**

Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta \Gamma$.

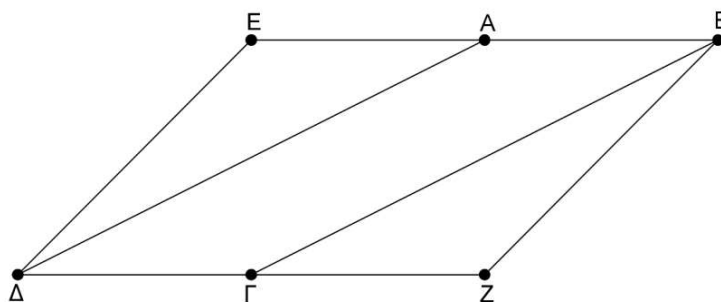
Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = E\Delta$

Μονάδες 13

β) Το τετράπλευρο EBZΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6580)**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$ και $B > \Gamma$ φέρουμε το ύψος του AΔ και την διάμεσο AM στην πλευρά BΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες B και ΓAΔ είναι ίσες.

Μονάδες 12

β) $AM\Delta = 2 \cdot \Gamma$

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_6582)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$.

Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο AΔE είναι ίσο με το τρίγωνο BΓZ

Μονάδες 9

γ) Το τετράπλευρο ABZE είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ (2_6583)

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,

Μονάδες 8

ii) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 8

β) Αν E και Z είναι τα μέσα των $N\Delta$ και ΔK αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $NKZE$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (2_6585)

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου,

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου..

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ (2_6590)

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\Delta = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

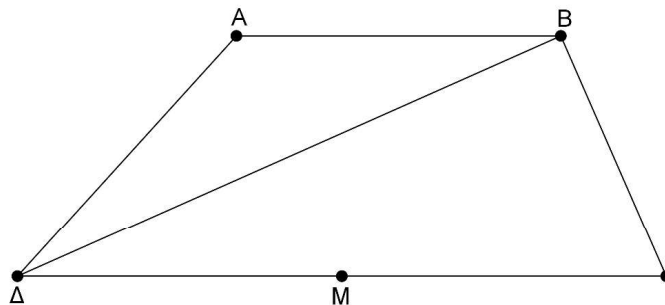
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες 9

β) Η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6882)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_6885)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ

τέτοιο ώστε $AD = AG$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι :

α) $ΔΓ \perp ΕΓ$

(Μονάδες 12)

β) η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας ADG .

(Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ (2_7452)

Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι $\hat{B}=120^0$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $ΔΕΓ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και $Γ$ του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 8)

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZΓ$.

(Μονάδες 8)

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 6ο

Εγγεγραμμένα σχήματα



ΑΣΚΗΣΗ (2_3413)

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ.

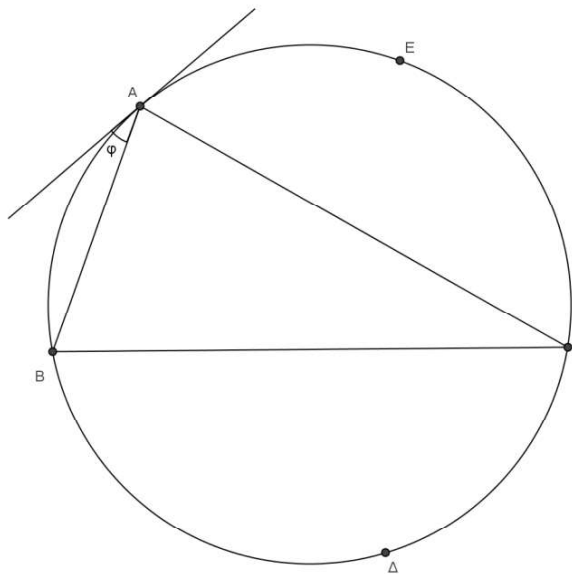
Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 18

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5009)**

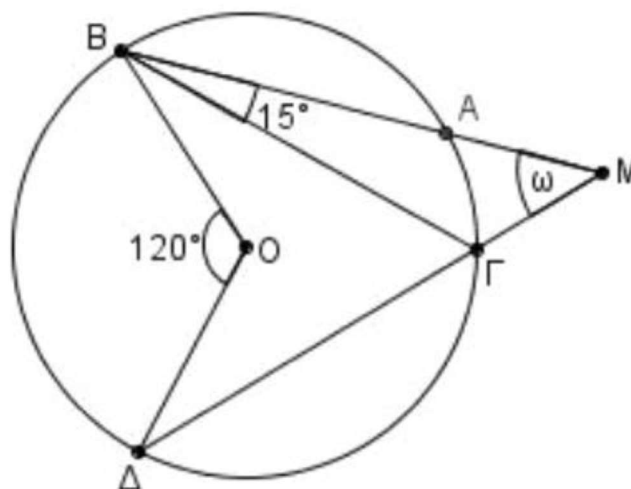
Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15°

α) Να υπολογίσετε την γωνία ΒΓΔ

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°

Μονάδες 13



ΑΣΚΗΣΗ (2_5012)

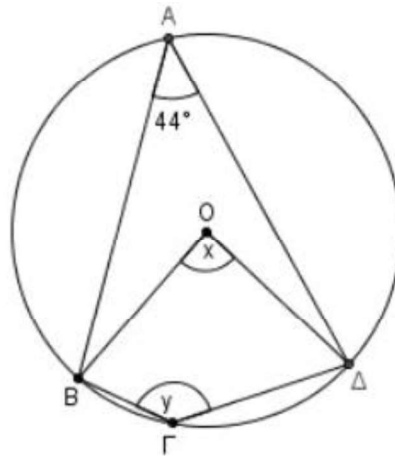
Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία BAD να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$

α) Να υπολογίσετε την γωνία x

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5037)**

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , $BO\Gamma$ και $\Gamma O A$.

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $BO\Gamma$.

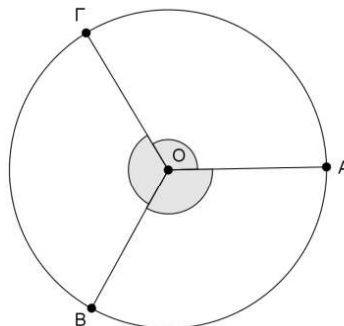
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

(Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $O\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (2_5153)**

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , χορδή $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{BA\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

ΑΣΚΗΣΗ (2_5623)

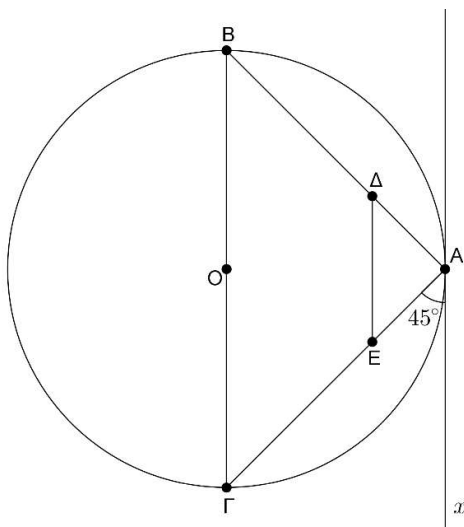
Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45° . φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

Μονάδες 15

**ΑΣΚΗΣΗ (2_6587)**

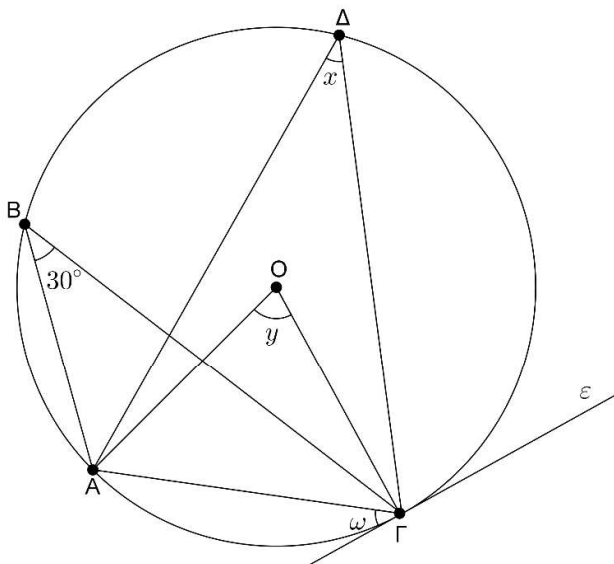
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας .

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (2_6588)

Έστω κύκλος κέντρου K , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ ,

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

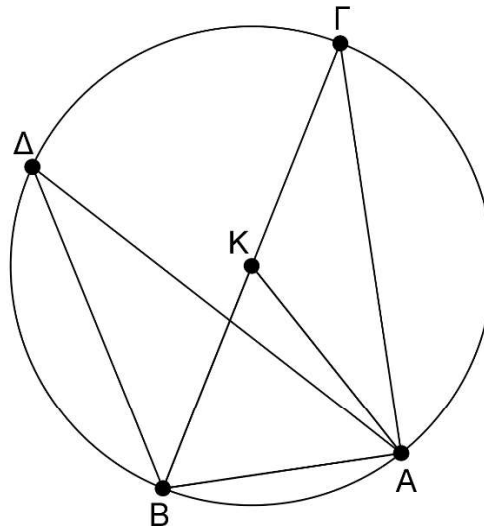
Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta A$.

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 9



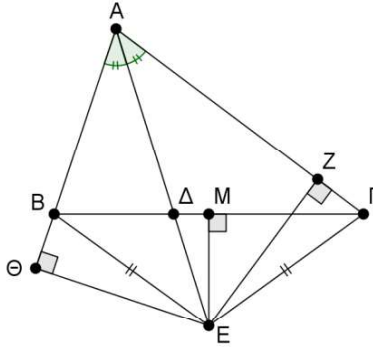
ΑΣΚΗΣΗ (4_2787)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{A}\Gamma E + \hat{A}BE = 180^\circ$ (Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_2788)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην $A\Gamma$ ώστε $DE = BA$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii) $\hat{A}\Gamma E = 10^\circ$ (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZGE . (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ (4_2796)

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου ότι και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = \Delta A$.

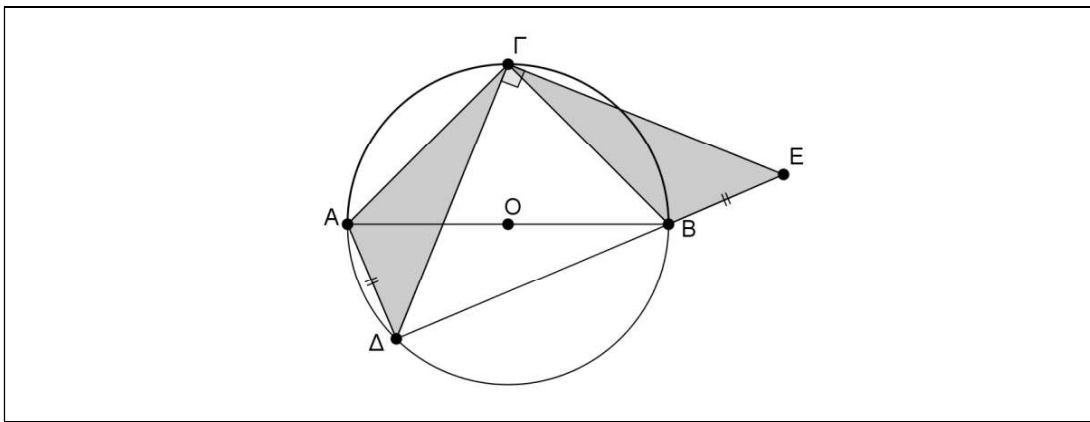
α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii) Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE . (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3694)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος AD . Φέρουμε από το B κάθετη στην AD που τέμνει την AD στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

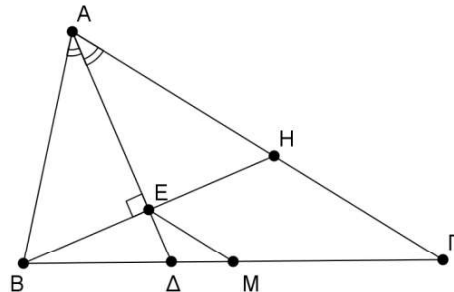
Μονάδες 9

β) $EM \parallel H\Gamma$

Μονάδες 8

γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3695)**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

Μονάδες 10

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ (4_3696)

Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AL = BK$.

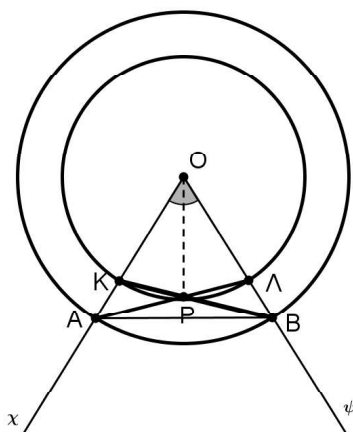
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK .

Μονάδες 8

γ) Η OP διχοτομεί την γωνία $\hat{xOy}$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3721)**

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = \Gamma H$

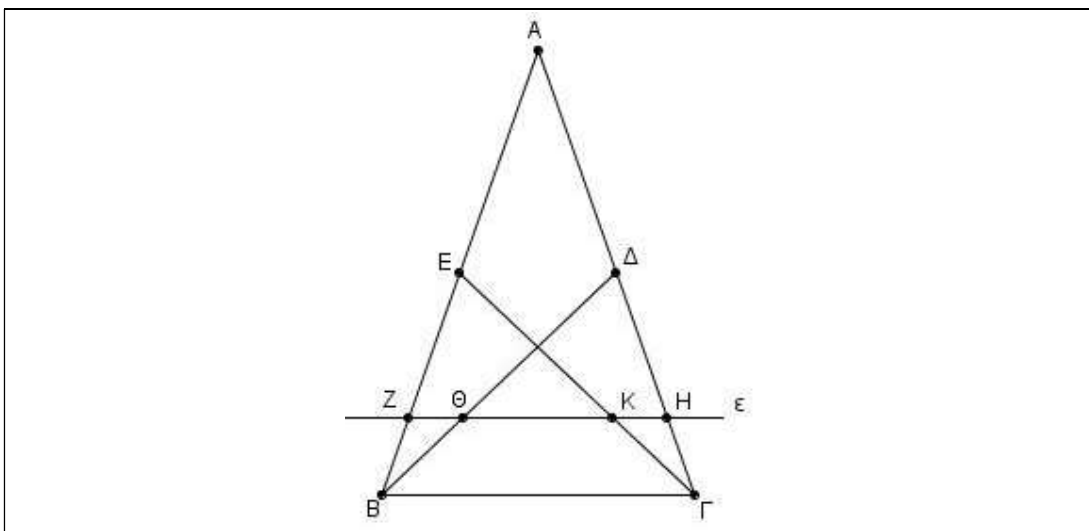
Μονάδες 8

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα.

Μονάδες 9

γ) $ZK = H\Theta$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3726)**

Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η A'B τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί την γωνία AOA'.

Μονάδες 6

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

Μονάδες 6

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$

Μονάδες 6

ii. $KA + KB > AO + OB$

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (4_3728)

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PΓΕ στα σημεία A, Δ και B.

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $PG = ΓΔ + AP$

Μονάδες 6

II. $PG - ΓΔ = PE - ΔE$

Μονάδες 8

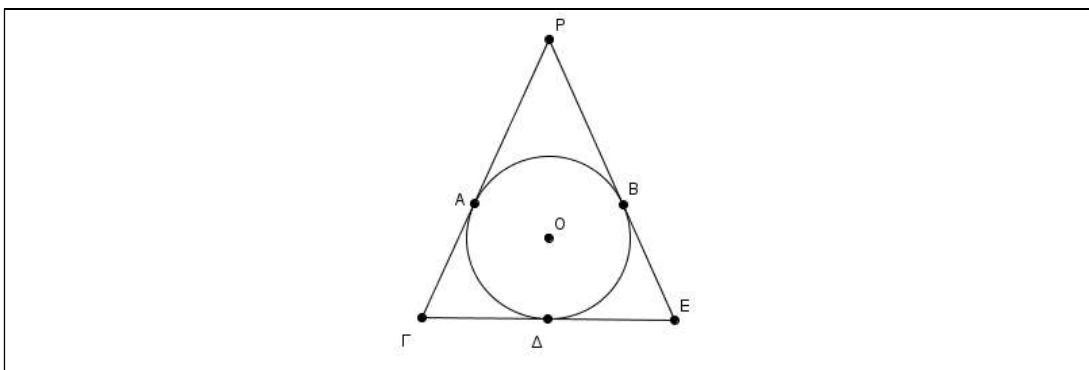
β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο PΓΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

II. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3729)**

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

β) $\Gamma A = \Delta B$

Μονάδες 8

γ) Η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (4_3767)

Δίνεται κύκλος (O, K) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM , οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις PB και PA και στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.

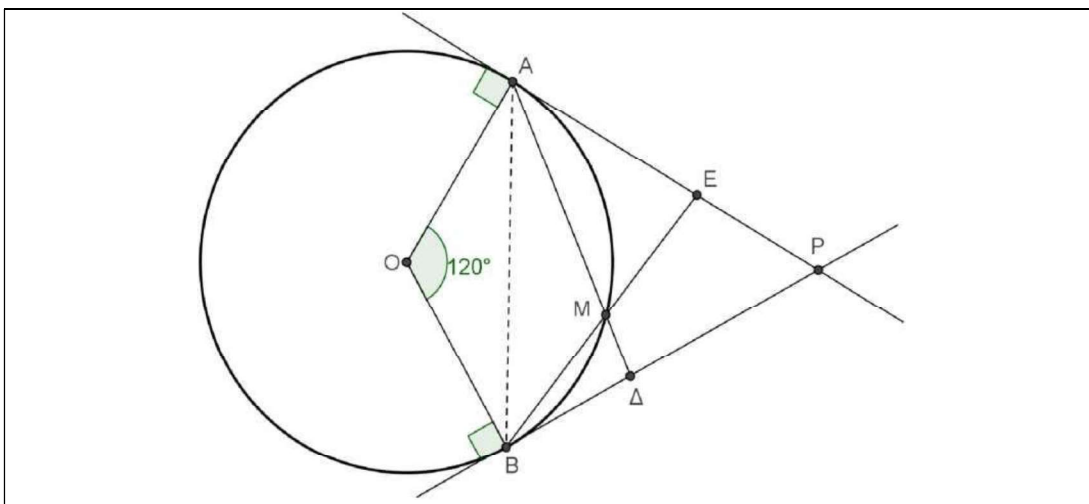
Μονάδες 8

β) $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και PEB είναι ίσα.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4741)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$

(Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$

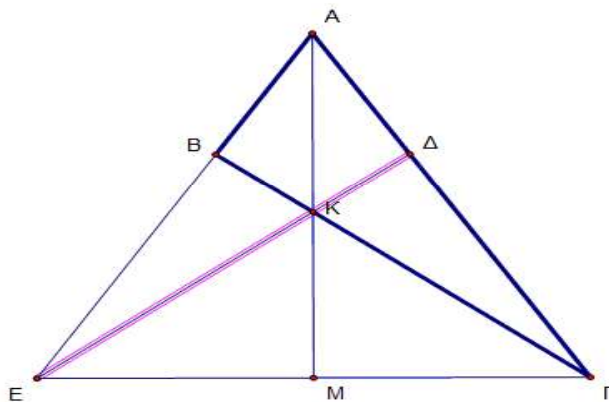
(Μονάδες 7)

γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A

(Μονάδες 6)

δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4806)**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και

την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$

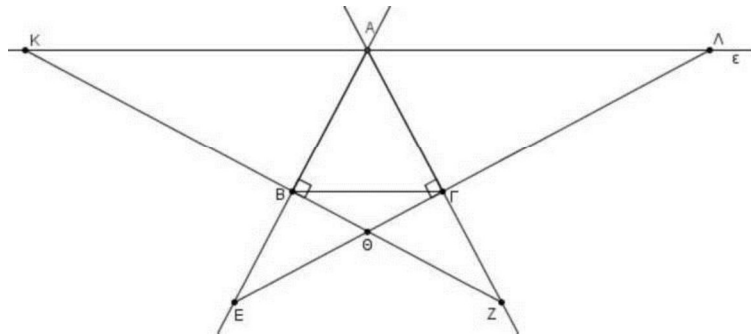
Μονάδες 8

ii. $AK = AL$

Μονάδες 9

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3825)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$

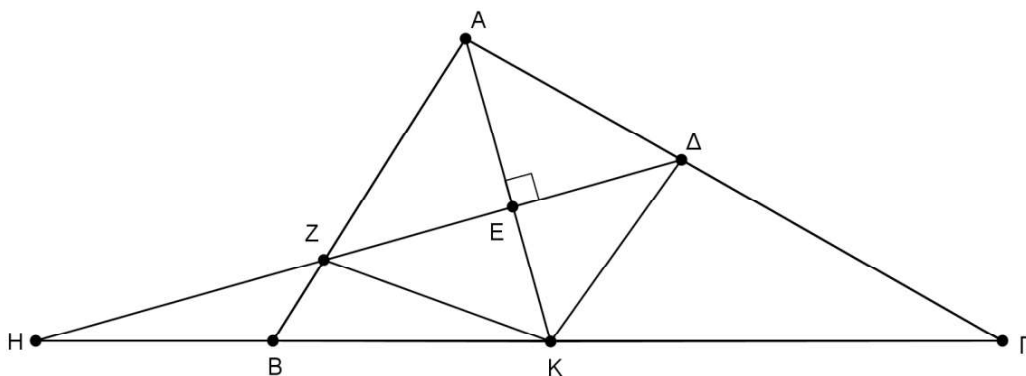
Μονάδες 7

β) $ZK = K\Delta$

Μονάδες 8

γ) $\angle ZH\Gamma = \frac{B - \hat{\Gamma}}{2}$

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3903)**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$

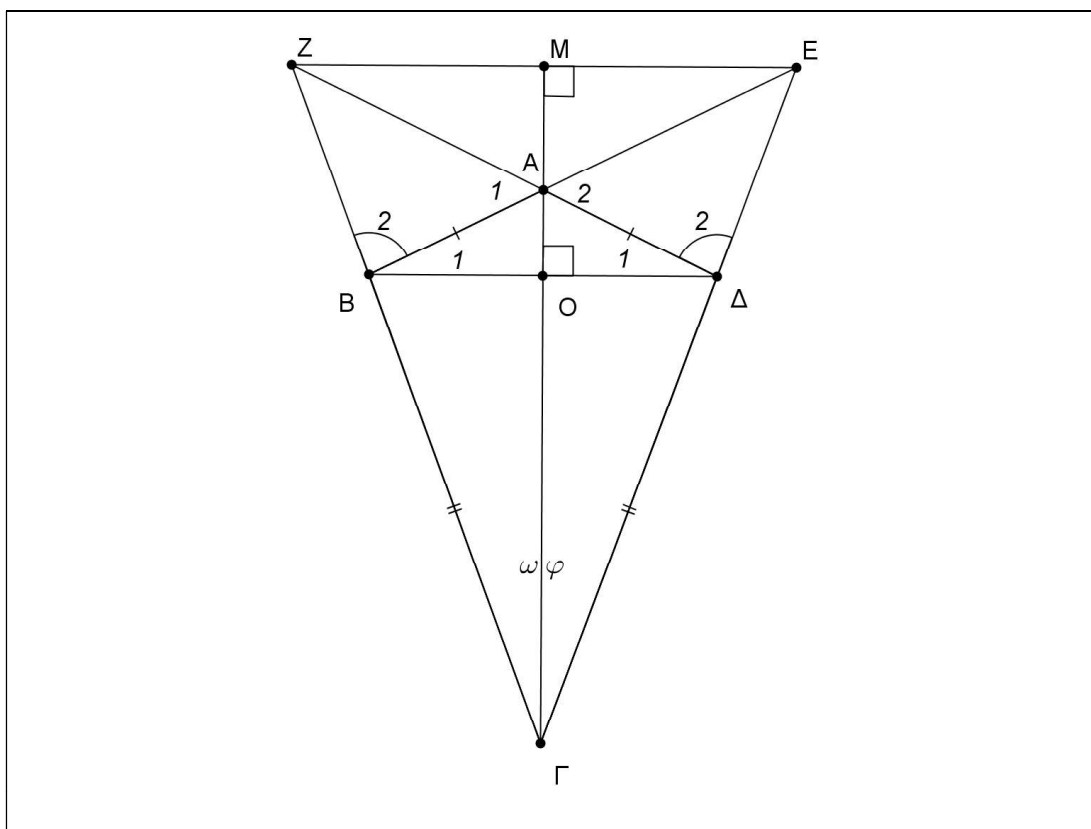
(Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4588)**

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο Z , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.

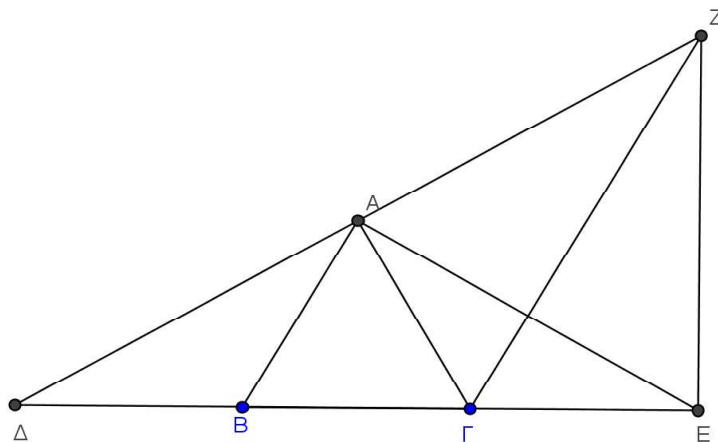
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$.

(Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4622)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔE τέμνει την

$A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ .

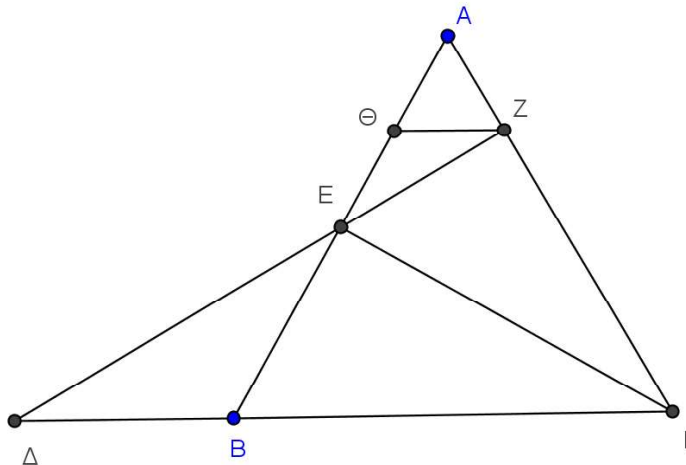
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2 \Theta Z$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

(Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4794)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.

