

ΘΕΜΑ 2

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διαφόρους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 13)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο την εξίσωση (1) και την εξίσωση που ορίσατε στο

α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα των δυο αυτών εξισώσεων είναι αδύνατο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από τον Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