Μονάδες 6

ii. Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές τρίγωνο.

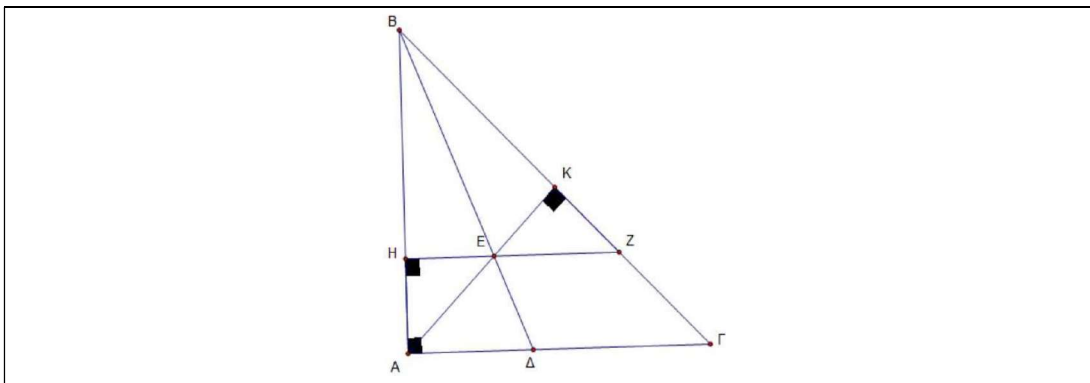
Μονάδες 6

iii. Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ

Μονάδες 7

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4799)**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην AG με $A\Delta=AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z, H και M τα μέσα των $\Delta B, E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 7

ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .

Μονάδες 7

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ έγραψε τα εξής:

« 1. $A\Delta = AE$ από υπόθεση

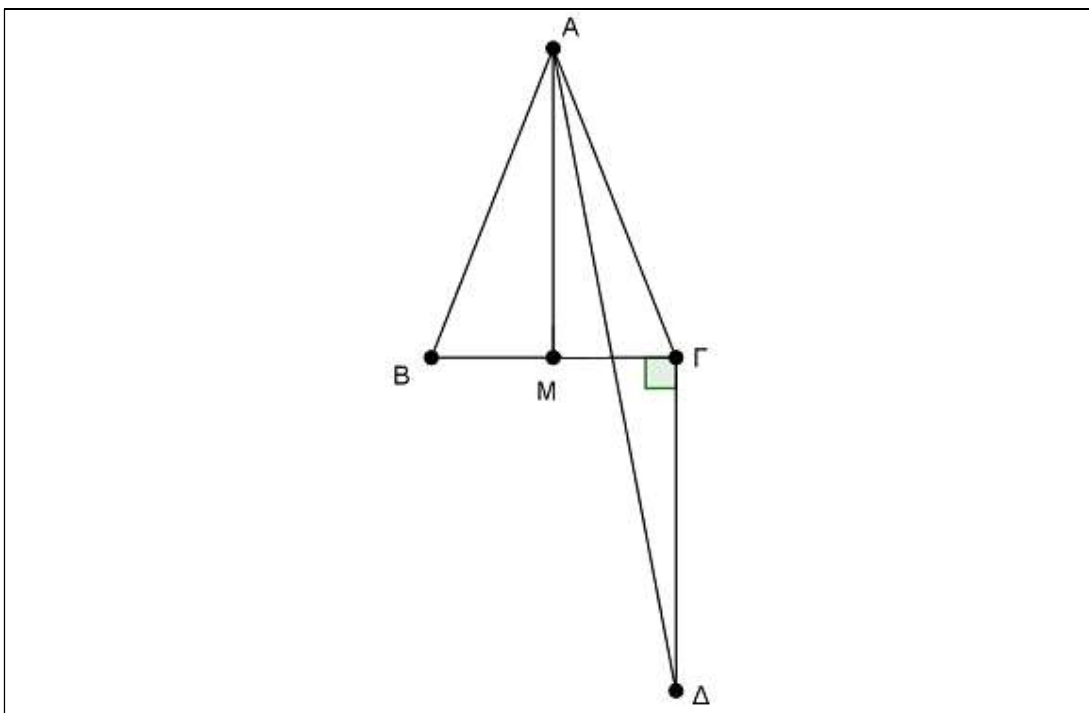
2. $AB = AG$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\Delta AB = EAG$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_5904)****[Κεφάλαιο 4^ο ή 5^ο (ανάλογα με την λύση)]**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A , B , Γ , Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B , Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .

(Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

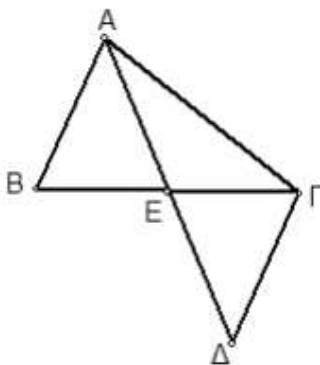
(Μονάδες 5)

iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ .

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (4_2789)

Σε μια τάξη της Α' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές του το παρακάτω πρόβλημα :

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξωτερική γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{A}$.

Ζητείται, χωρίς την βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, να χαραχθεί η διάμεσος BM του τριγώνου και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Ο καθηγητής για να διευκολύνει του μαθητές του, έδωσε την εξής υπόδειξη :

«Αν πάρω στην ευθεία (ε), στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$ τότε :

α) η $B\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο M ,

(Μονάδες 12)

β) η $\Gamma\Delta$ είναι η ζητούμενη διχοτόμος».

(Μονάδες 13)

Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς αυτούς;

ΑΣΚΗΣΗ (4_2792)

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) η γωνία $\hat{\Gamma O \Delta}$ είναι 60°

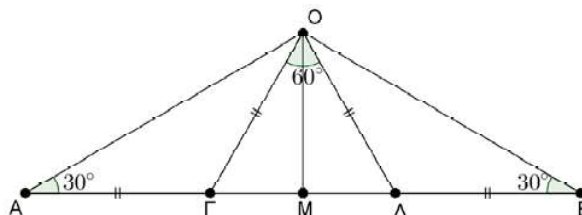
(Μονάδες 9)

ii) οι γωνίες $\hat{O \Delta \Gamma}$, $\hat{O B \Delta}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30°

(Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_2794)**

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης τα Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, I είναι τα μέσα των AE, BE αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ (4_2797)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ (1) και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$.

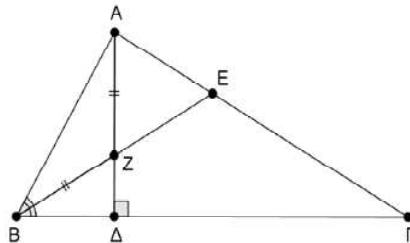
(Μονάδες 10)

ii) $AD = \frac{3}{2} BZ$.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_2799)**

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($AD, B\Gamma, \Gamma Z, \Delta H, ZK, H\Lambda$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά ($A, B, \Gamma, \Delta, \Theta, E, M, H, K, \Lambda, Z$). Αν το σημείο Θ , είναι μέσο των τμημάτων AD και $B\Gamma$ ενώ το σημείο E είναι μέσο των τμημάτων ΓZ και ΔH , να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο $\Gamma H Z \Delta$ είναι ορθογώνιο.

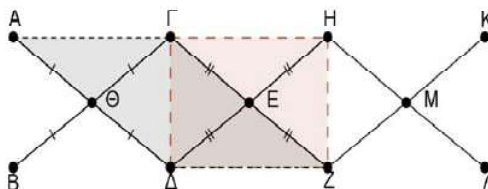
(Μονάδες 10)

β) Τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_2802)**

Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε AD, BG κάθετες στην (ε) και M, N μέσα των AB και GD αντίστοιχα.

α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABGD$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $AD < BG$

(Μονάδες 4)

2) $AD = BG$

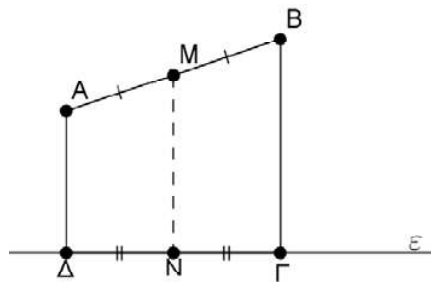
(Μονάδες 4)

ii) να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετράπλευρου $ABGD$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9 + 2)



ΑΣΚΗΣΗ (4_2804)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ABG , τα ύψη του BA και GE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς BG .

α) Να αποδείξετε ότι

i) $MA = ME$

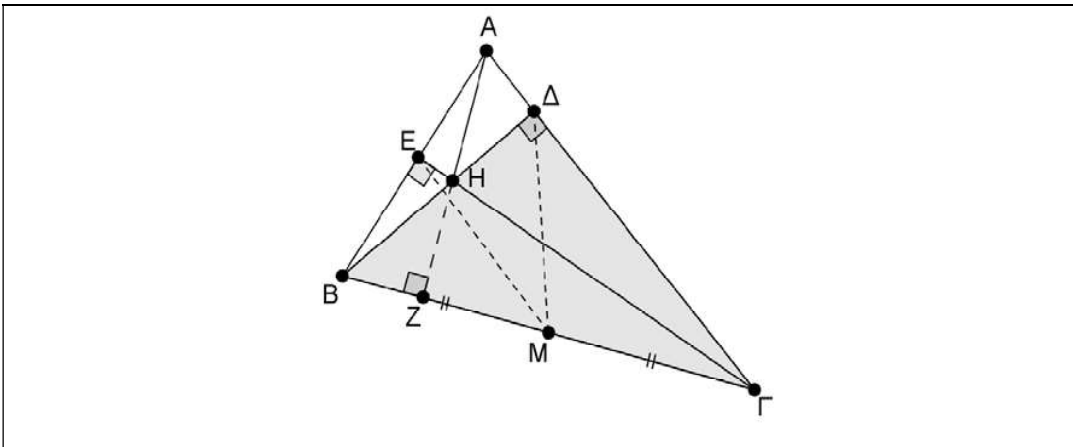
(Μονάδες 10)

ii) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη BG και ότι $\hat{A}H\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ABG .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (4_2808)

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τις ορθές προβολές $Α', Β', Γ', Δ'$ των κορυφών του $Α, Β, Γ, Δ$ αντίστοιχα, σε μια ευθεία $ε$.

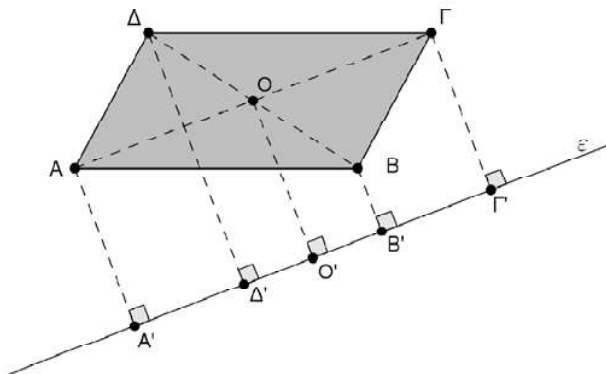
α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$ και $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

(Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

(Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ (4_2809)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\kappa$ και $\Gamma\lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν M και N τα μέσα των $B\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα, να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΒΙΔ και ΓΙΚ είναι ίσα.

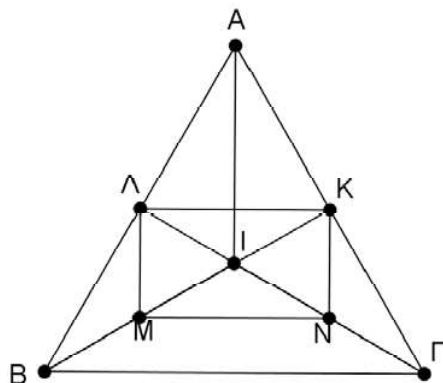
(Μονάδες 5)

γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο ΜΑΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (4_3691)

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μια ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

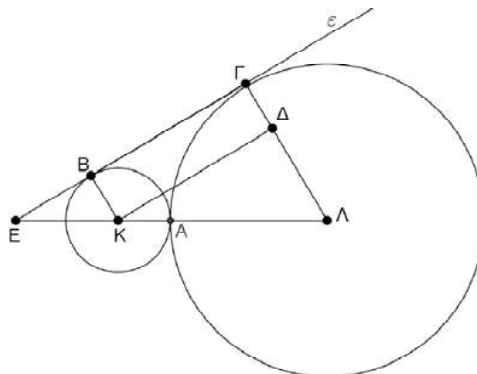
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30° .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ = 6ρ , όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_3693)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.

(Μονάδες 6)

δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ (4_3697)

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i) Ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 8

ii) Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (4_3698)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει την ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

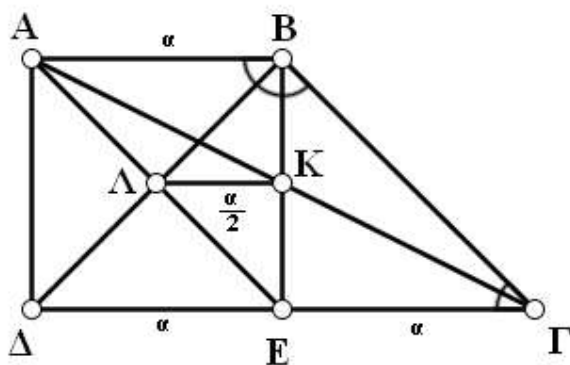
Μονάδες 8

β) $BA = AE$

Μονάδες 8

γ) $KL = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3699)**

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο

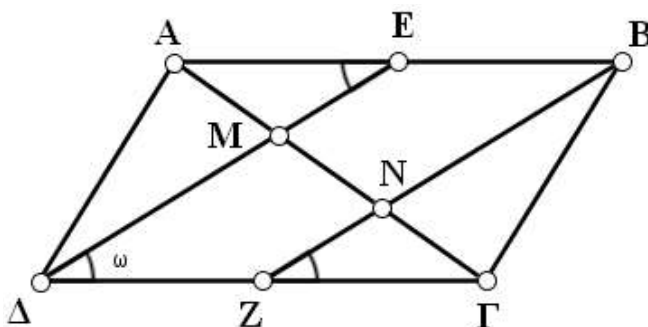
Μονάδες 8

β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$

Μονάδες 8

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ διχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3700)**

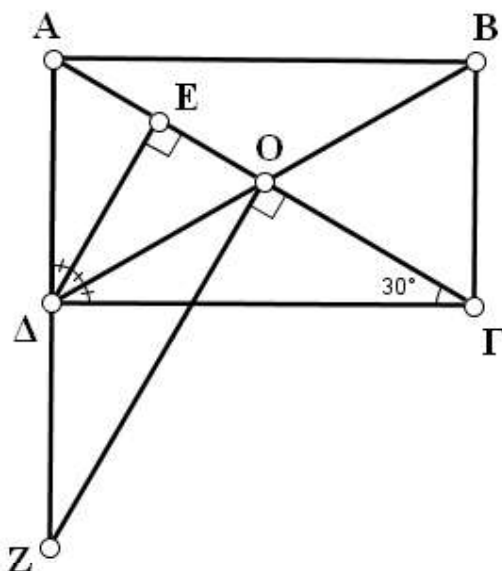
Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.

Μονάδες 13

β) Φέρουμε κάθετη στη ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3701)**

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$

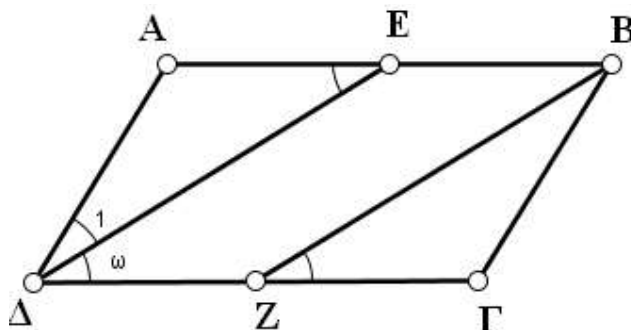
Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

α) Στη περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

Μονάδες 16

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3702)

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν $AB > AD$ και γωνία Α αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

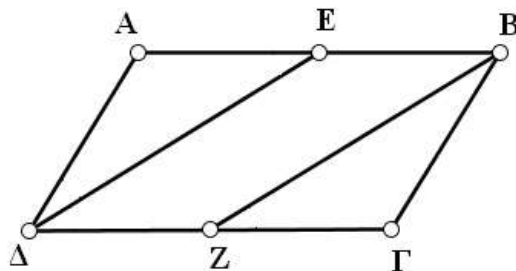
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

Μονάδες 16

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3703)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ = ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BA = GE$

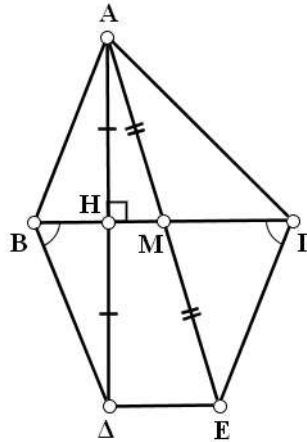
Μονάδες 8

β) $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{E}$

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3704)

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$

Μονάδες 6

II. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

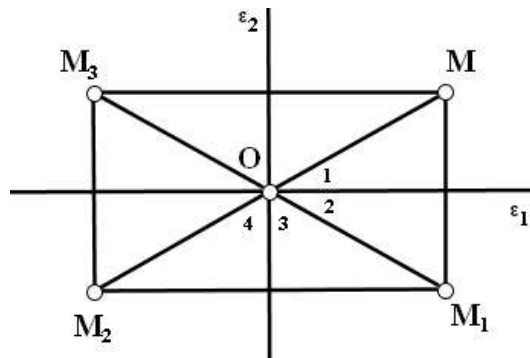
Μονάδες 8

III Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

Μονάδες. 6

β) Αν το M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3705)

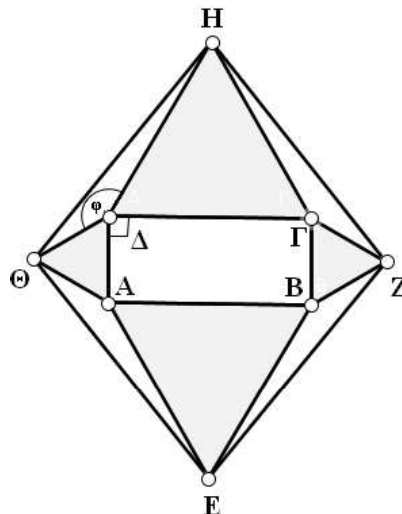
Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα $ABE, B\Gamma Z, \Gamma\Delta H, \Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 15

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 15



ΑΣΚΗΣΗ (4_3706)

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

α) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στην μεσοκάθετο του $A'B'$.

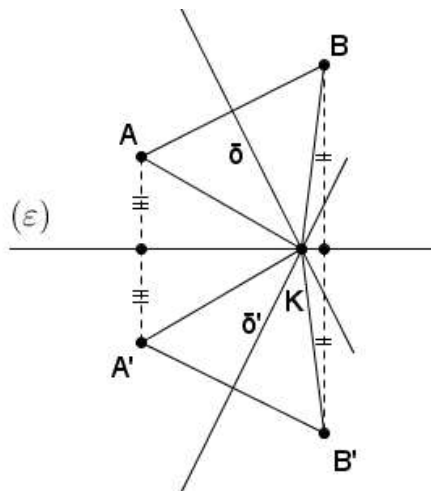
Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3709)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγώνιων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντας κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$

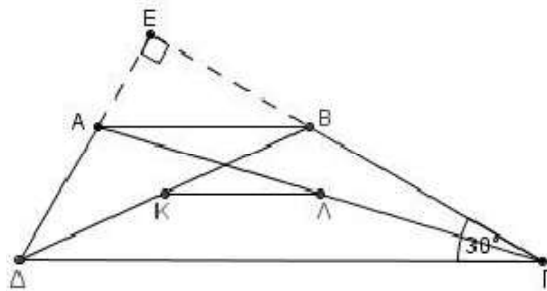
Μονάδες 10

β) $K\Lambda = A\Delta$

Μονάδες 10

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3711)**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $AH = A\Delta = AE$

Μονάδες 6

II. Η γωνία EHA είναι ορθή.

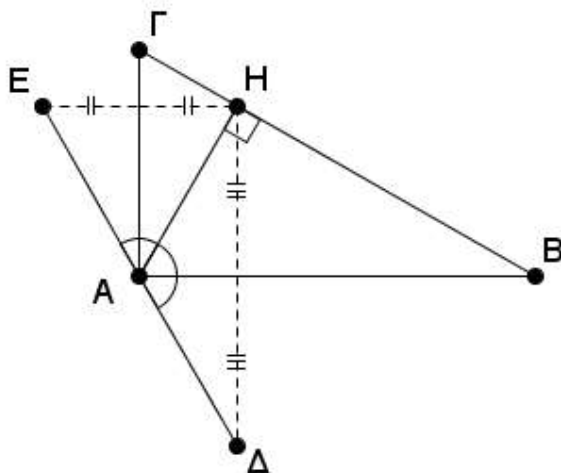
Μονάδες 6

III. Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 6

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EHA είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3713)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος BD της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BD που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές

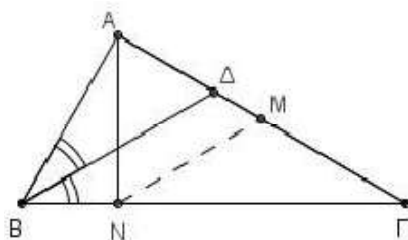
Μονάδες 5

- β) Το τρίγωνο MNT είναι ισοσκελές.**

Μονάδες 10

- $\gamma)$ $\mathbf{AN} \perp \mathbf{B\Gamma}$**

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (4_3715)

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π_1 και Π_2 :

Π₁: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

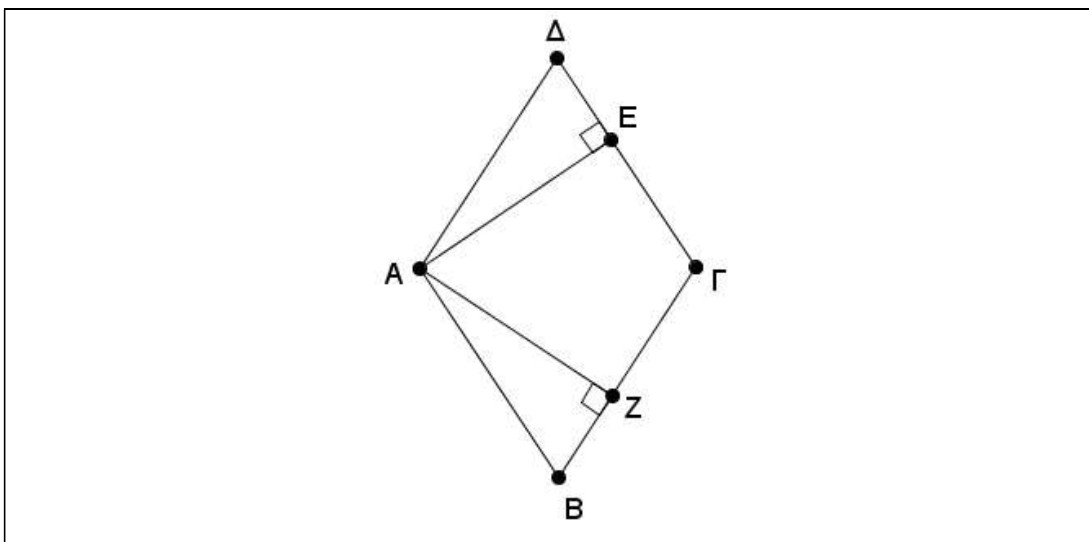
Π₂: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

- α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π_1 και Π_2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 20

- β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

Μονάδες 5

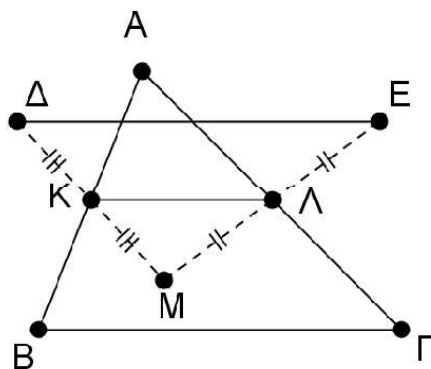
**ΑΣΚΗΣΗ (4_3717)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς τα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Μονάδες 15

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς τα K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3718)**

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

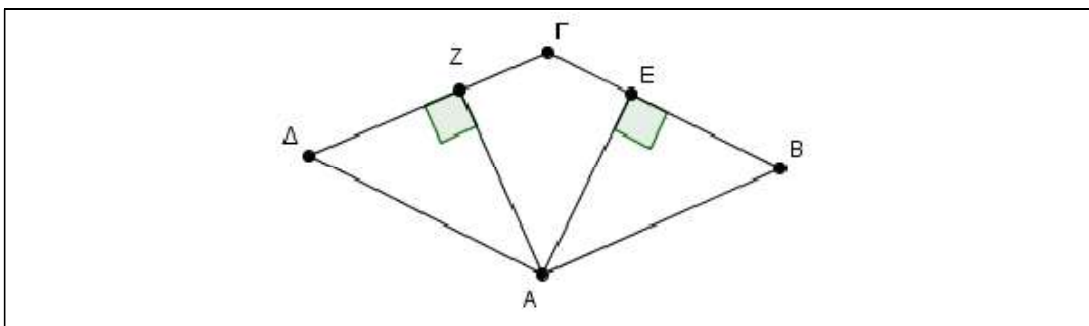
Μονάδες 6

β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE

Μονάδες 9

γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3720)**

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

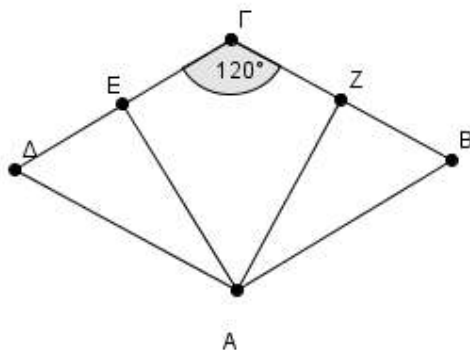
Μονάδες 8

ii. $AG \perp EZ$.

Μονάδες 8

β) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3722)**

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

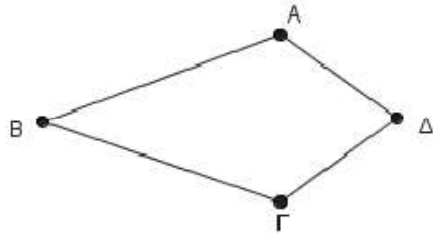
Μονάδες 9

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

Μονάδες 6

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3723)**

Σε κυρτό τετράπλευρο ABΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$

Μονάδες 8

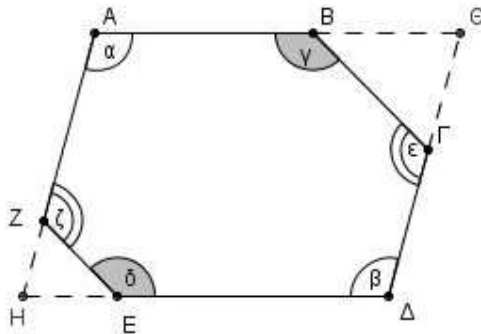
β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές

Μονάδες 10

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3724)**

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο Ε και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 8

ii. $\Gamma\Delta = \Delta\Lambda + \text{B}\Gamma$

Μονάδες 8

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ (4_3725)

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OA . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

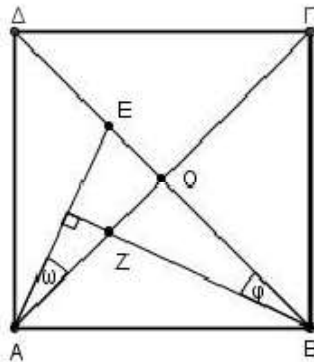
Μονάδες 6

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$

Μονάδες 12

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3727)

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BN = AB$ και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Delta N = \Delta M$

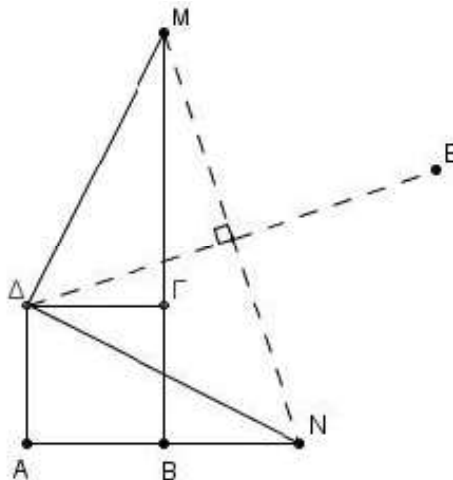
Μονάδες 7

ii. $\Delta N \perp \Delta M$

Μονάδες 10

β) Αν E το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία MN , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3732)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.

Μονάδες 6

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$

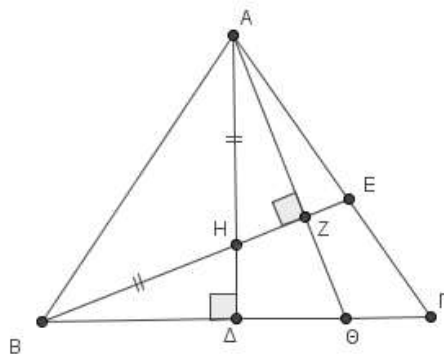
Μονάδες 6

iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

Μονάδες 6

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3734)

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες 7

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.

Μονάδες 10

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $BA\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ (4_3735)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A .

α) Να αποδείξετε ότι:

$$i. \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}, \text{ όπου } \hat{A}_{εξ} \text{ και } \hat{B}_{εξ} \text{ παριστάνουν τις εξωτερικές}$$

γωνίες των $\hat{A}$, $\hat{B}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 10

ii. Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓB (προς το μέρος του B) σε σημείο Z .

Μονάδες 8

β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και $\hat{A}ZB = 15^\circ$, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ (4_3737)

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3} A\Delta$.

Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

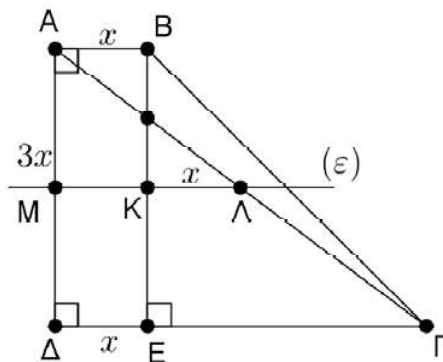
Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες 10

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και AF αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η AF διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK .

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3739)

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

Μονάδες 6

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

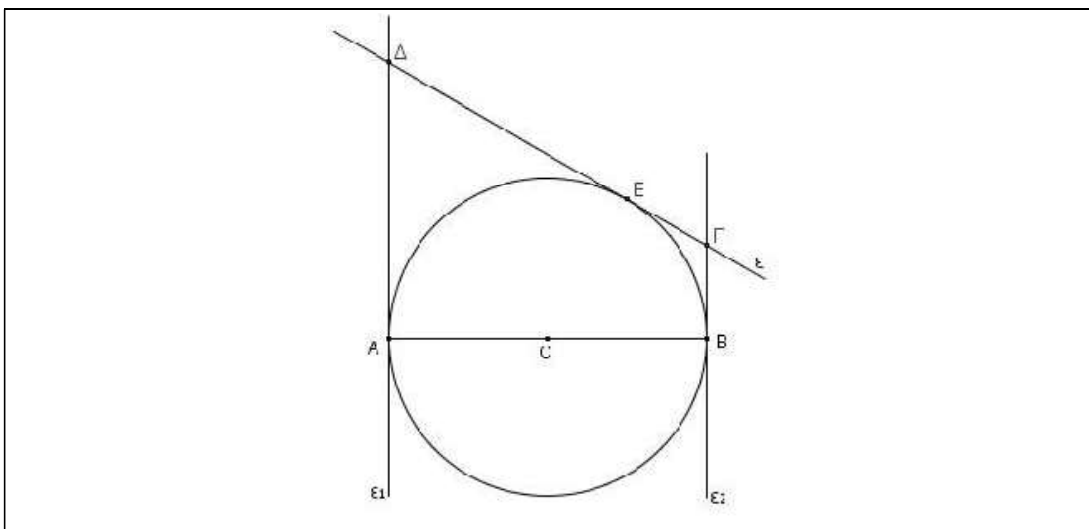
Μονάδες 7

iii. Το τρίγωνο $\Gamma\Theta\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 7

β) Αν η γωνία $\Lambda\Delta\epsilon$ είναι 60° και η $Ο\Delta$ τέμνει τον κύκλο $(Ο, R)$ στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K είναι μέσο του ΔO .

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3741)**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη DH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.

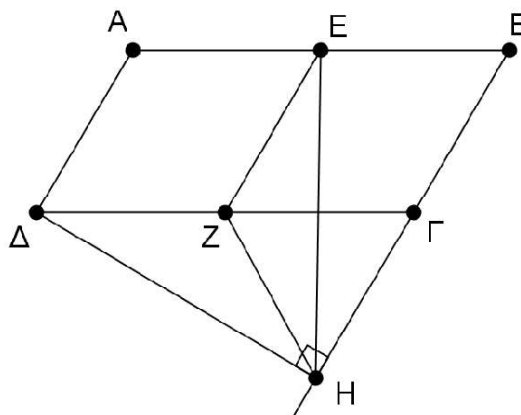
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας ZHG .

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3745)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.

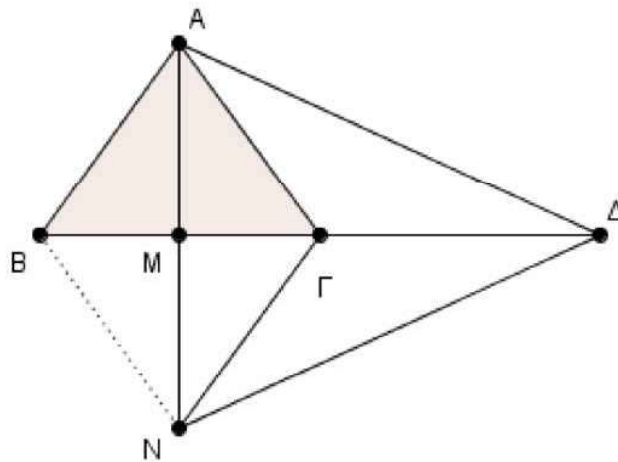
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο $\triangle ADN$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $\triangle ADN$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3747)

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\angle A\Delta K$ είναι ίση με 30° .

Μονάδες 6

β) Το τρίγωνο $\triangle KAB$ είναι ισοσκελές.

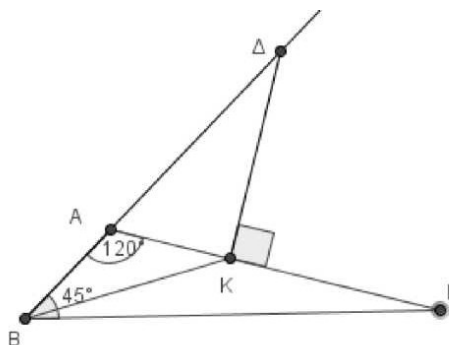
Μονάδες 6

γ) Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $\angle ZKB = 90^\circ$

Μονάδες 6

δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος BA .

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3751)

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Έστω ότι Δ είναι το
[lisari – team](#) «Θέμα Δ»

μέσο της AM τέτοιο ώστε $BD = \frac{BG}{2}$ και γωνία $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta M$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

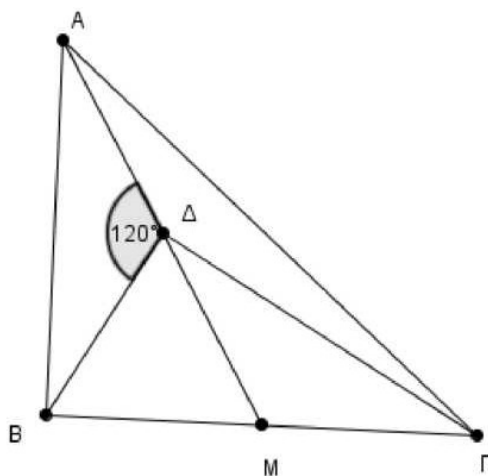
Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Delta M\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

δ) Αν το σημείο K είναι η προβολή του Δ στην $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $2MK = A\Delta$.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3754)

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντιστοίχως, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{K\epsilon\Lambda} = 90^\circ$

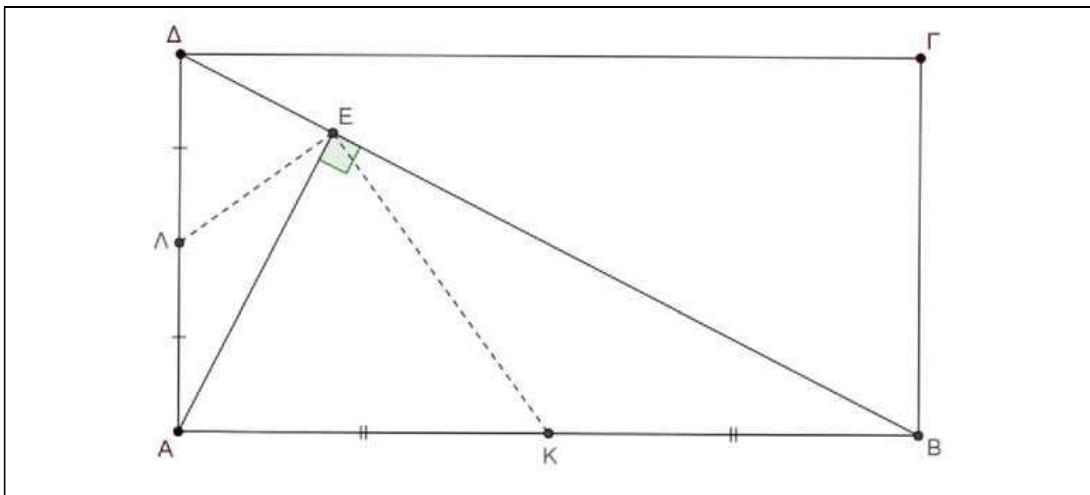
Μονάδες 8

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

Μονάδες 8

β) Αν $\hat{B\Lambda\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3757)**

Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με κέντρο $Ο$ και $ΑΒ > ΒΓ$, $ΑΓ = 2ΒΓ$. Στην προέκταση της πλευράς $ΔΑ$ (προς το $Α$) παίρνουμε σημείο $Ε$ ώστε $ΔΑ = ΑΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ί. Το τετράπλευρο $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

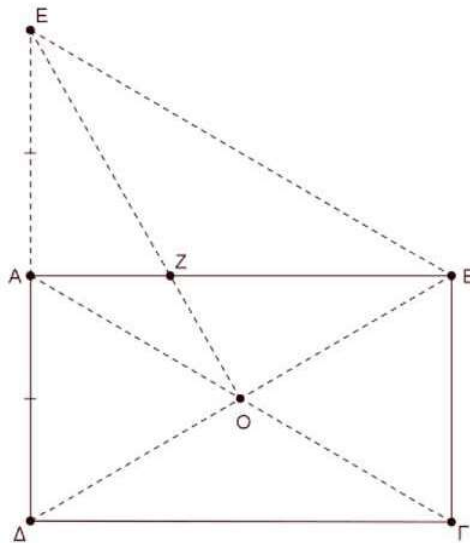
Μονάδες 8

ίι. Το τρίγωνο $ΕΒΔ$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 9

β) Αν η $ΕΟ$ τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$, να αποδείξετε ότι $ΔΖ \perp ΕΒ$.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3759)**

Δίνεται κύκλος $(Ο,Κ)$ με διάμετρο $ΒΓ$. Θεωρούμε σημείο $Α$ του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο $ΑΒΓ$. Η προέκταση της $ΑΟ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Ζ$. Φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Ε$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ί. $ΖΓ = ΑΒ = ΒΕ$.

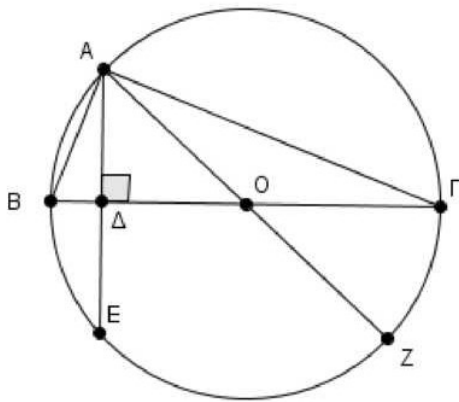
Μονάδες 8

ii. Το τετράπλευρο BEZΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7

β) Αν $\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου BEZΓ είναι ίση με $5R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (4_3762)

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της AΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την AE στο H. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

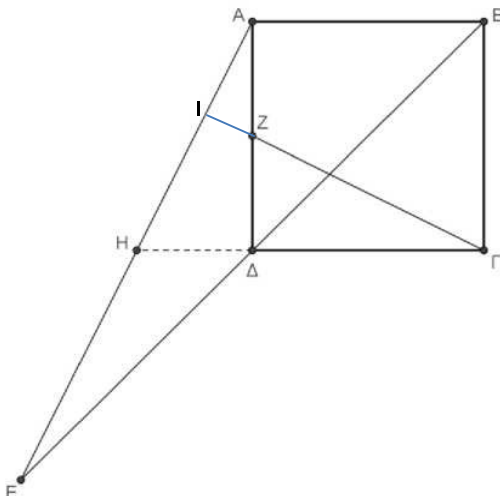
Μονάδες 8

β) Τα τρίγωνα AΔH και ZΔΓ είναι ίσα.

Μονάδες 9

γ) Η ΓZ είναι κάθετη στην AE.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3765)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$.

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο BA στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = 45^\circ$.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

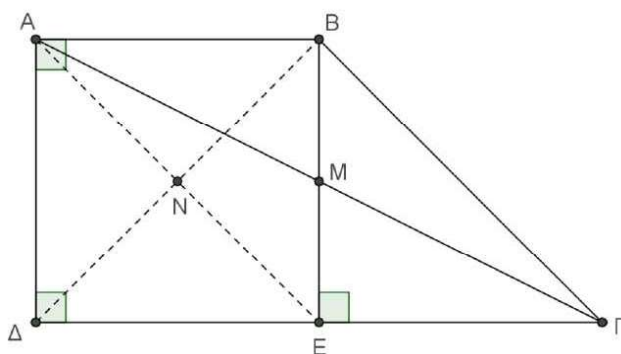
Μονάδες 6

γ) $MN = \frac{1}{4} \Gamma\Delta$.

Μονάδες 7

δ) $AE \perp BA$.

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3775)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{BA}{2}$.

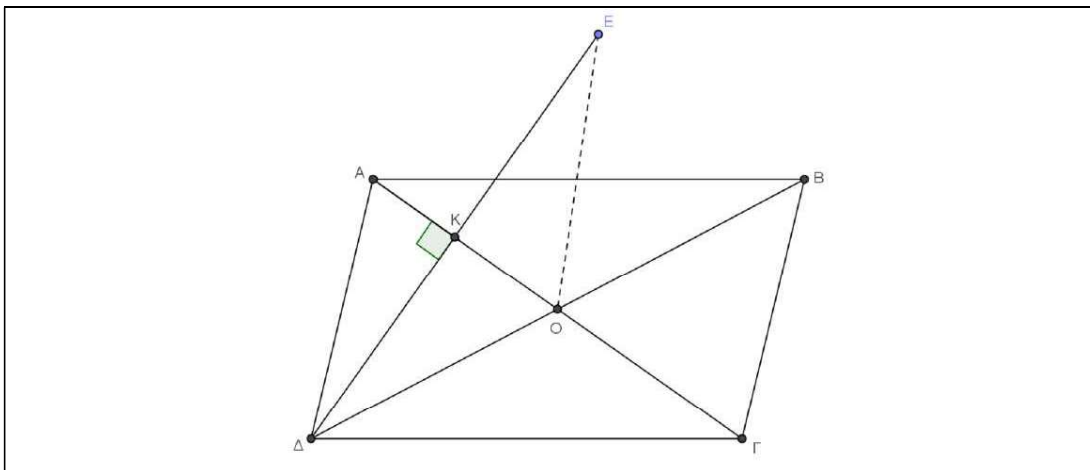
Μονάδες 8

β) Η γωνία $\widehat{\Delta EB}$ είναι ορθή.

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3777)**

Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την (ε) στο M . Να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσον του AB .

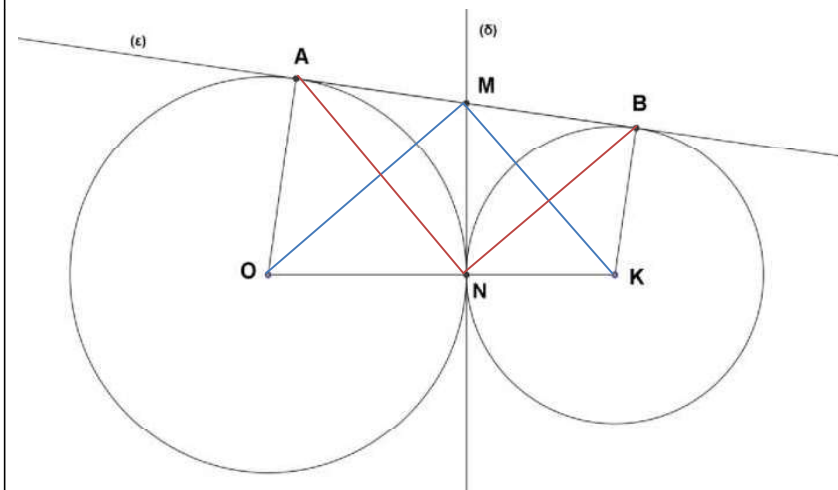
Μονάδες 7

β) $\angle OMK = 90^\circ$.

Μονάδες 9

γ) $\angle ANB = 90^\circ$.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3781)**

Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των $OB, O\Gamma$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $B\Gamma \parallel ZH$

Μονάδες 5

β) $OZ = OH$

Μονάδες 5

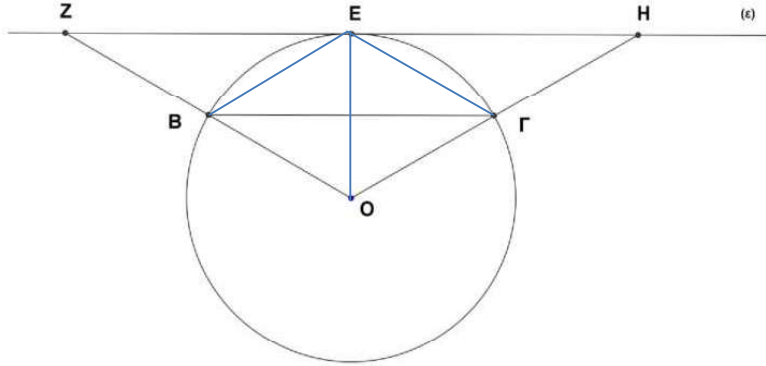
γ) Αν B μέσον της OZ

i. να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{E}Z} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$,

Μονάδες 8

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3784)

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος.

Μονάδες 8

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ.

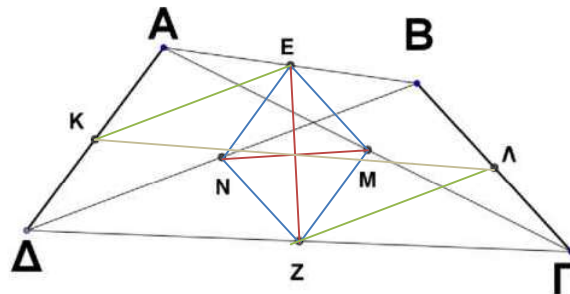
Μονάδες 7

γ) ΚΕ=ΖΛ

Μονάδες 5

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο.

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3789)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ (ΓΕ ⊥ ΜΒ). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δχ // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.

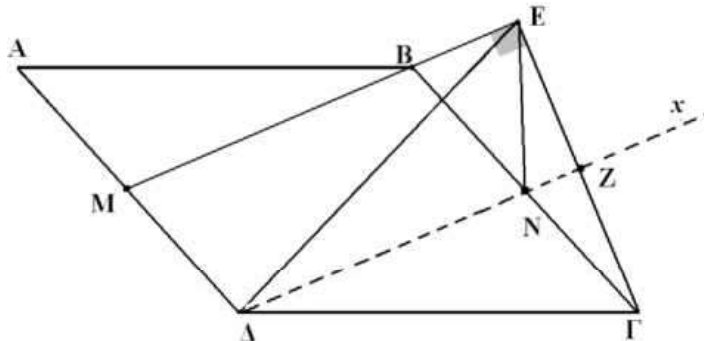
Μονάδες 7

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.

γ) $\Delta E = \Delta \Gamma$

Μονάδες 9

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3796)**

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ , τα ύψη από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, ΓH , BH αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \Lambda K$

Μονάδες 6

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$.

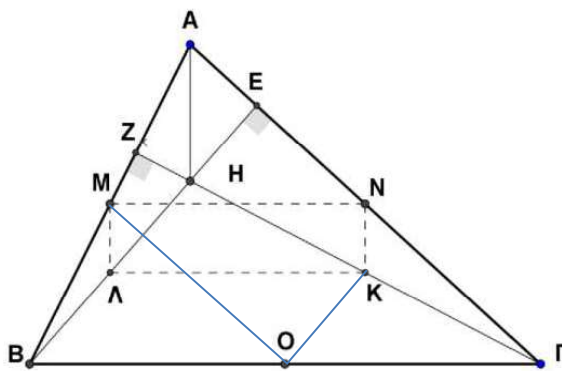
Μονάδες 6

iii. Το τετράπλευρο $MNKA$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 6

β) Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$.

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3798)**

Δίνεται ορθή γωνία $\hat{xOy} = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy , Ox , με $OA = OB$. Η (ε) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox , Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.

Μονάδες 7

β) $ΑΔ+ΒΕ=ΔΕ$

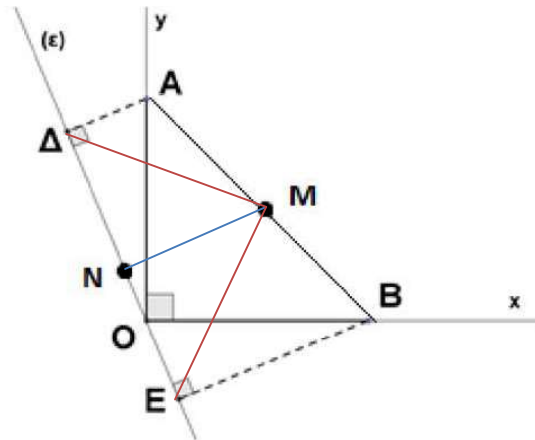
Μονάδες 7

γ) $MN = \frac{ΔΕ}{2}$ όπου MN είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.

Μονάδες 7

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

Μονάδες 4



ΑΣΚΗΣΗ (4_3803)

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΝ=ΔΜ$.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.

Μονάδες 7

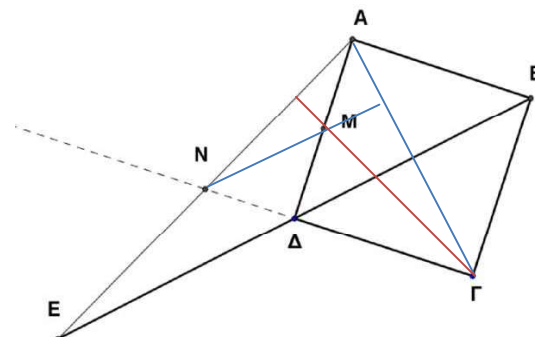
γ) Να αποδείξετε ότι:

ί. $MN \perp ΑΓ$

Μονάδες 5

ίί. $ΓΜ \perp ΑΝ$

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3806)

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = HG$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

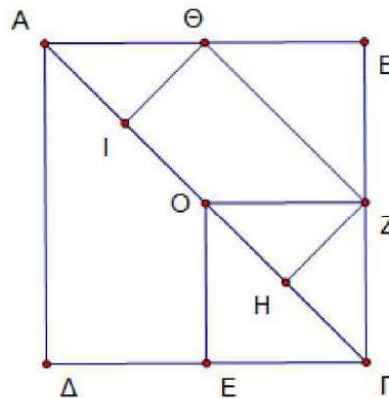
Μονάδες 7

β) $ZH = \frac{AG}{4}$

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3808)**

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 7

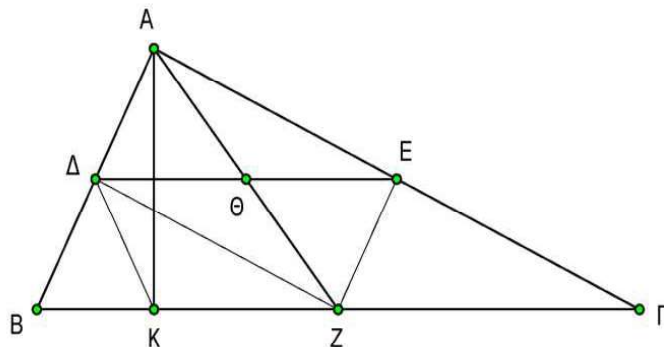
β) Αν επιπλέον είναι γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

i. Να βρείτε τη γωνία $\hat{A\hat{Z}B}$

Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3810)**

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.

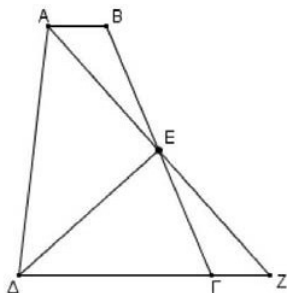
Μονάδες 7

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.

Μονάδες 10

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ του τραπέζιου.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3811)**

Δίνεται τραπέζιο $A\Delta EB$, με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$. Αν γωνία $\hat{\Delta AZ} = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία $\hat{AZ\Delta}$ σε συνάρτηση με τη φ .

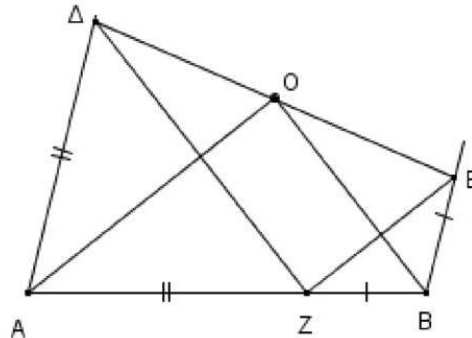
Μονάδες 8

β) Να εκφράσετε τη γωνία $\hat{EZB}$ σε συνάρτηση με τη φ .

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3812)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$.

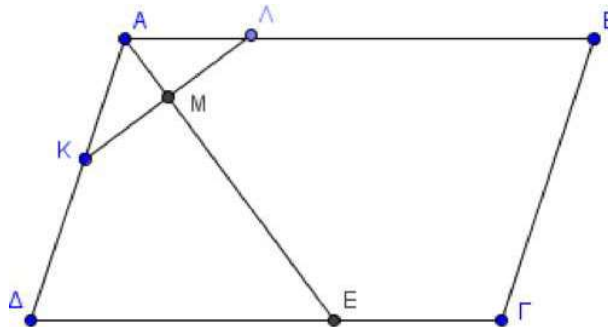
Μονάδες 8

β) $BΓ + ΓΕ = AB$.

Μονάδες 10

γ) $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{ALK}$

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3813)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2 \cdot BΓ$. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.

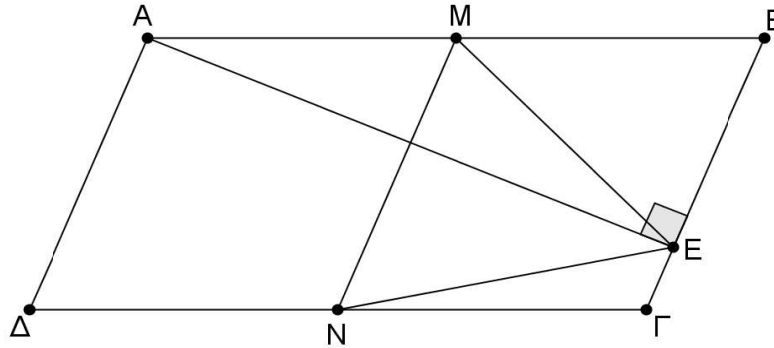
Μονάδες 8

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 9

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3815)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2BG$, τη γωνία $\hat{A}$ αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta\hat{A}B}$.

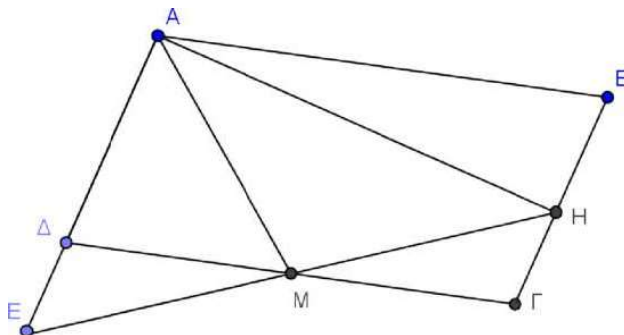
Μονάδες 9

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

Μονάδες 8

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta\hat{M}A}$.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3820)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με την γωνία Α ορθή και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο

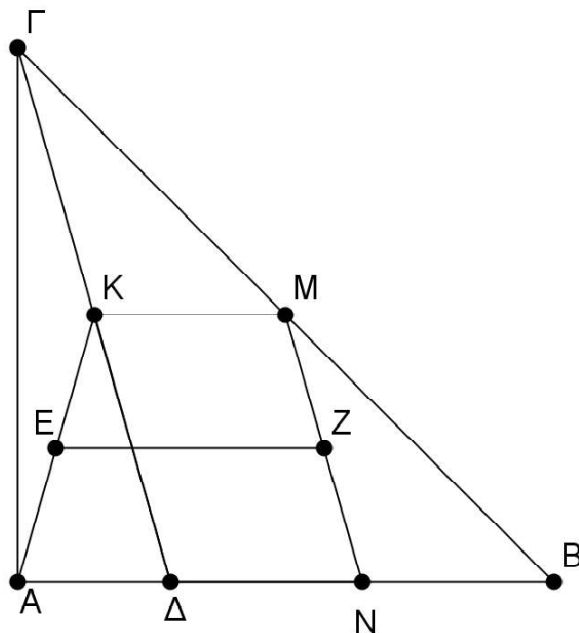
Μονάδες 8

(β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 9

(γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3822)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

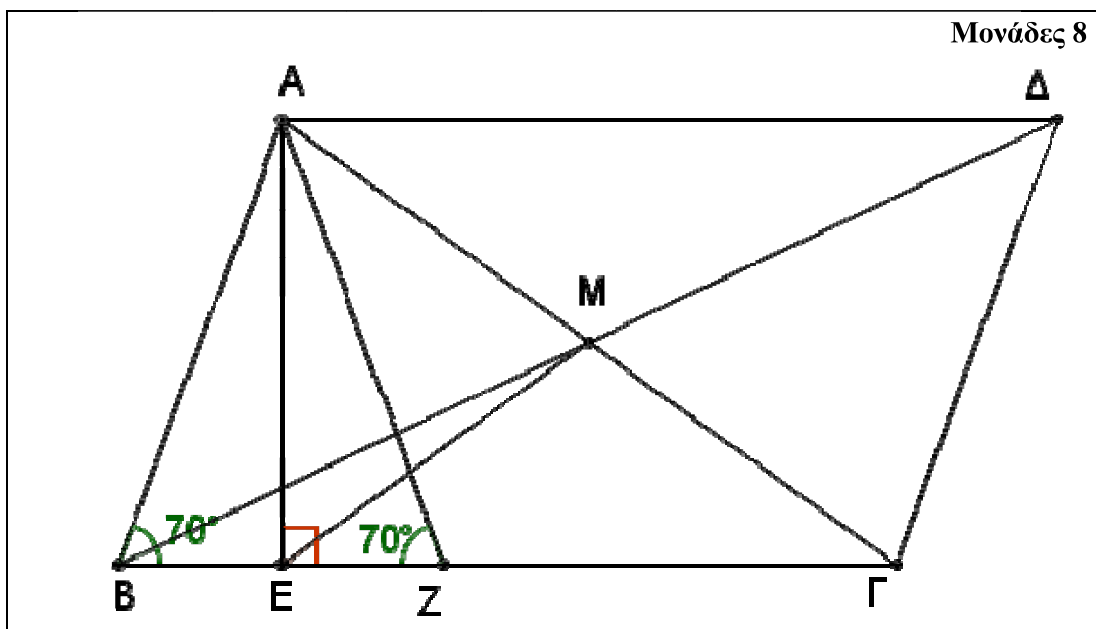
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ

Μονάδες 9

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ να αποδείξετε ότι $EM = \frac{AG}{2}$

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3824)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρνουμε το ύψος του AE και την διάμεσό του AM . Από το Γ φέρνουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

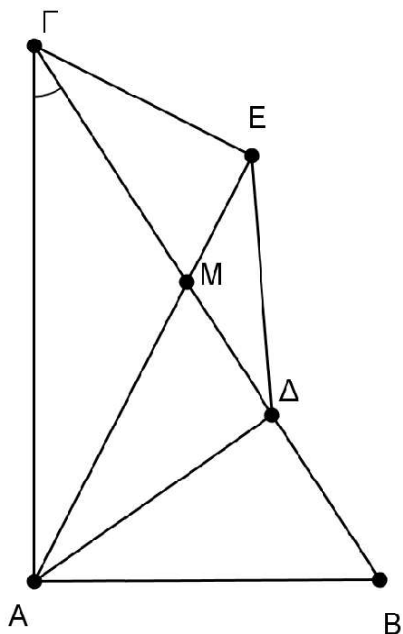
Μονάδες 8

(β) $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες 9

(γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3904)

α) Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 15

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (4_3906)

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E, A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$ να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$

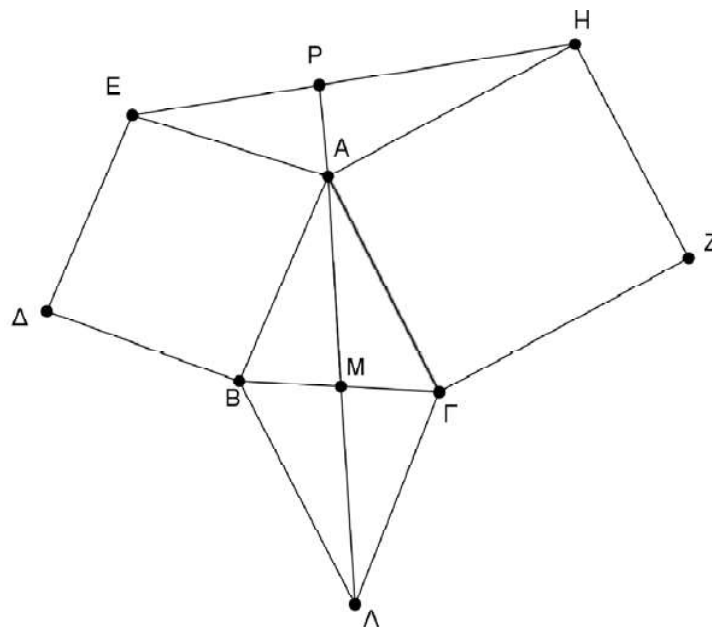
(Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda, EAH$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .

(Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3908)**

Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$

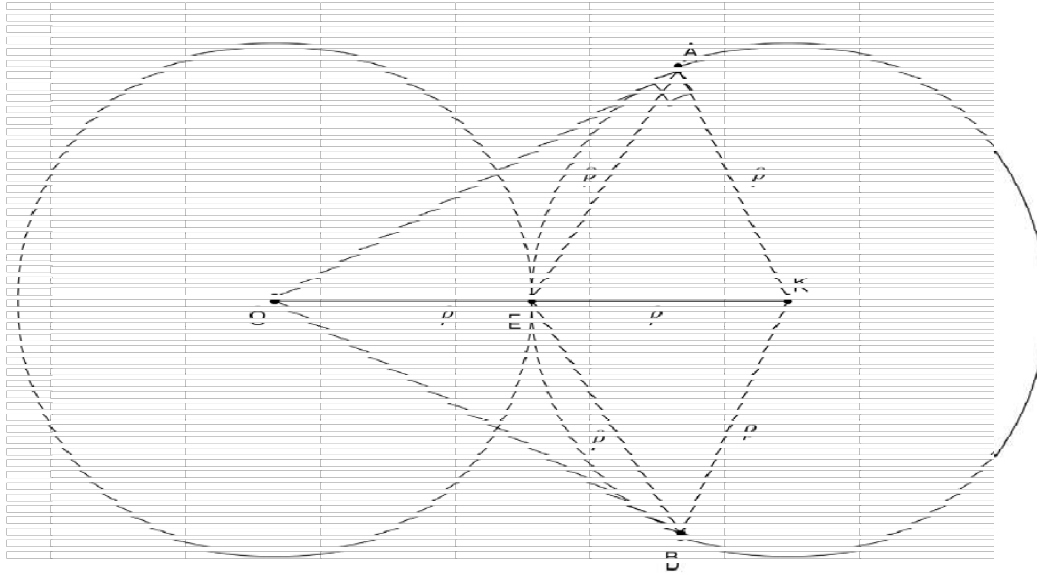
Μονάδες 9

β) $\widehat{AOK} = 30^\circ$

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

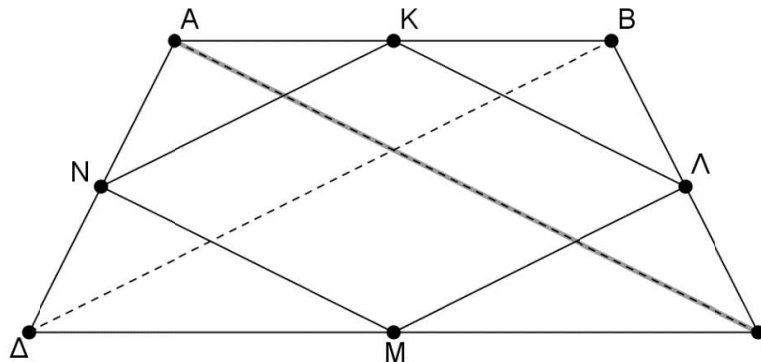
**ΑΣΚΗΣΗ (4_3911)**

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3915)**

(α) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 13

(β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ (4_3926)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta, ME$ και $M\Theta$ στις $AB, A\Gamma$ και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

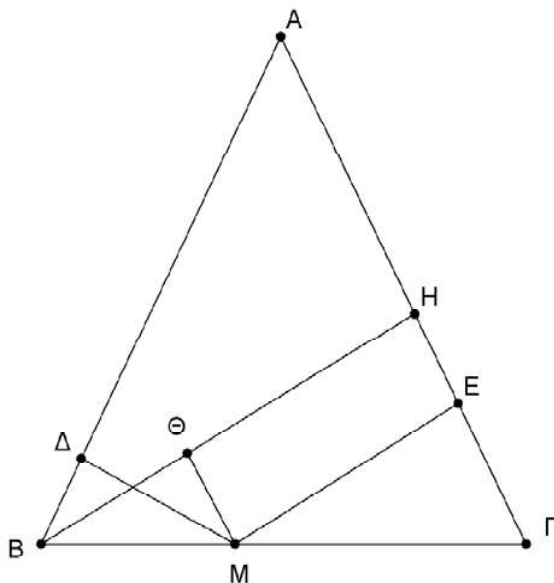
Μονάδες 9

β) $B\Theta = \Theta M$

Μονάδες 9

γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3932)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

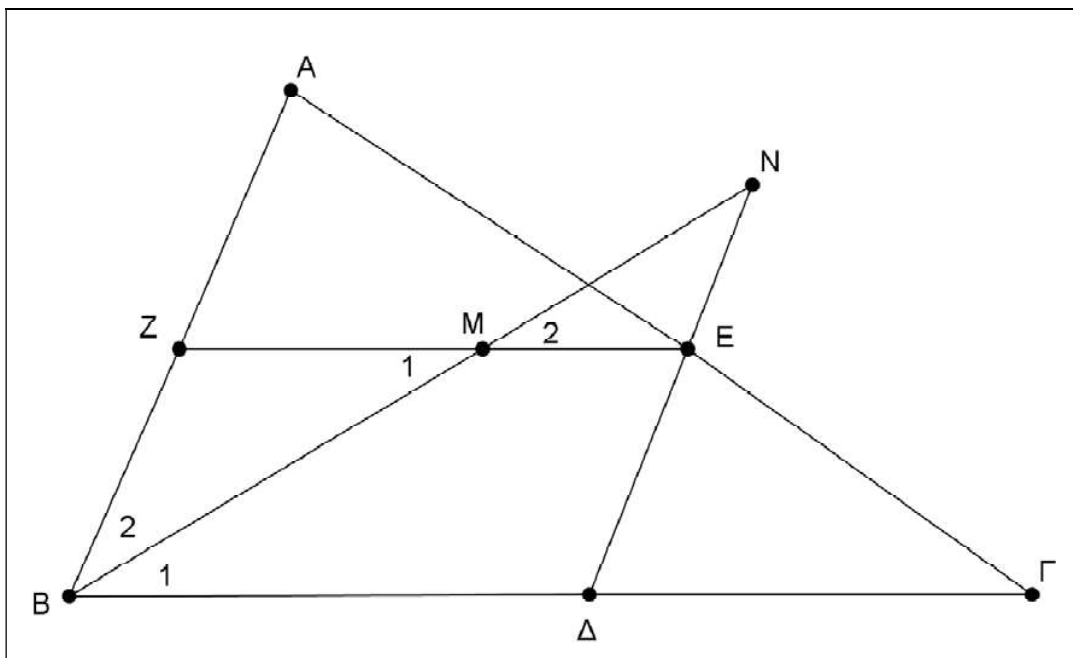
(Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 10)

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3938)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.

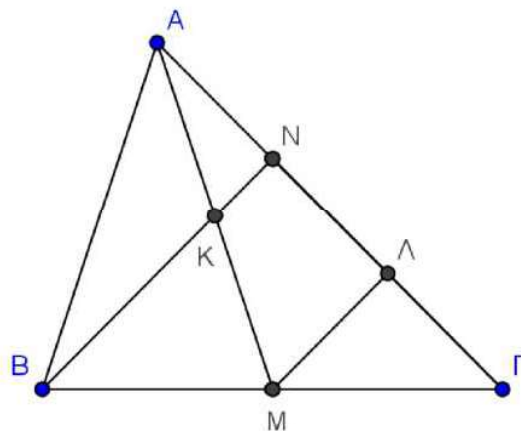
(Μονάδες 9)

β) $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$

(Μονάδες 9)

γ) $BK = 3KN$

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3945)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{MA\Gamma} = \widehat{AM\Gamma}$

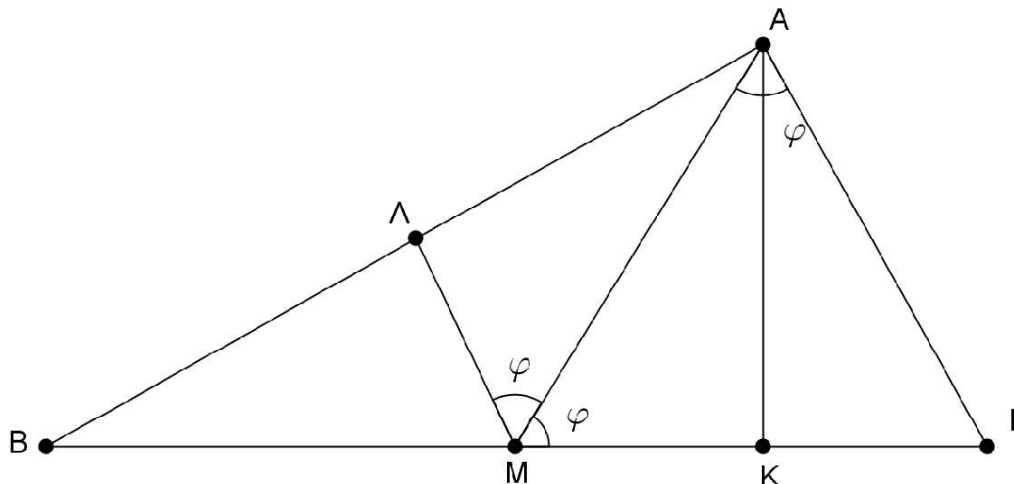
β) $MA = MK$

Μονάδες 7

Μονάδες 9

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{LAK}$

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3948)**

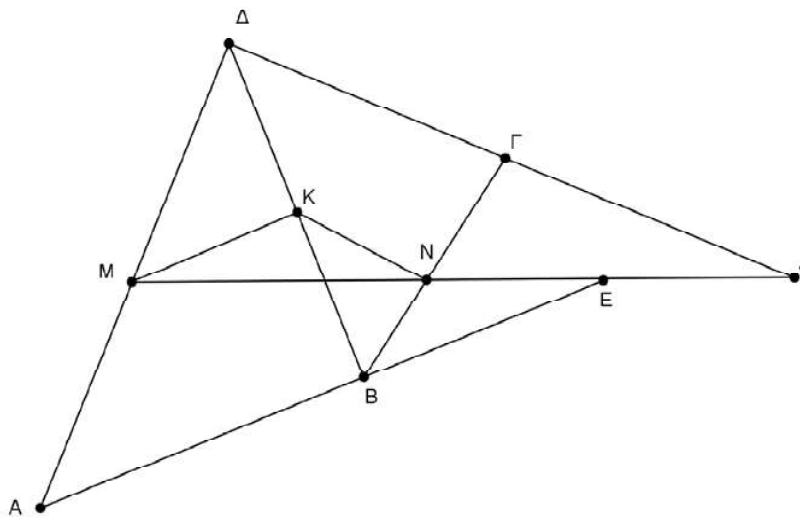
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $AD, B\Gamma, BA$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$

Μονάδες 13

β) $\widehat{MEA} = \widehat{MZ\Delta}$

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3954)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$.

Μονάδες 10

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

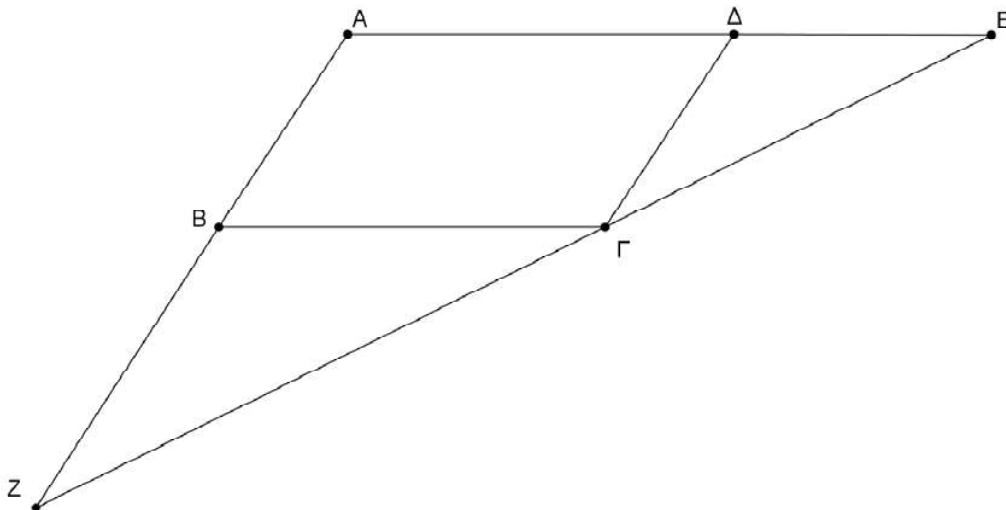
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. «Έχουμε: $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE και

$\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$). Όμως $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Gamma E$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Gamma Z} = 180^\circ$.

Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3994)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Delta = \Lambda E$

Μονάδες 6

β) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.

Μονάδες 9

γ) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ (4_4555)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το GA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A).

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

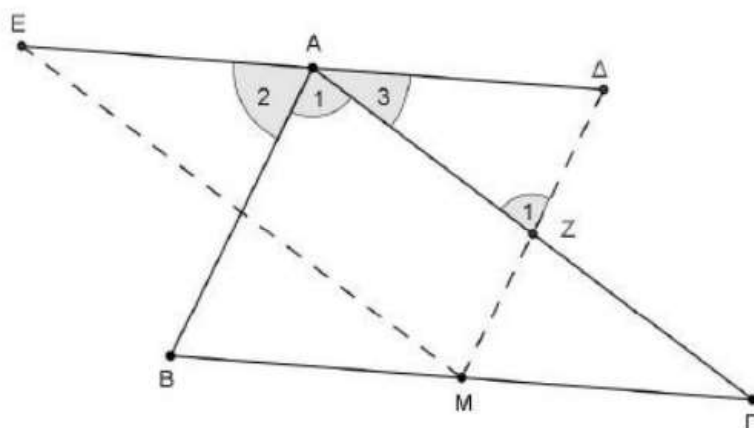
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από AZ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από ΔE)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ , E , A συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4559)**

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (η) , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ .

Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $B\Delta A$ είναι ορθή

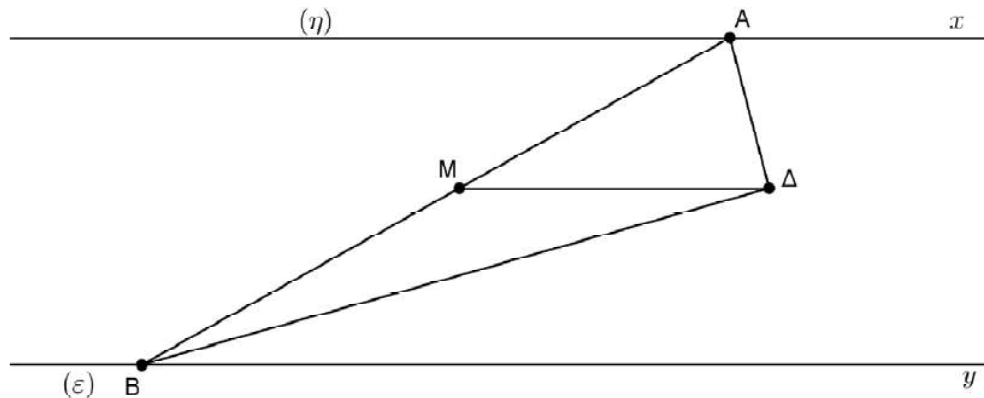
Μονάδες 9

β) $\widehat{BM\Delta} = 2\widehat{M\Delta A}$

Μονάδες 8

γ) $M\Delta // \varepsilon$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4562)**

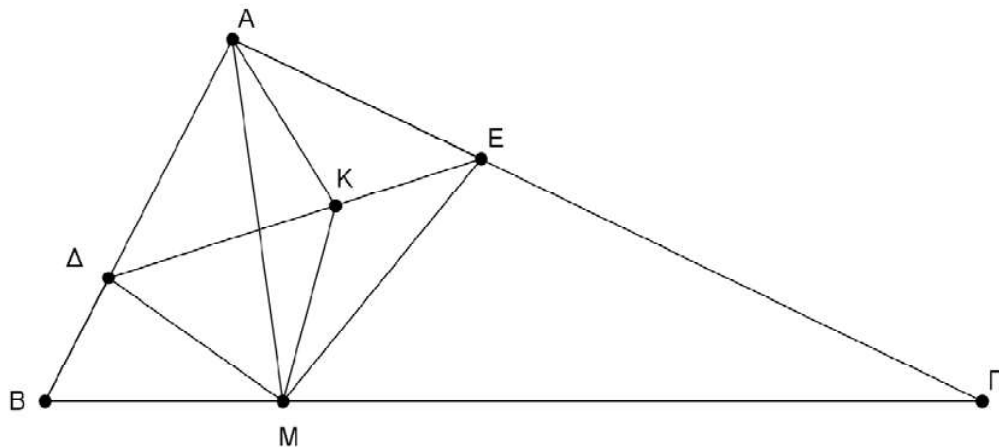
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.

Μονάδες 12

β) Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Μονάδες 13

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4565)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην $A\Gamma$.

Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$

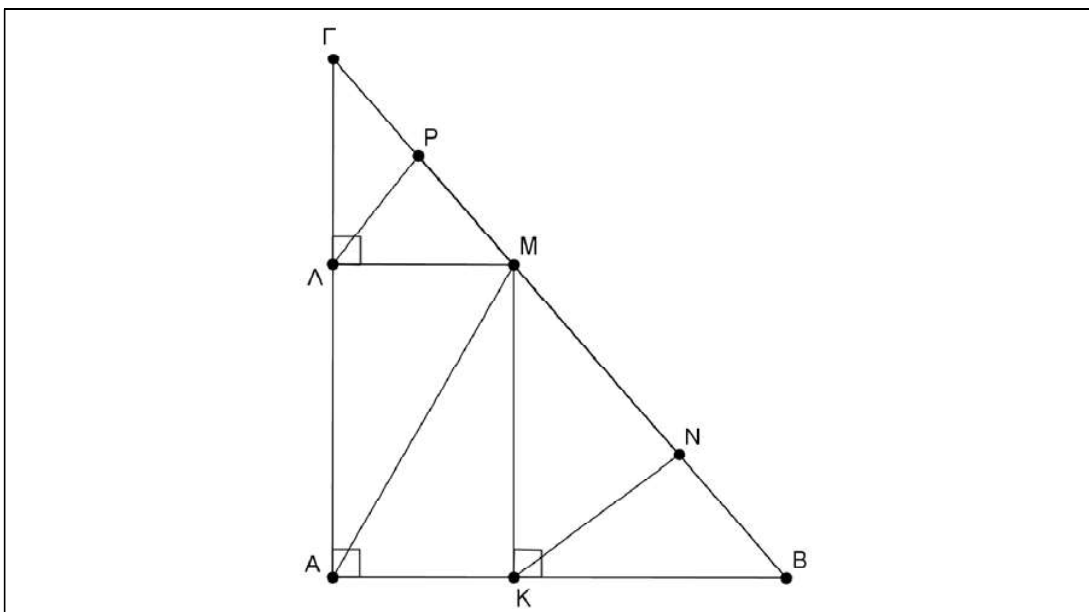
Μονάδες 7

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA

Μονάδες 9

γ) $AM = KN + LP$

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4567)**

Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MBΓ$. Αν η προέκταση της AM τέμνει τη BD στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Delta A E} = 15^\circ$

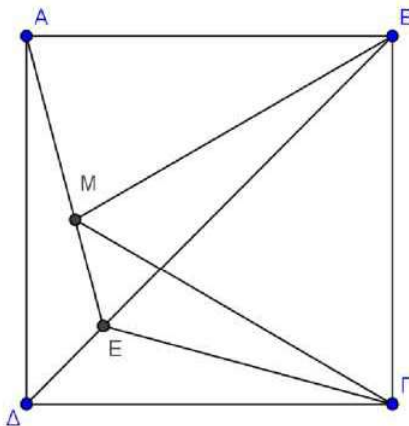
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E Γ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η $Γ E$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta Γ M$

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4569)**

Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$ και $AB = AΔ + BΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AΔM$ είναι ισοσκελές.

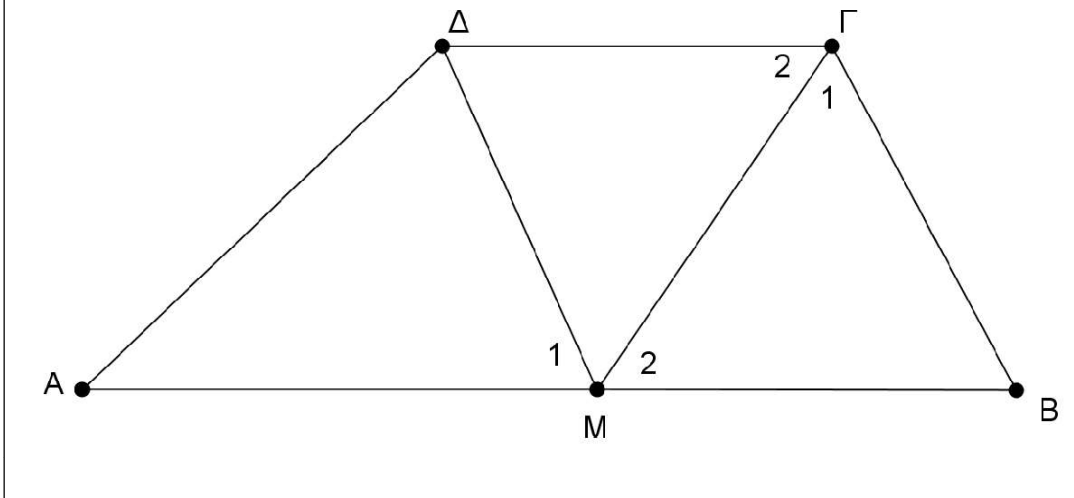
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $MBΓ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4571)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$.

Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B .

(Μονάδες 4)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Z\Gamma E}$

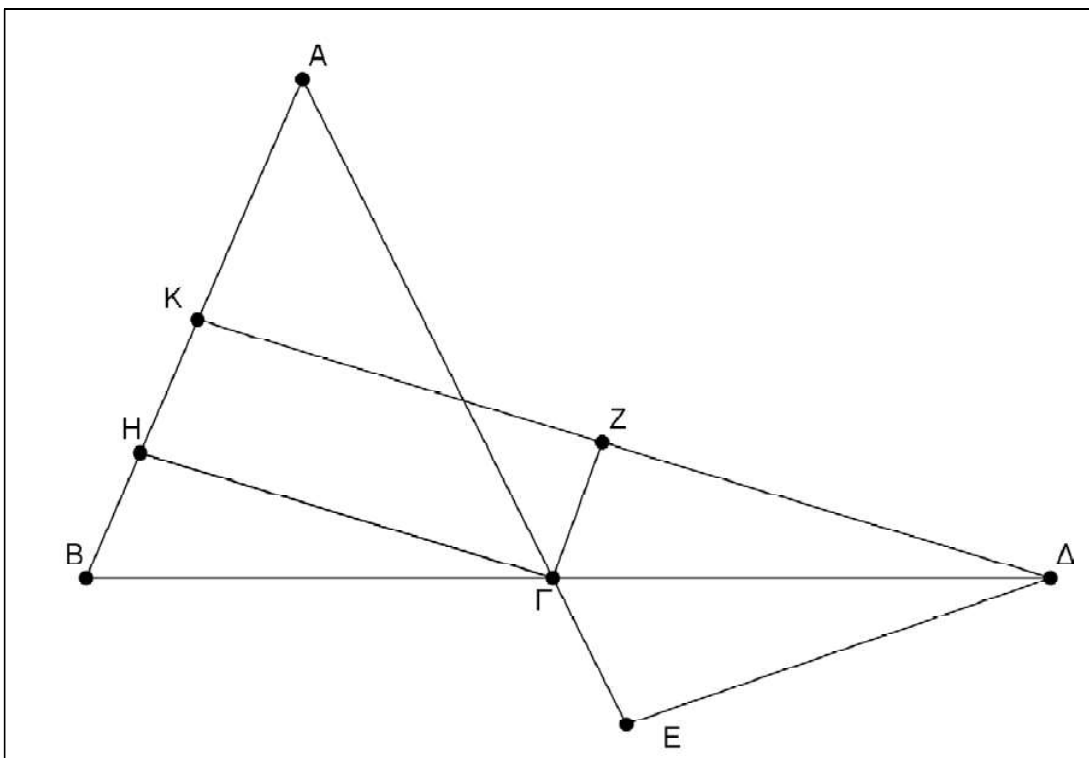
(Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4579)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με AD και AE αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A (D, E σημεία της ευθείας $B\Gamma$).

Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AZBH$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

β) Η γωνία $\widehat{HZA}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{ZAG}$.

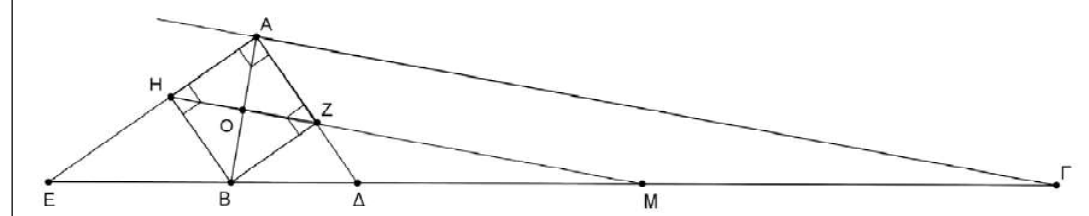
Μονάδες 6

γ) Η ευθεία HZ διέρχεται από το M .

Μονάδες 6

$$\delta) \text{ MH} = \frac{\text{AB} + \text{A}\Gamma}{2}$$

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_4583)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ε) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.

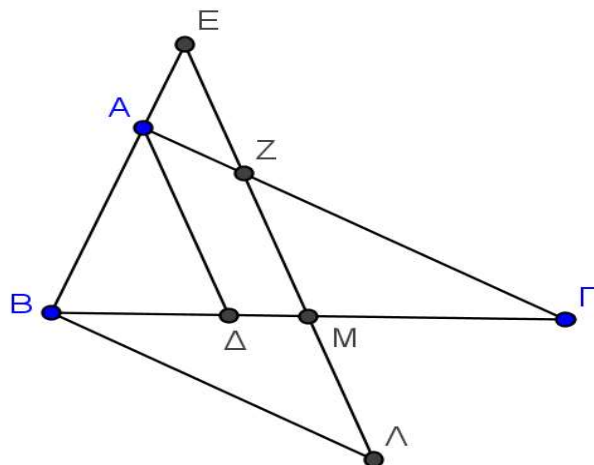
(Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$.

(Μονάδες 9)

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4593)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοι του $A\Delta$, BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

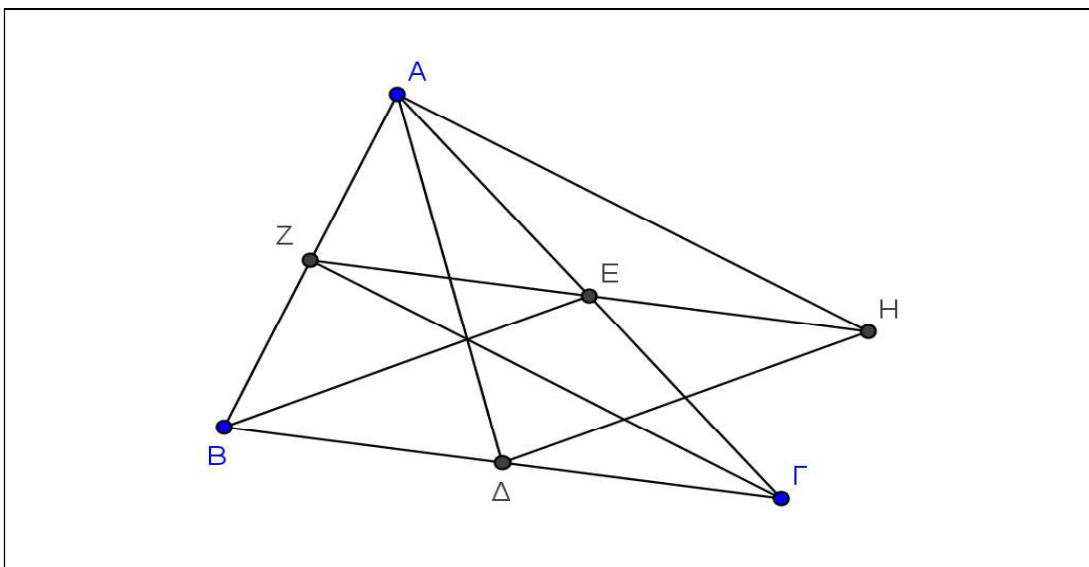
(Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4599)**

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A = \Delta = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Delta$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2 \Delta Z$.

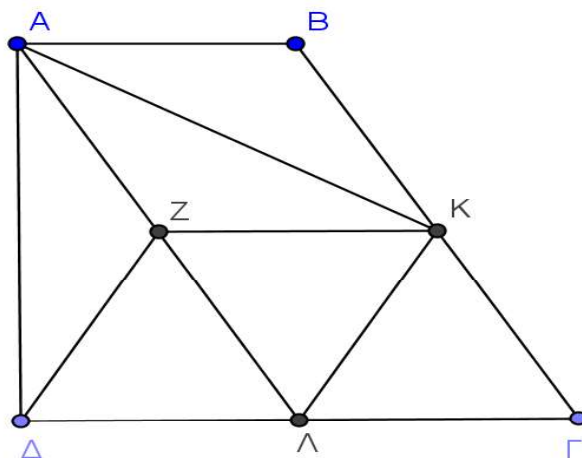
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) $\angle AK\Lambda = 90^\circ$

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4603)**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και $A\eta$ τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle A\hat{H} = 90^\circ$

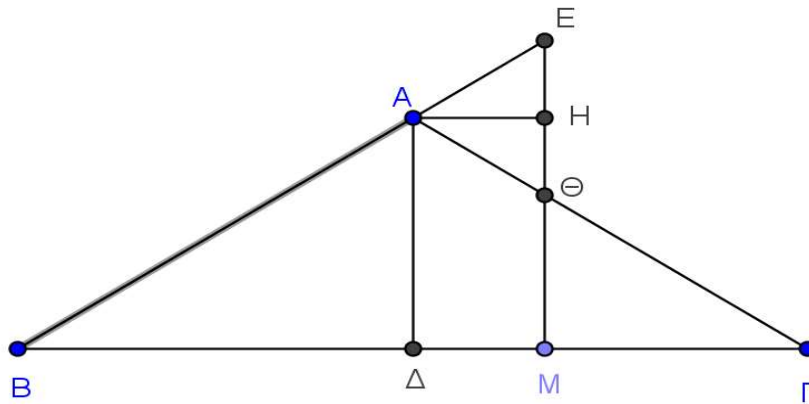
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $MO + ME = 2AA$.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4606)**

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στη σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη AA και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

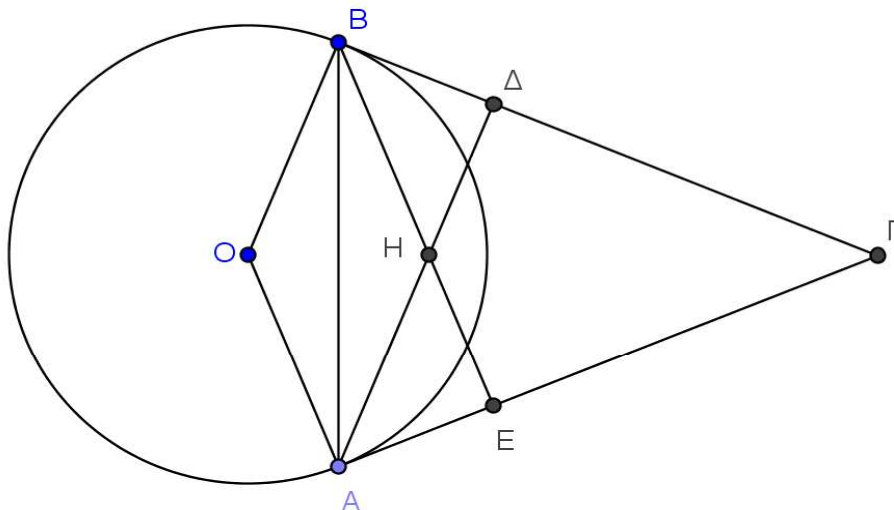
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4611)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της GB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $GE = \Gamma A$.

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα,

να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

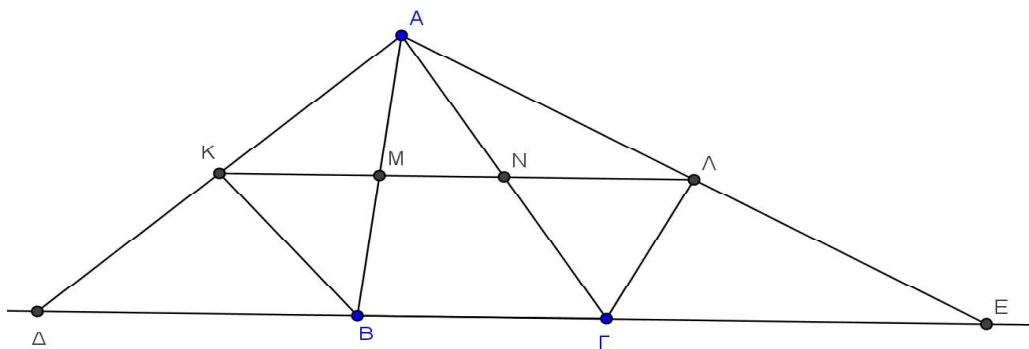
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 9)

$$\gamma) K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$$

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4614)

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta N$ και ABZ είναι ίσα.

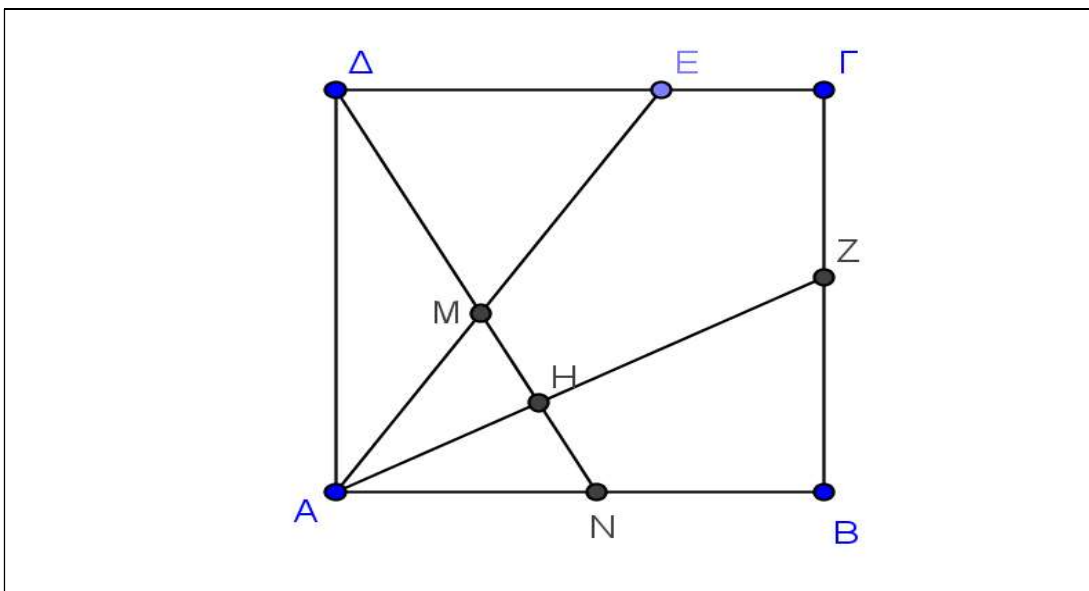
(Μονάδες 8)

β) $AM = AN$ και $\Delta E = EM$.

(Μονάδες 10)

γ) $AE = \Delta E + BZ$

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4616)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην AM στο σημείο της M , η οποία τέμνει την ευθεία $A\Delta$ στο σημείο P και την $B\Gamma$ στο Σ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta P = \Sigma\Gamma$.

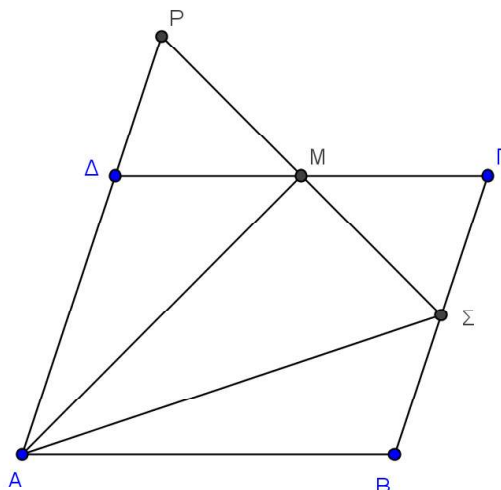
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $AP\Sigma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $A\Sigma = A\Delta + \Gamma\Sigma$.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4619)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διάμεσου BA . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ABZΔ είναι παραλληλόγραμμο.

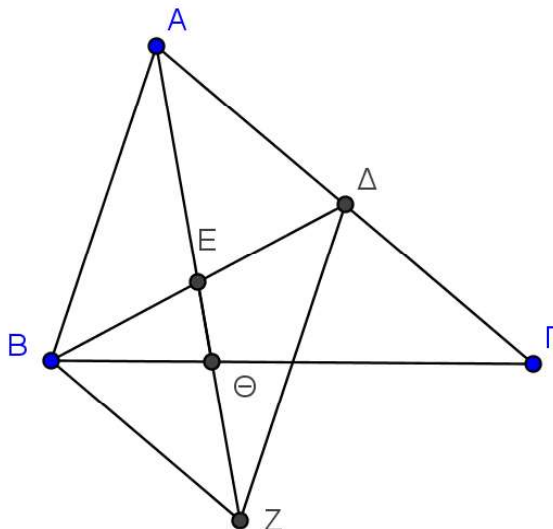
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4626)

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB = 2 \cdot BΓ$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και θ ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.

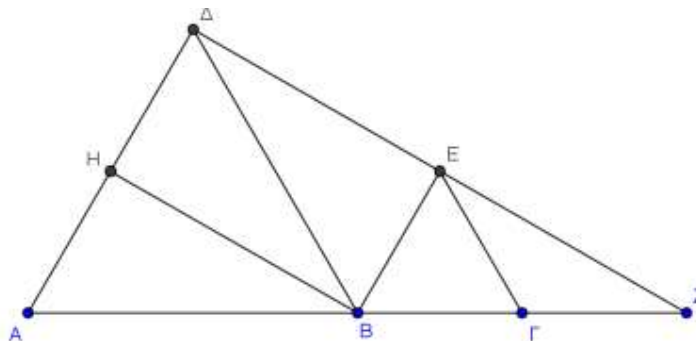
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4630)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH = HE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές.

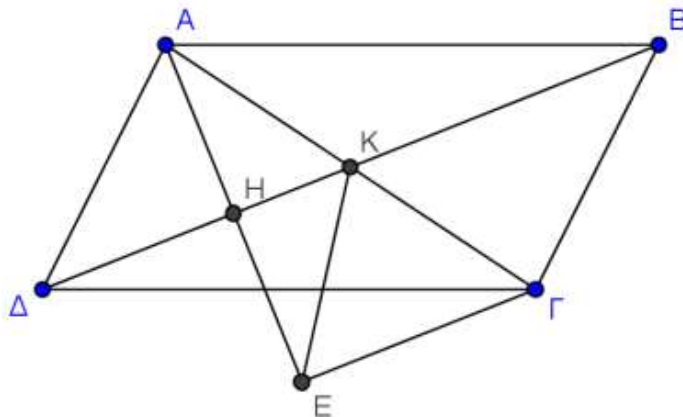
(Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4635)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και γωνία $B = 2\Gamma$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

(Μονάδες 9)

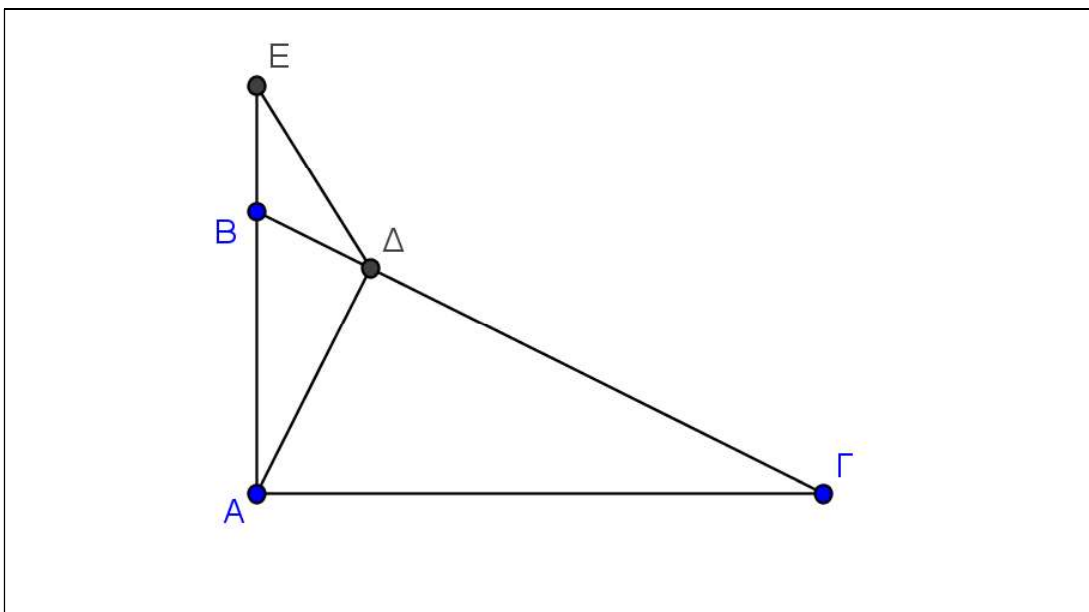
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

(Μονάδες 8)

ii. $AE = \Gamma\Delta$

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4640)**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του AB, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ABΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$\Delta Z = \frac{AB}{2} \text{ και } EH = \frac{BG}{2} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.

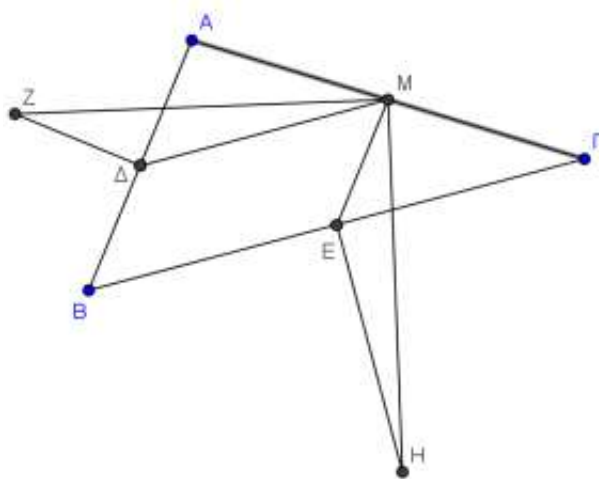
(Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία Α=90°.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4643)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο

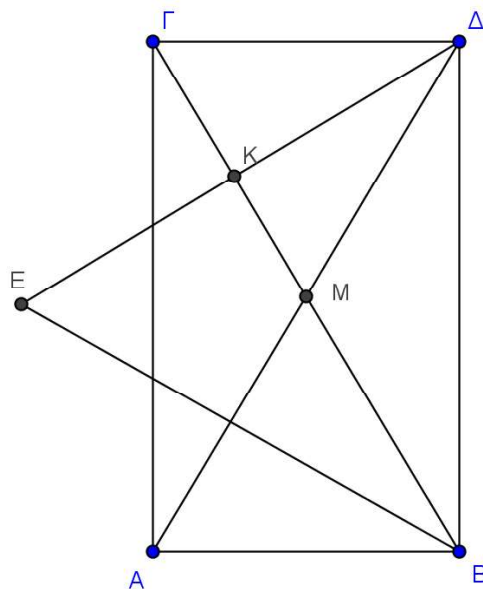
(Μονάδες 8)

β) $\angle KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$

(Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = BA$

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4645)**

Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $AD=BG$, $AG=BD$ και $AB < \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΔOG είναι ισοσκελή.

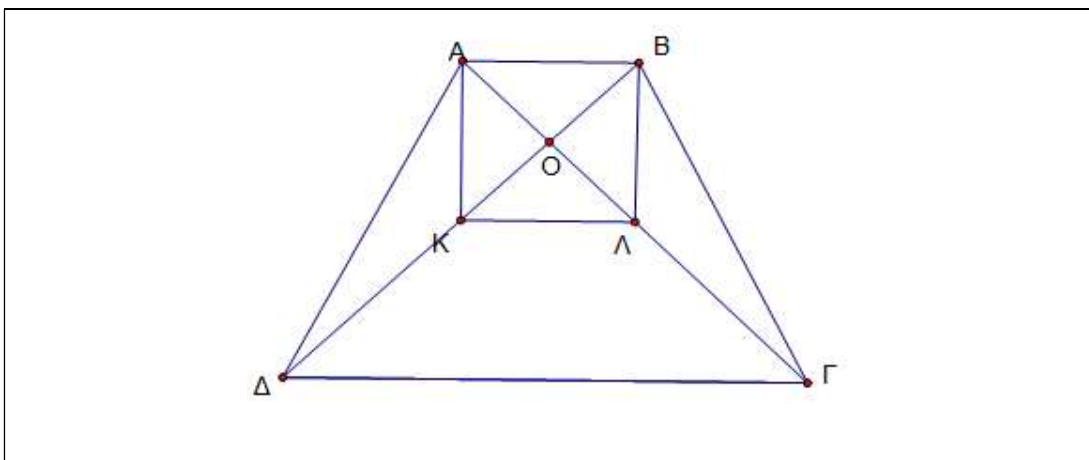
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\Gamma\Delta = 3AB$ και K, Λ τα μέσα των διαγώνιων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4646)**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $\Gamma = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την AG στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η BE είναι διχοτόμος της B .

(Μονάδες 6)

ii) $AE = \frac{\Gamma E}{2}$

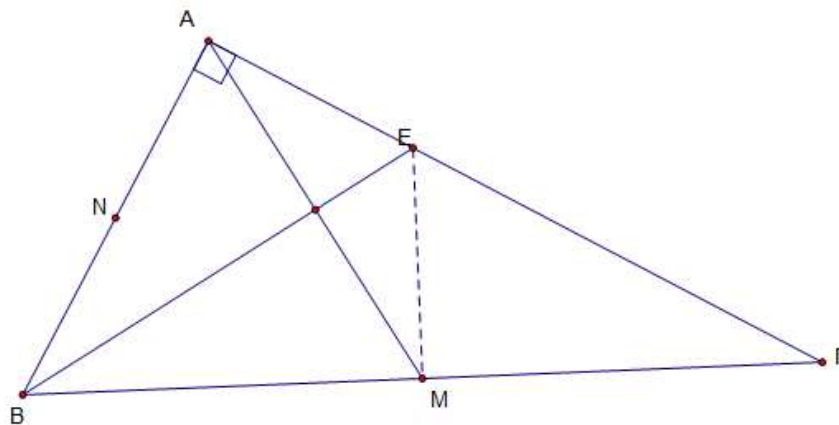
(Μονάδες 6)

iii) η BE είναι μεσοκάθετος της διάμεσου AM .

(Μονάδες 7)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4648)**

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA , PB και τη διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των PA και PB στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta AP = \Delta AP$

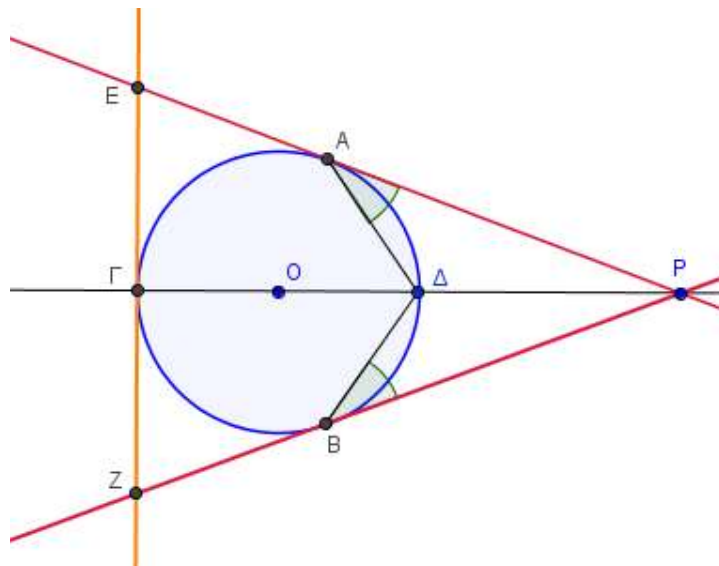
(Μονάδες 8)

β) $EA = ZB$

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ABZE είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_469)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < BG$ και η διχοτόμος ΒΕ της $\angle B$. Αν $AZ \perp BE$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

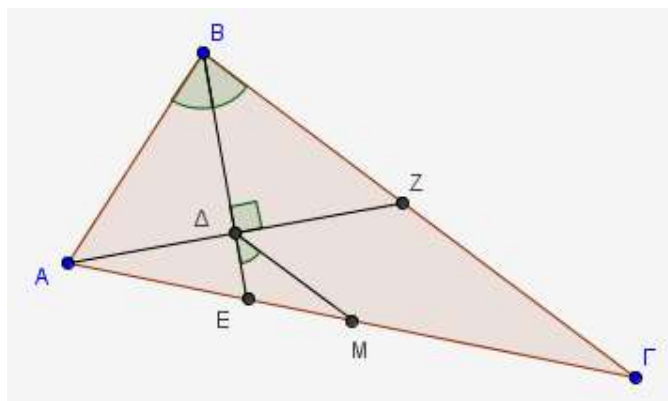
(Μονάδες 7)

β) $\Delta M // BG$ και $\Delta M = \frac{BG - AB}{2}$

(Μονάδες 10)

γ) $\angle EAM = \frac{B}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4650)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος Bx της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

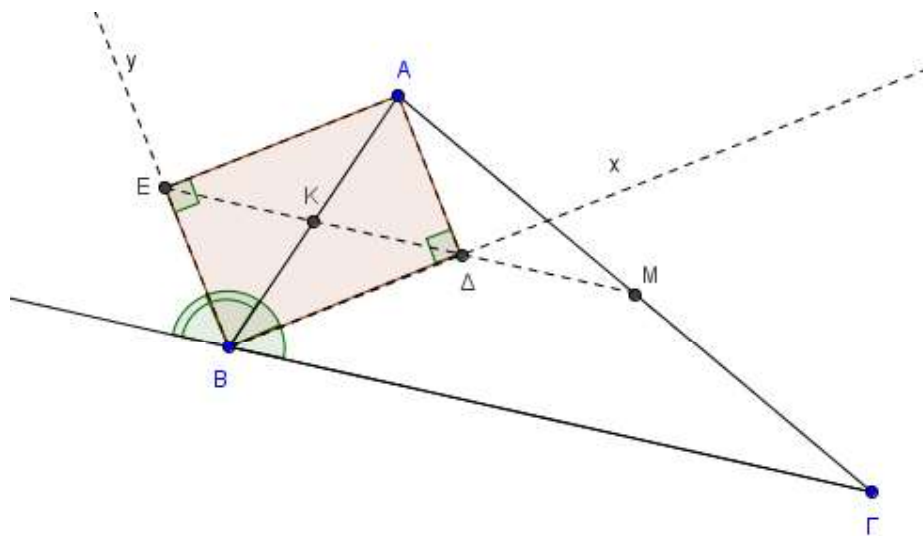
β) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και θ διάμεσος του είναι ίση με $\frac{3a}{4}$,

όπου $a=B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4651)**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE=\Gamma H$ και $BZ=\Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.

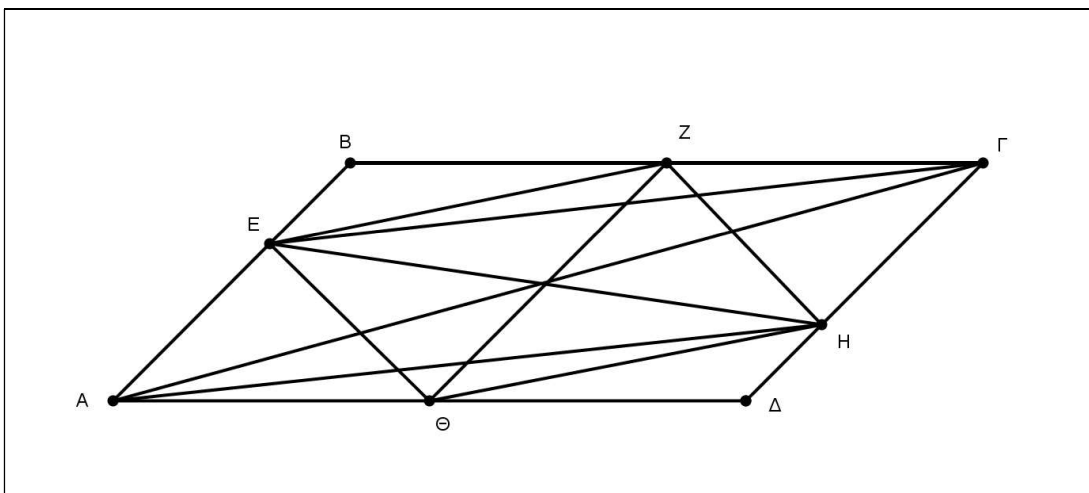
(Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

γ) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4652)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK=K\Lambda=\Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

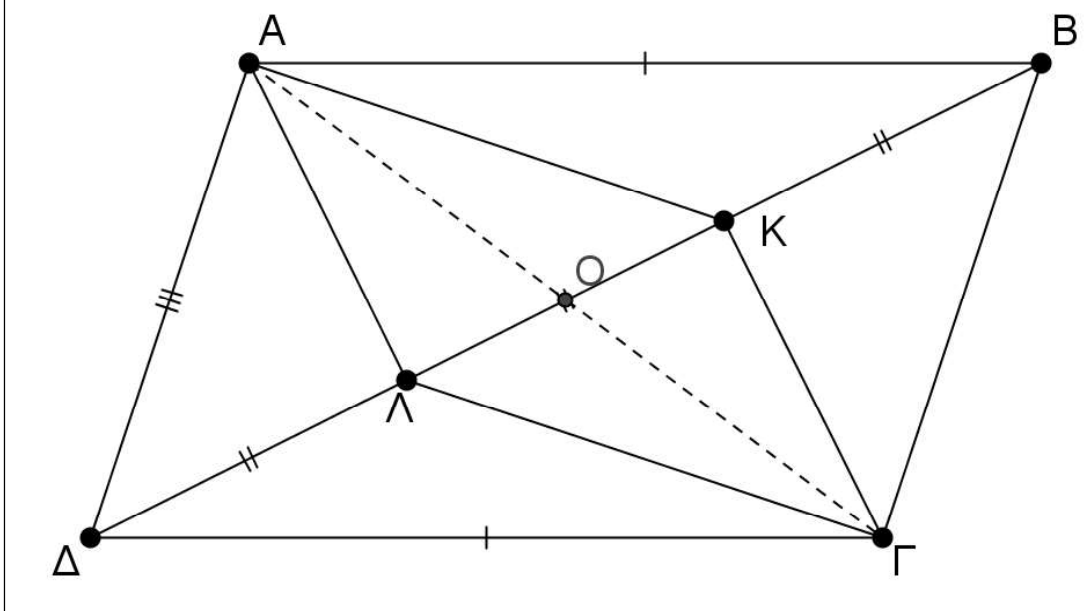
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

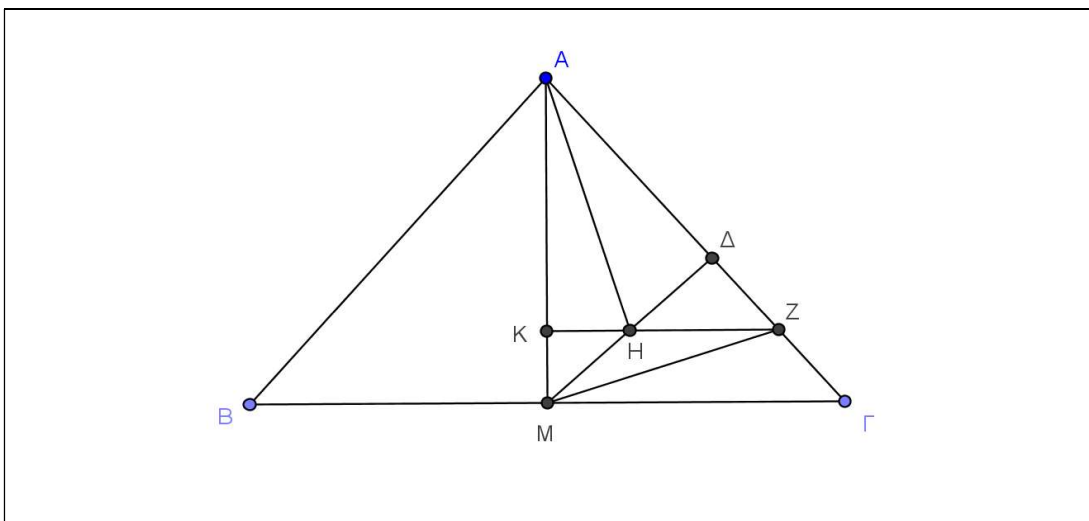
(Μονάδες 8)

γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4653)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων AG και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Εάν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4735)**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD=AG$. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔH παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $E\Delta$ και AG είναι παράλληλα.

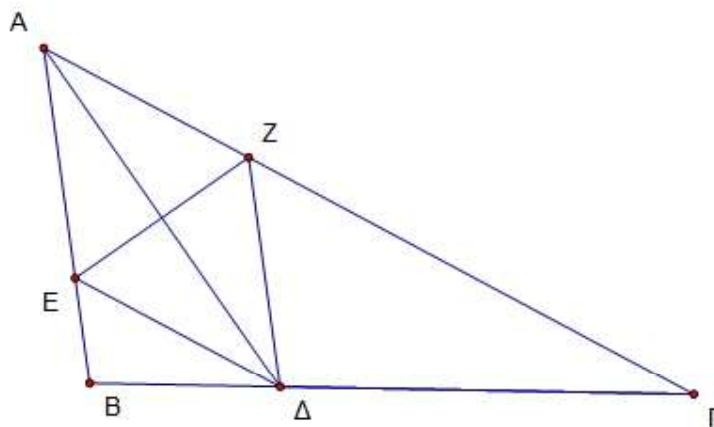
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα AD και EH διχοτομούνται.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4737)**

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AD και GE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και $ΘH$ κάθετο στο ύψος AD . Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH=2EZ$.

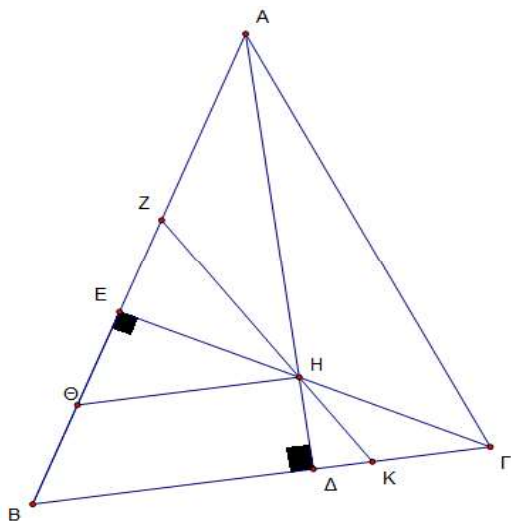
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4753)

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\angle BAG = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με $OA=2OB$.

Μονάδες 6

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο.

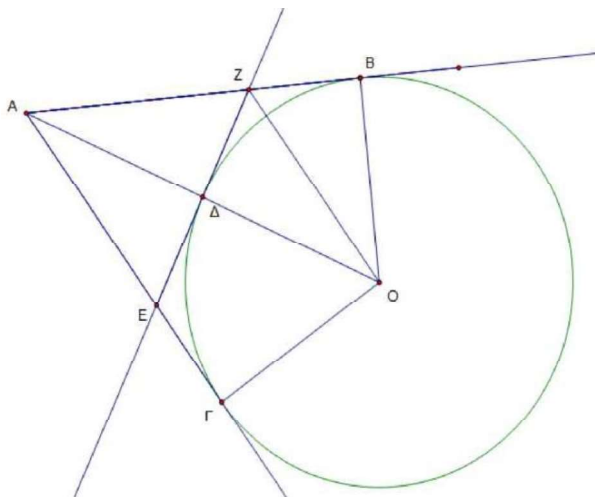
Μονάδες 6

$\gamma) 2ZB = AZ$

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο EZBΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 6



ΑΣΚΗΣΗ (4_4756)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $ΑΓ$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $ΑΔ = ΒΓ$.

Έστω $Κ$ και $Λ$ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $ΑΒ$ και $ΔΓ$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

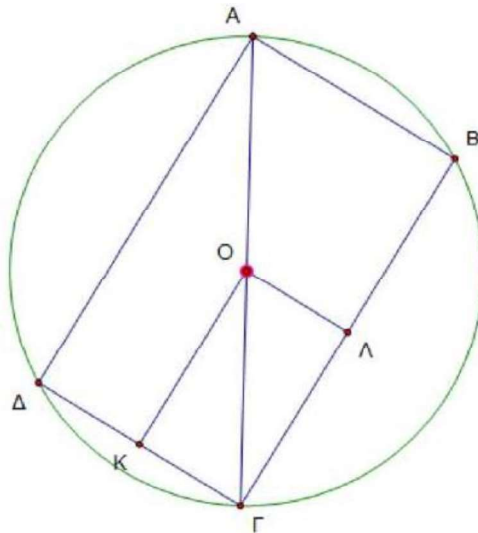
Μονάδες 6

γ) Η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4762)**

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $ΕΖΗΘ$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο $Α$ της μεσοκαθέτου του τμήματος $ΕΖ$ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους του μπιλιάρδου $ΕΘ$, $ΘΗ$, $ΗΖ$ στα σημεία $Β$, $Γ$ και $Δ$ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης $Α$. Για τη διαδρομή $Α \rightarrow Β \rightarrow Γ \rightarrow Δ \rightarrow Α$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία $ΑΒΕ$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $ΘΒΓ$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ είναι ίσα.

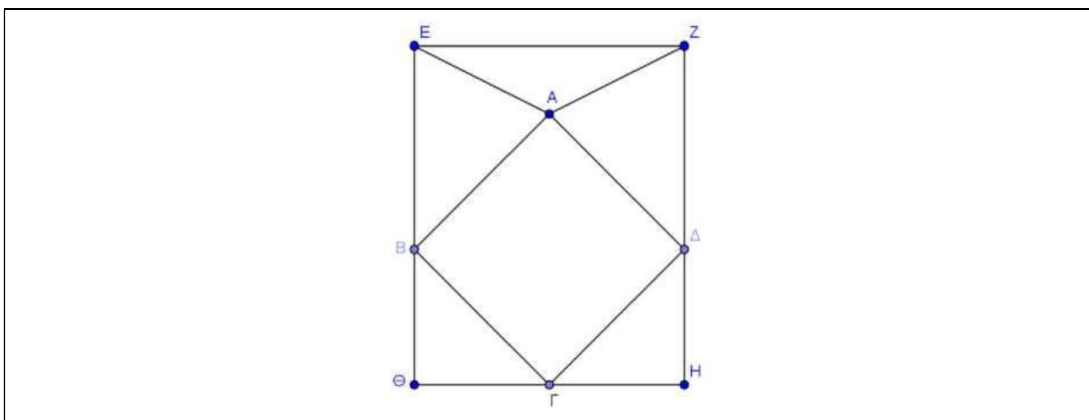
Μονάδες 9

ii. Η διαδρομή $ΑΒΓΔΑ$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

Μονάδες 8

β) Αν η $ΑΖ$ είναι διπλάσια από την απόσταση του $Α$ από τον τοίχο $ΕΖ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΕΖ$.

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4767)**

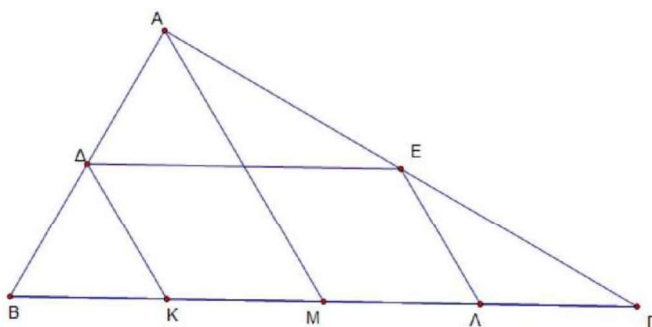
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 13

β) Η διάμεσος του τραπεζίου $K\Delta M\Lambda$ ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$

Μονάδες 12

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4769)**

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\angle B = 2\angle \Gamma$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 10

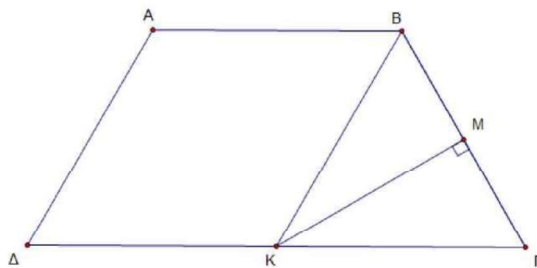
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 8

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Μονάδες 7



Σημείωση: Το δεδομένο της τελευταίας ισότητας $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ είναι περιττό (μπορούμε να το αποδείξουμε με τα άλλα δεδομένα).

ΑΣΚΗΣΗ (4_4771)

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και

ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

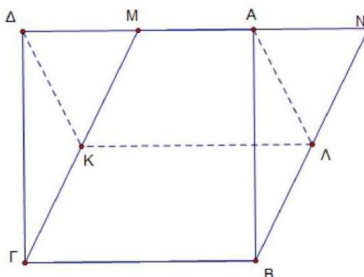
Μονάδες 8

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_4774)

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρω κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AZ = AH$

Μονάδες 4

β) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο

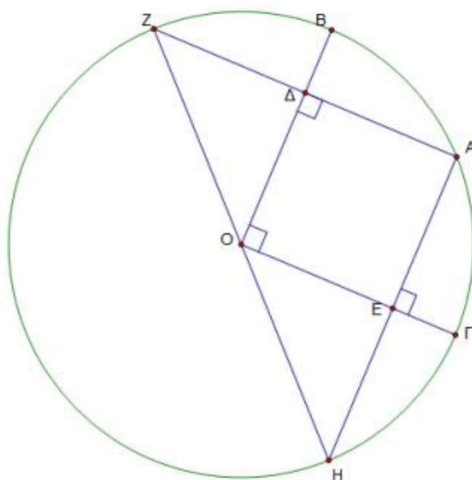
Μονάδες 7

γ) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4778)**

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στη προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BEZ είναι ορθή.

Μονάδες 8

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AGZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

Σημείωση: Η άσκηση είχε αφαιρεθεί και προστέθηκε. Στην νέα έκδοση δεν δίνεται το σχήμα.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4781)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

β) Η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$.

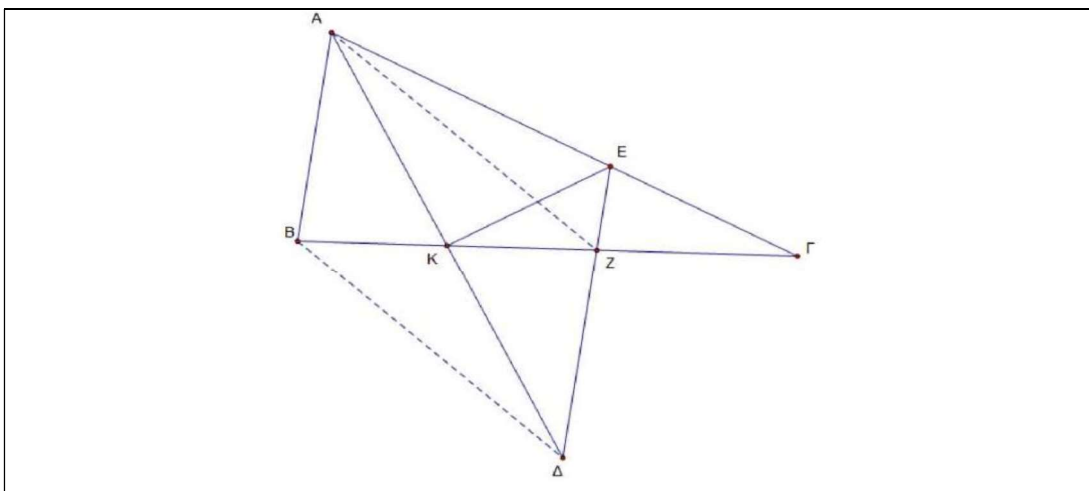
Μονάδες 6

γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.

Μονάδες 7

δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4783)**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = ΚΔ$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

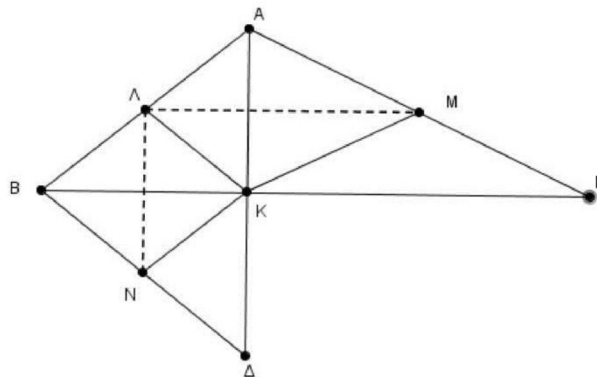
Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος

Μονάδες 9

γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4786)**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ₁, μ₂ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$

Μονάδες 5

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

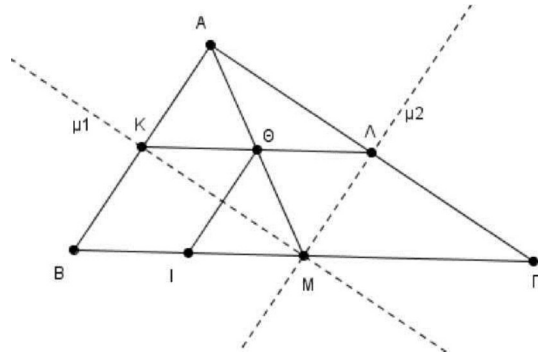
Μονάδες 7

iii. $\angle \Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ

Μονάδες 6

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4788)**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

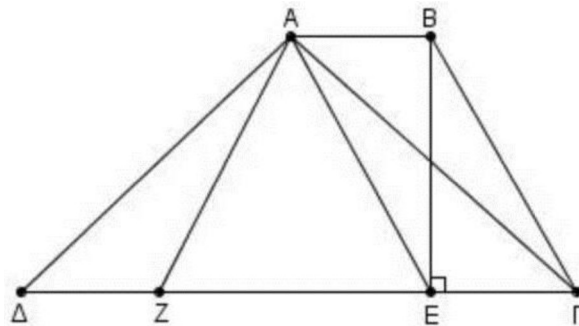
Μονάδες 8

β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 8

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4790)**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AA = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τα τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγώνιων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Μονάδες 5

β) $AE = BZ$

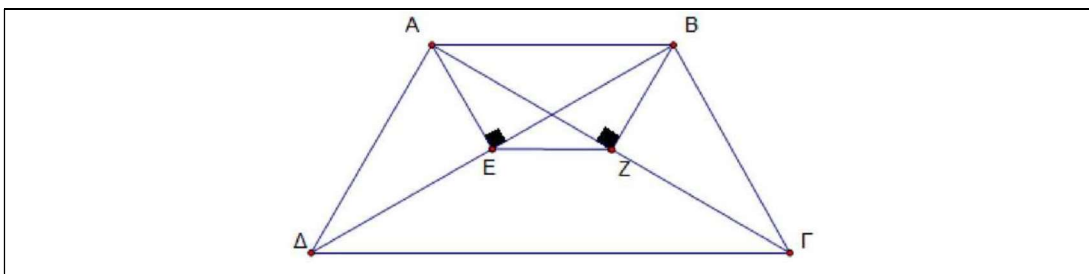
Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7

δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες 5

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4791)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

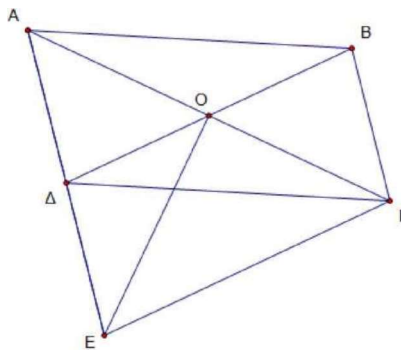
Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 9

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_4792)

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.

Μονάδες 7

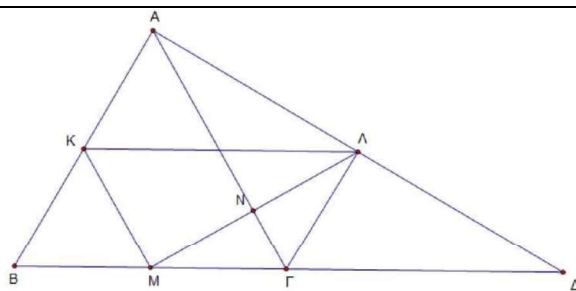
β) Να αποδείξετε ότι:

ι. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.

Μονάδες 8

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

**ΑΣΚΗΣΗ (4 4795)**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\Delta = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

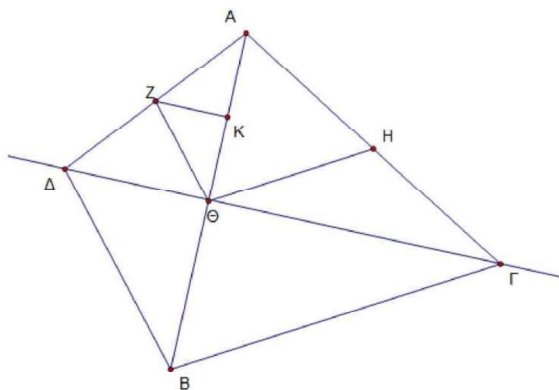
Μονάδες 8

β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.

Μονάδες 9

γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$

Μονάδες 8

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4796)**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η AG είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και AG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ME = MZ

Μονάδες 6

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ

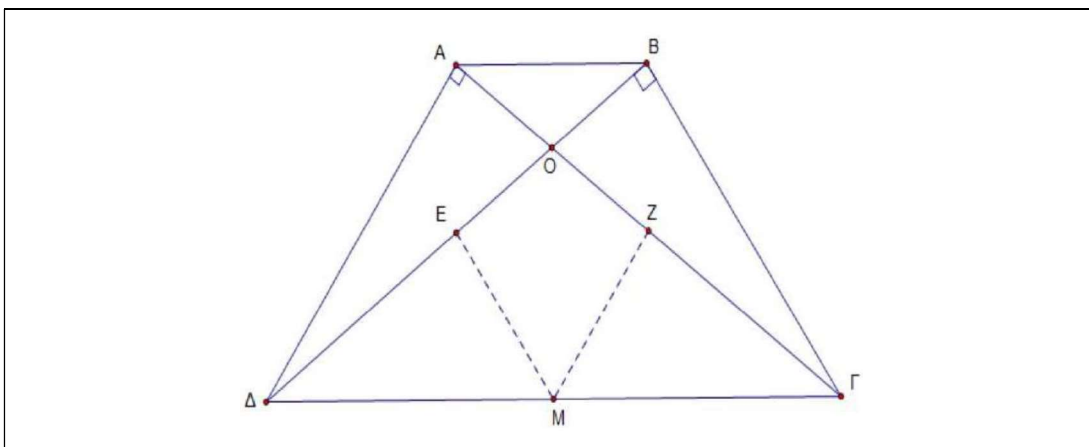
Μονάδες 6

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.

Μονάδες 7

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4 4797)**

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

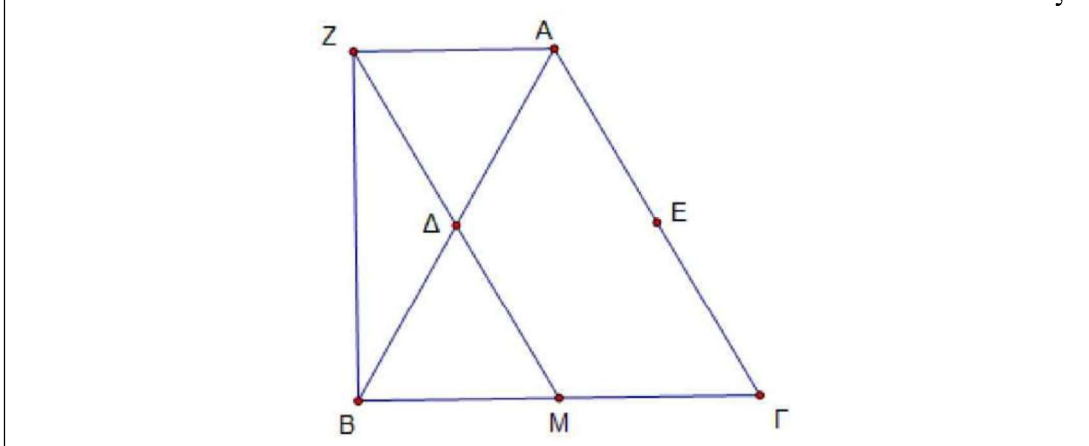
Μονάδες 6

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

Μονάδες 7

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4798)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και $A E$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta A E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι $AD = AE$

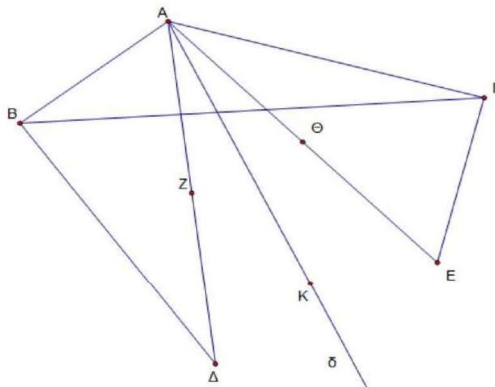
Μονάδες 9

β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD , να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .

Μονάδες 9

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_4801)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Αχ κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

β) $\Delta\Gamma = 2Β\Delta$

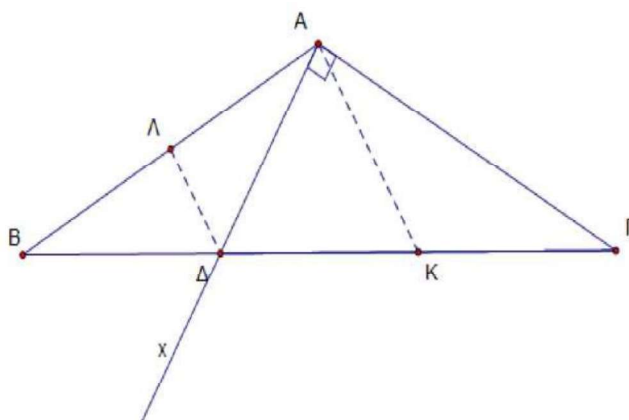
Μονάδες 8

γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$

Μονάδες 5

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$

Μονάδες 4



ΑΣΚΗΣΗ (4_4802)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.

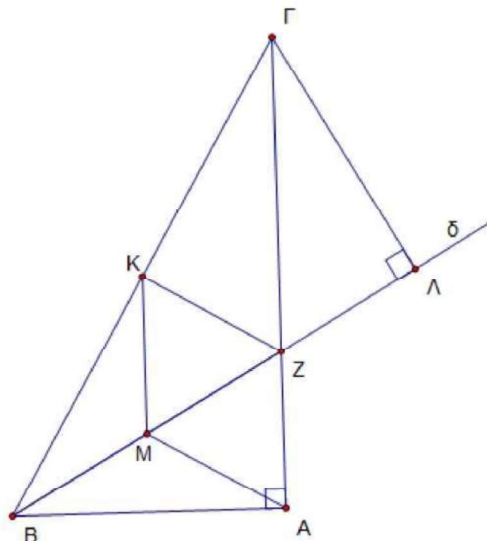
Μονάδες 6

$$\gamma) \Gamma Z = 2ZA$$

Μονάδες 7

$$\delta) \mathbf{B}\Lambda = \mathbf{A}\Gamma$$

Μονάδες 6

**ΑΣΚΗΣΗ (4 4803)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε $ΑΜ=ΑΒ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $ΚΔ=ΑΚ$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΕ=ΑΜ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta \kappa$ και $\Delta E = 2KM$

Μονάδες 7

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

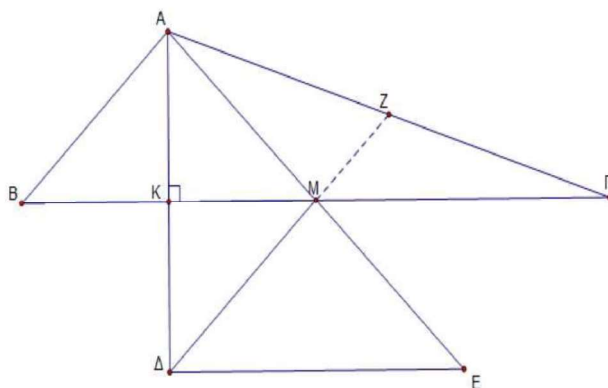
Μονάδες 6

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 6

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ.

Μονάδες 6



ΑΣΚΗΣΗ (4_4804)

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $ΚΛ = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $ΚΛ$. Φέρουμε τις χορδές $AB = AG = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AG αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $ΚΛ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι 120°

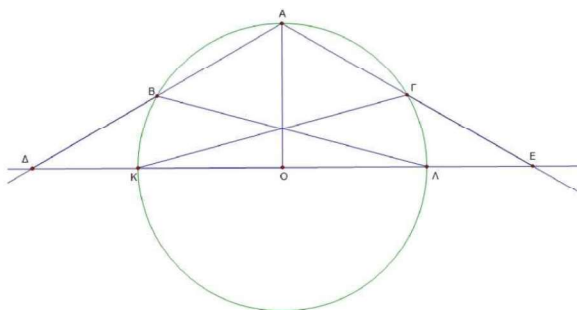
Μονάδες 7

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Μονάδες 9

γ) $K\Gamma = AB$.

Μονάδες 9



Προσοχή: Οι επίσημες εκφωνήσεις έχουν $A\Gamma$, αντί του σωστού που είναι $A\Gamma$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4808)

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $AB\Delta$ ($BA=BD$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ED=EG$

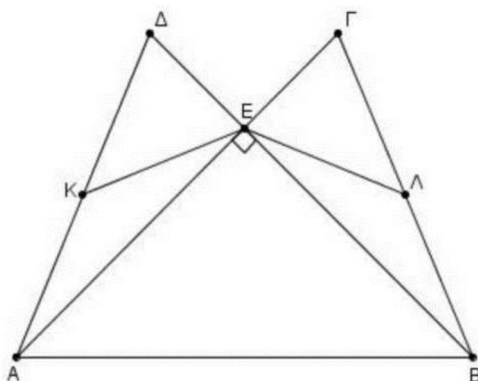
Μονάδες 7

β) $\Delta\Gamma \parallel AB$

Μονάδες 8

γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ (4_4810)

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο AG στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $ΟΓ$ και BZ διχοτομούνται.

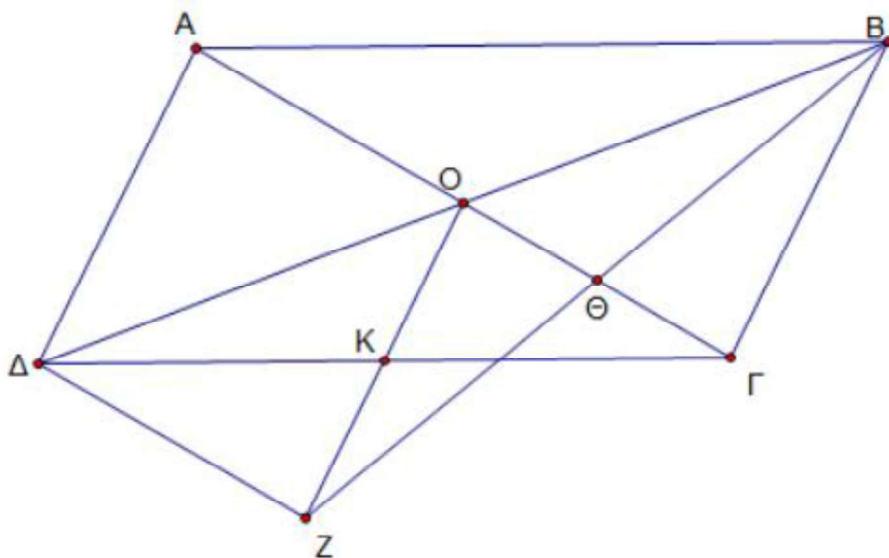
(Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$.

(Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4812)**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ)

κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

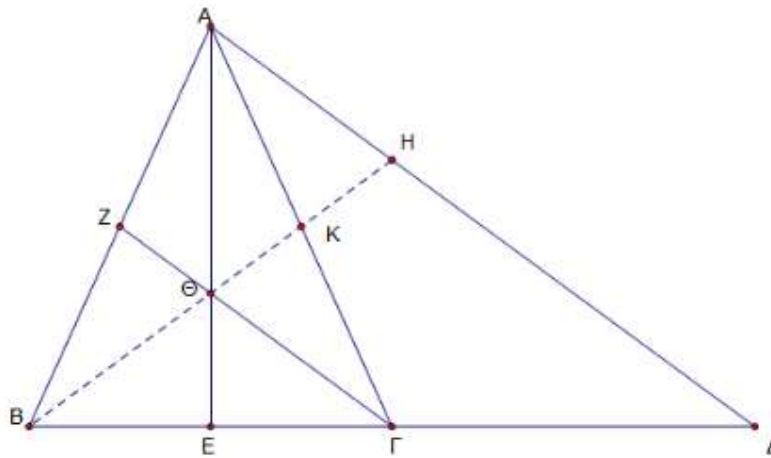
(Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) $AH = 2Z\Theta$.

(Μονάδες 7)



Σχόλιο: η προσθήκη της παρένθεσης (προς το Γ) είναι περιττή, σύμφωνα με και με το σχόλιο του σχολικού βιβλίου στο 2^ο κεφάλαιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4814)

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

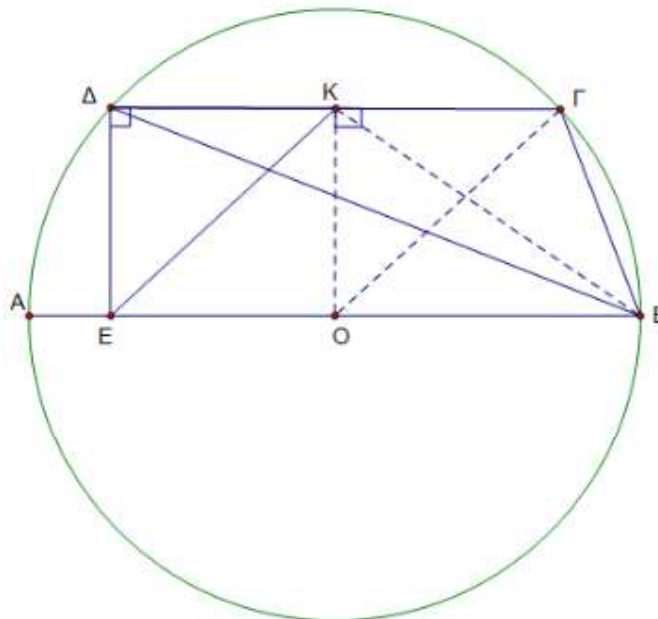
(Μονάδες 8)

$$\beta) \Delta_{EK} = \frac{\Delta_{OK}}{2}$$

(Μονάδες 12)

$$\gamma) \text{ KE} < \text{KB}.$$

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4816)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και Δ, E και N τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και DE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta K\Lambda = 2B$ και $E\Lambda K = 2\Gamma$

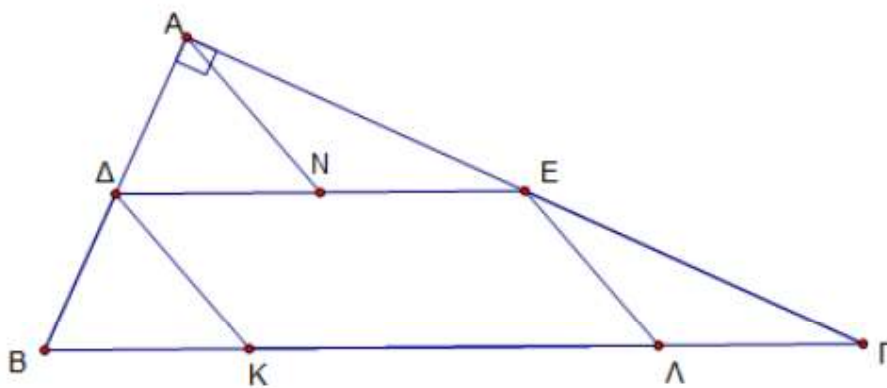
(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4818)**

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), AD το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της MD τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B = E$.

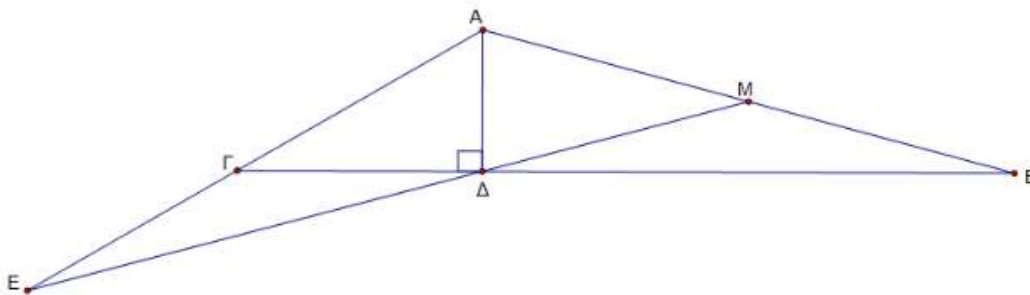
(Μονάδες 8)

β) $\Gamma = 2B = AM\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) $\Gamma E < A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (4_4821)

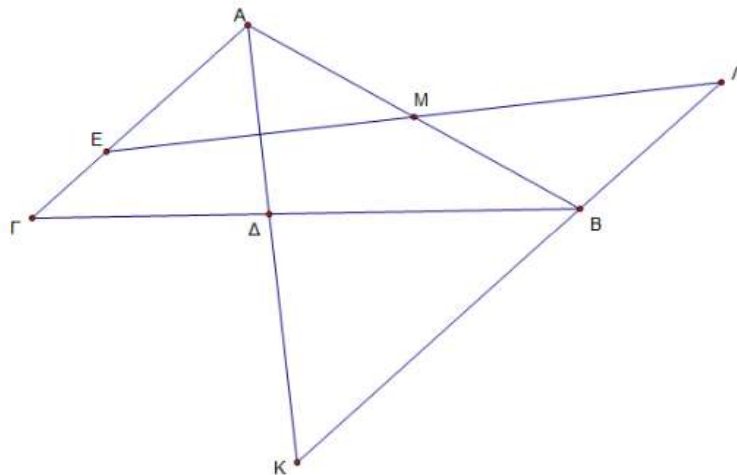
Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, AD η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην AD τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AD στο K και την προέκταση της EM στο Λ .
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEM , MBA και ABK είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4832)**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ABK = A\Gamma K$

(Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ZKE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο $Z\epsilon\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής στο (αι.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ABK$ και $\triangle A\Gamma K$ έχουν:

1. $BK = K\Gamma$

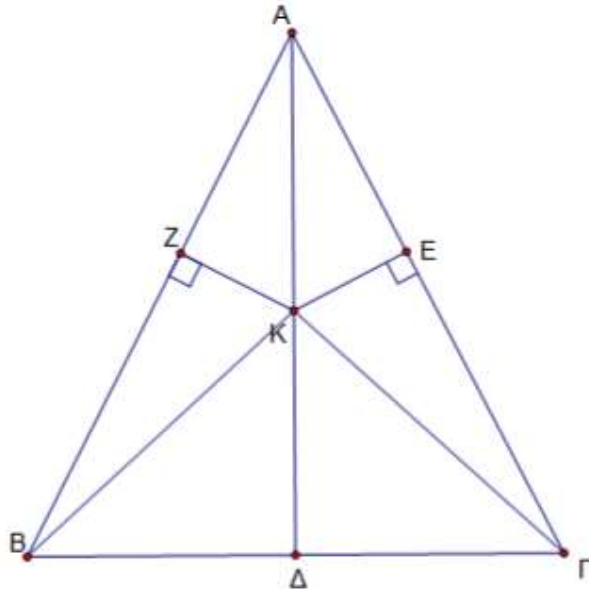
2. $BAK = \Gamma AK$ επειδή AK διχοτόμος της A

3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

(Μονάδες 6)



ΑΣΚΗΣΗ (4_5886)

[Κεφάλαιο 5^ο ή 6^ο (ανάλογα με την λύση)]

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες .

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ (4_5898)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

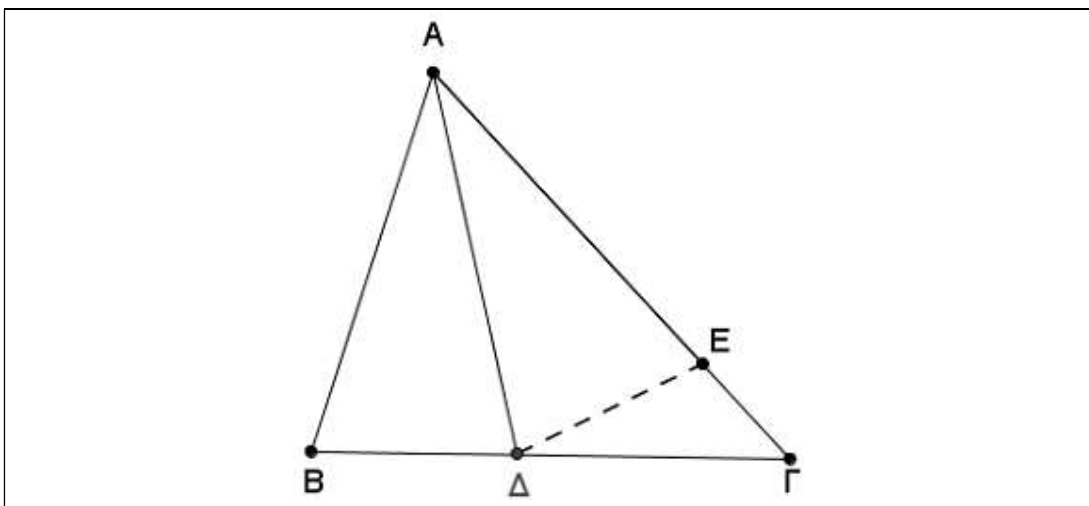
(Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_5902)**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

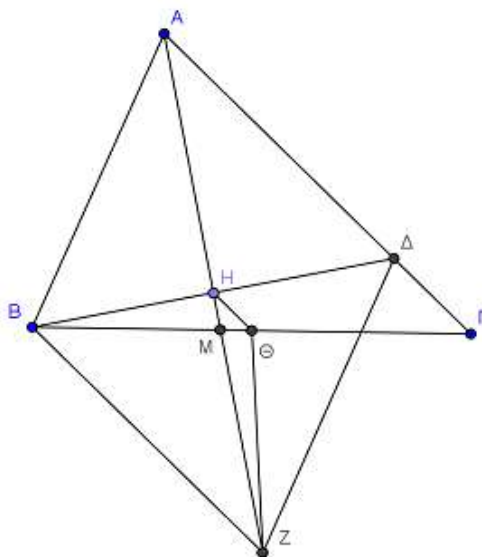
(Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο $HBZ\Theta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου $HBZ\Theta$ είναι ίση με $\frac{AB + A\Gamma}{4}$.

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_5908)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P , E στην $\Delta\Gamma$ και Σ , T στην AB) τέμνονται στα σημεία K ,

Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

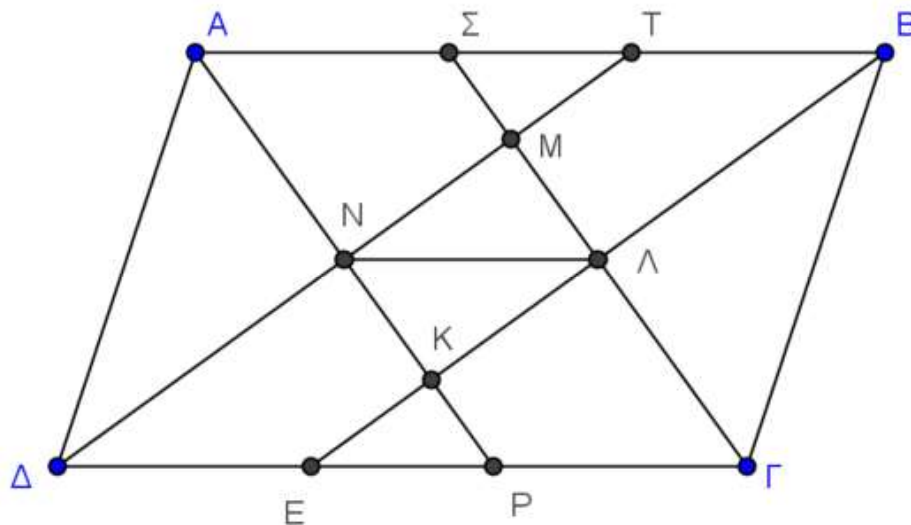
(Μονάδες 8)

γ) $AN \parallel AB$

(Μονάδες 5)

δ) $AN = AB - AL$

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (4_5911)

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $AB > BG$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογώνιου.

(Μονάδες 8)

ii. $AM = \frac{1}{4} AG$

(Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ (4_6876)

Δίνεται τρίγωνο ΑΓΒ ($AG = GB$). Φέρουμε τα ύψη ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ (4_7433)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Έστω E , Z και H είναι τα μέσα των BD , AD και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο $DEZH$ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $DEZH$.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ (4_13527)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η *αντίστροφή της* ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ (4_2806)

Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AB\Gamma} = 90^\circ$

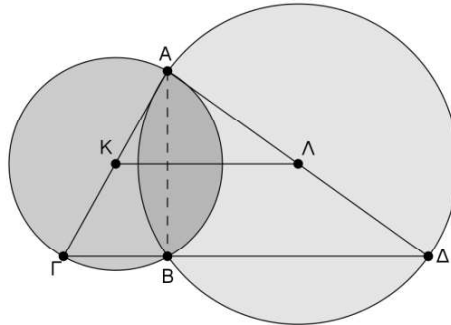
(Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_2810)**

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

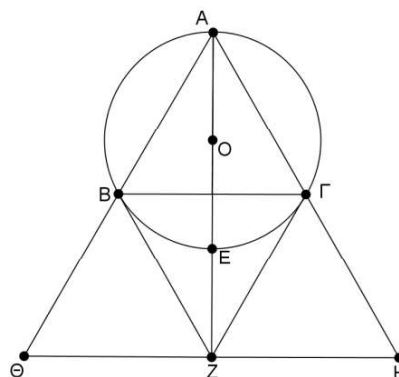
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma ZB$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο, με $B\Theta = BZ$ και $\Theta H = 2B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_3714)**

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

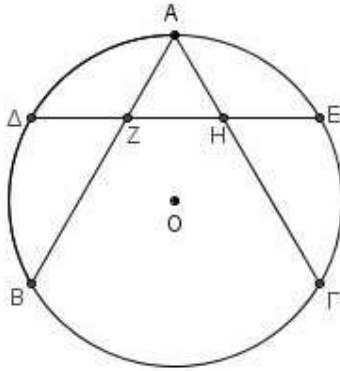
Μονάδες 8

β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

Μονάδες 10

γ) Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και $A\Gamma$.

Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ (4_3731)

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του. Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

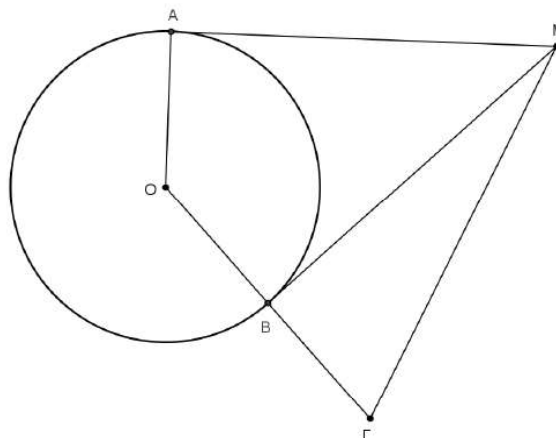
Μονάδες 7

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι $BA \parallel M\Gamma$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3771)

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και BA , οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

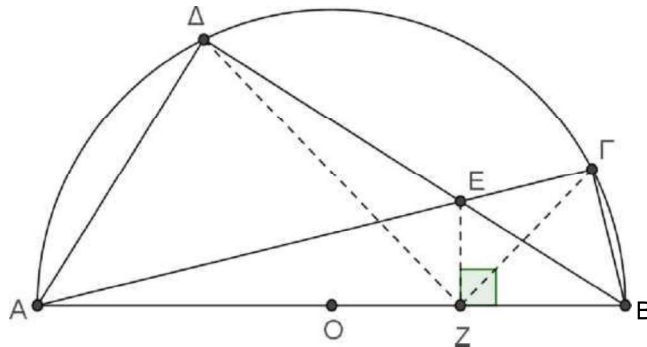
Μονάδες 7

β) Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.

Μονάδες 9

γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{\Gamma}$.

Μονάδες 9



ΑΣΚΗΣΗ (4_3787)

Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB=2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B, BE\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta // BE$).

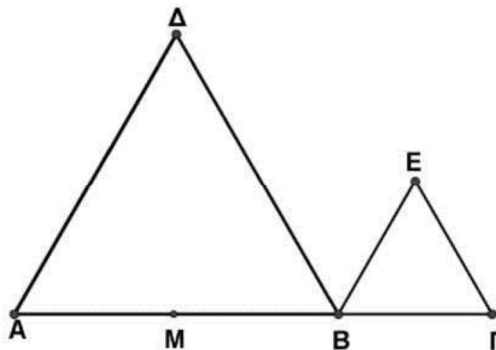
Μονάδες 9

β) Τα τρίγωνα $\Delta MB, \Delta EB$ είναι ίσα.

Μονάδες 8

γ) Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3793)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα $AEB, A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta, \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $A\beta\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

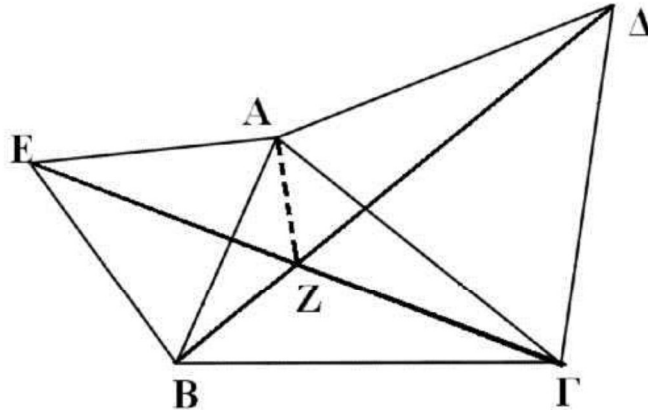
Μονάδες 10

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα.

Μονάδες 10

γ) Η γωνία είναι 120° .

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3800)

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $ΑΔ=ΓΕ$. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{ΒΕΓ} = \widehat{ΓΔΑ}$.

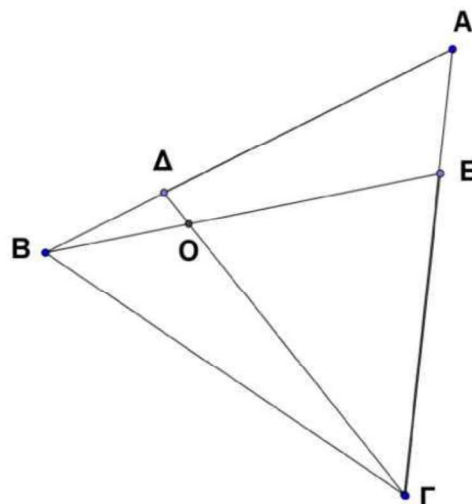
Μονάδες 10

ii. $\widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$

Μονάδες 10

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5



ΑΣΚΗΣΗ (4_3817)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα

τετράγωνα $AB\Delta E$ και $ΑΓΖΗ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$

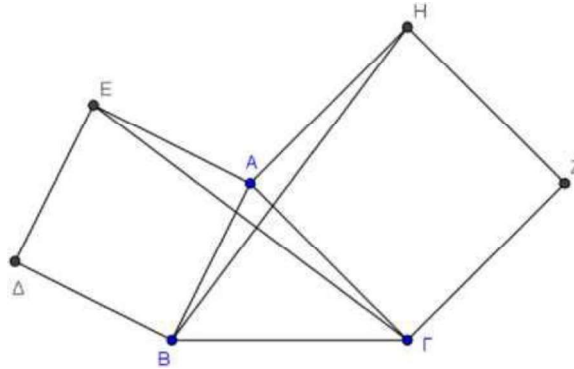
Μονάδες 8

β) $ΕΓ = BH$

Μονάδες 9

γ) Η $ΕΓ$ είναι κάθετη στη BH

Μονάδες 8



ΑΣΚΗΣΗ (4_3919)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta, BE$ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2E\Delta$

Μονάδες 6

β) $BE\Delta = \frac{A}{2}$

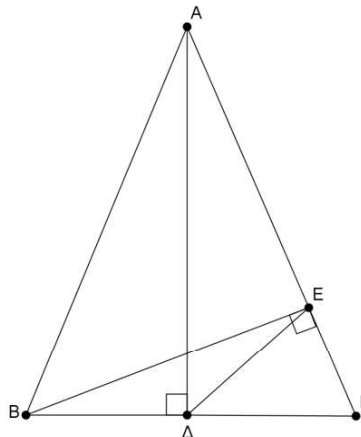
Μονάδες 7

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο

Μονάδες 6

δ) $ABE = A\Delta E$

Μονάδες 6



ΑΣΚΗΣΗ (4_3961)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ορθή. Φέρνουμε τη διάμεσο AM και σε τυχαίο σημείο K την κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $B = BAM$

(Μονάδες 8)

α) $\hat{A}H = \Delta AH$

(Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ (4_3966)

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και M , N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = M\Delta$.

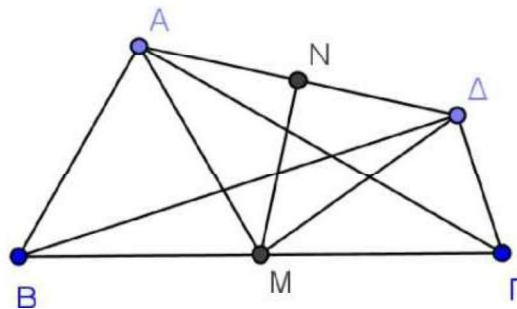
(Μονάδες 10)

β) Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$

(Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_4307)**

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Από τα σημεία B, Γ φέρουμε τα τμήματα $B\Delta, \Gamma E$ κάθετα στην ευθεία (ε) .

α) Να αποδείξετε ότι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$ αντίστοιχα.

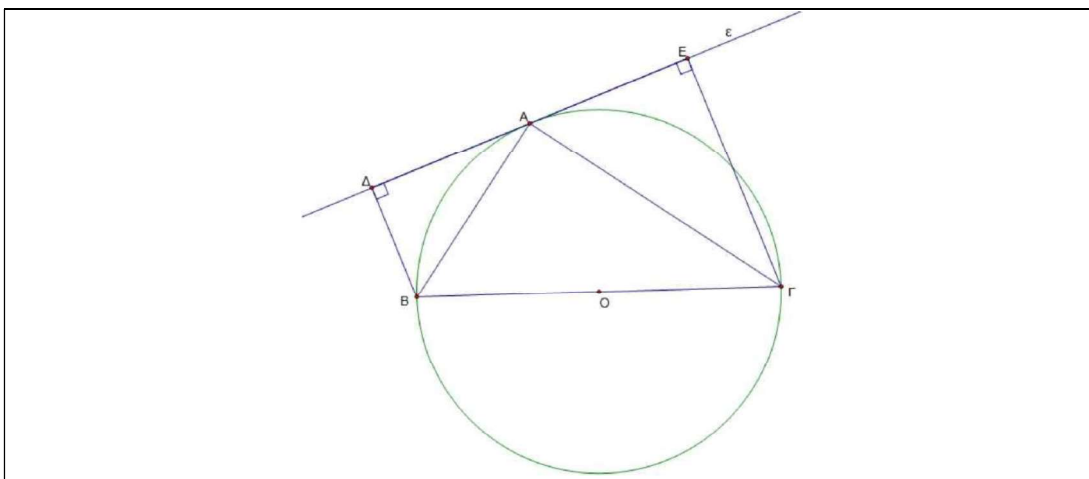
(Μονάδες 8)

β) Αν AE είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

(Μονάδες 9)

**ΑΣΚΗΣΗ (4 4757)**

Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ .

Αν οι ημιευθείες $A\gamma$ και Az χωρίζουν τη γωνία $\chi'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

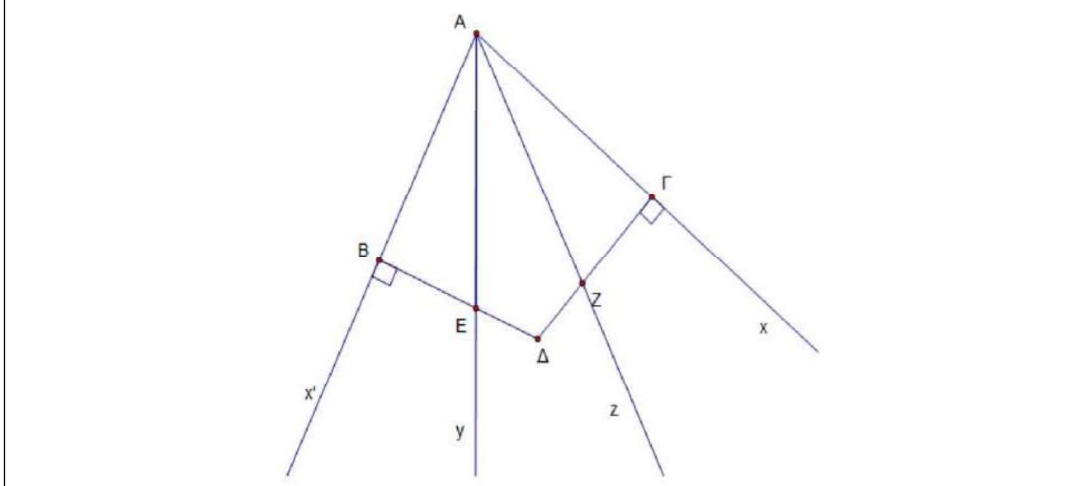
Μονάδες 8

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.

Μονάδες 8

γ) Οι γωνίες $\Gamma Β Δ$ και $\Gamma Α Δ$ είναι ίσες.

Μονάδες 9

**ΑΣΚΗΣΗ (4 4793)**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 6

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\triangle AB$ και $\triangle \Gamma B$.

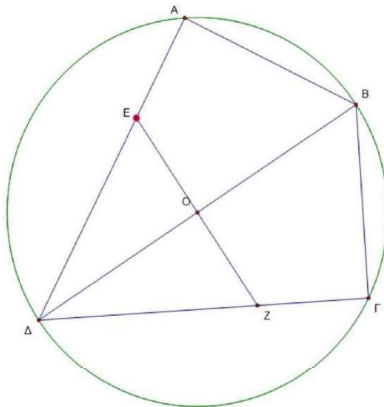
Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

Μονάδες 7

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Μονάδες 6



ΑΣΚΗΣΗ (4_4822)

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΑΔ = Β$

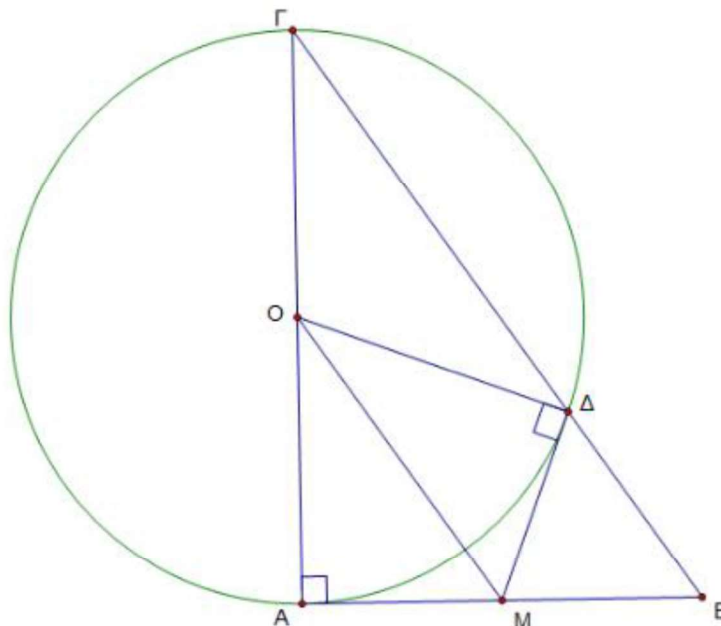
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $\triangle ΜΒ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσον του ΑΒ.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ (4_5895)

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

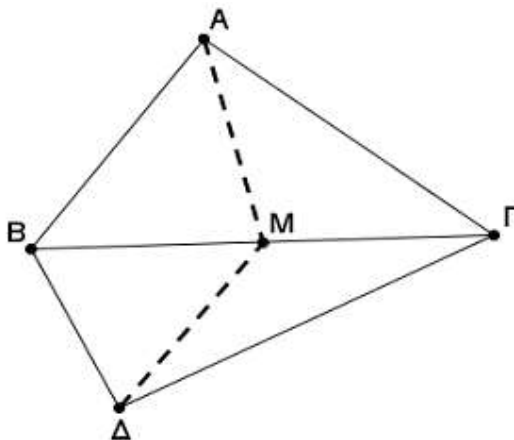
(Μονάδες 9)

β) $AM\Delta = 2A\Gamma\Delta$

(Μονάδες 9)

γ) $\Gamma B M = \Gamma A \Delta$

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ (4_5910)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O .

Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta A O$.

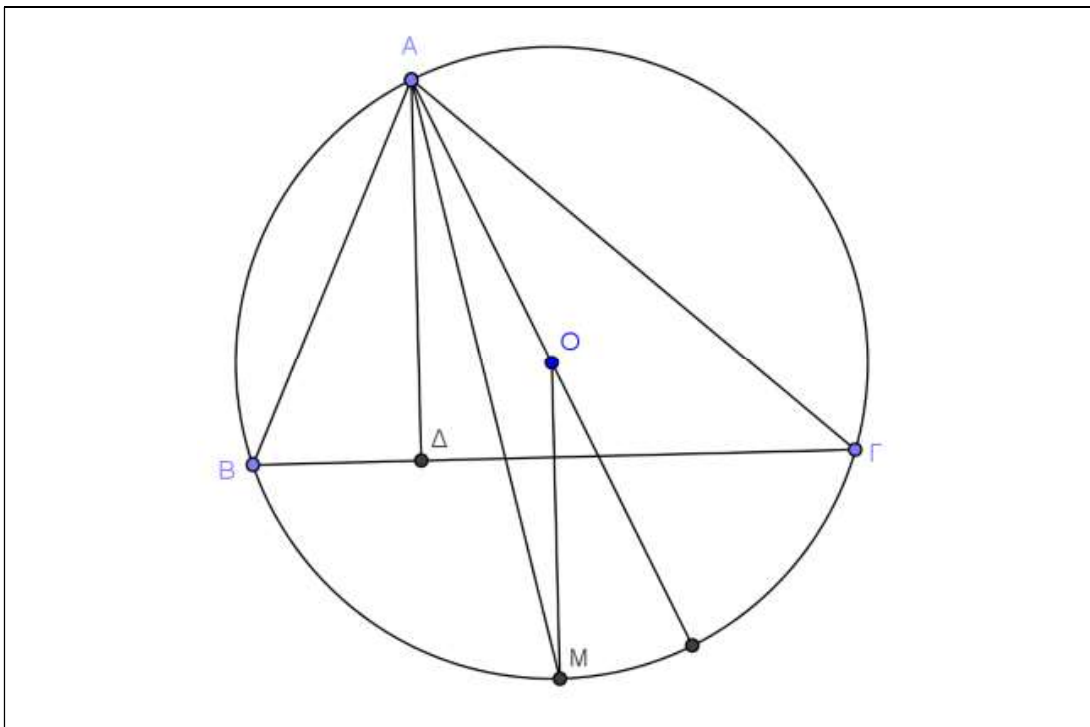
(Μονάδες 8)

β) $O A \Gamma = \Delta A B$

(Μονάδες 9)

γ) $\Delta A O = B - \Gamma$

(Μονάδες 8)

**Σχόλιο:**

Υπάρχει ο όρος «κυρτογώνιο τόξο BΓ» της εκφώνησης κάπου στο σχολικό βιβλίο;

(Βλέπε και §3.4 Πορίσματα III και IV, όπου δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο...)

ΑΣΚΗΣΗ (4_6875)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του AΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις AB και AΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της BΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά AΓ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = \Delta E \Gamma$

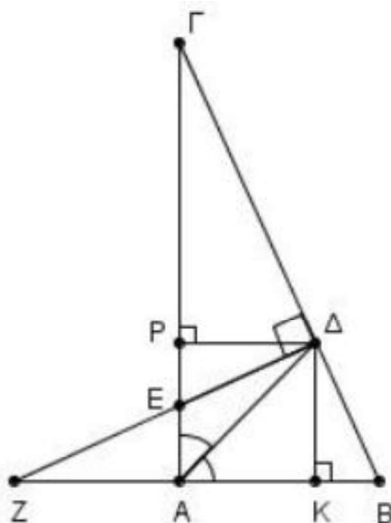
(Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ

(Μονάδες 9)



Σχόλιο: η προσθήκη της παρένθεσης (προς το B) είναι περιττή, σύμφωνα με και με το σχόλιο του σχολικού βιβλίου στο 2^ο κεφάλαιο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6878)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) έχουμε ότι $B = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου ABΓ. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM, η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$,

(Μονάδες 7)

β) $AH = BE$,

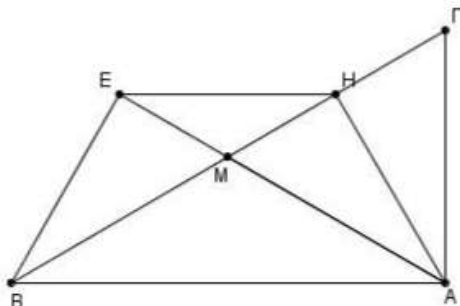
(Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο AHEB είναι εγγράψιμο,

(Μονάδες 6)

δ) $EH \parallel AE$.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ (4_6879)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) $\Delta A \perp A\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Έστω H το ορθόκентρο του τριγώνου $ABΓ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AΔBH$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν M το μέσον της $BΓ$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

(Μονάδες 8)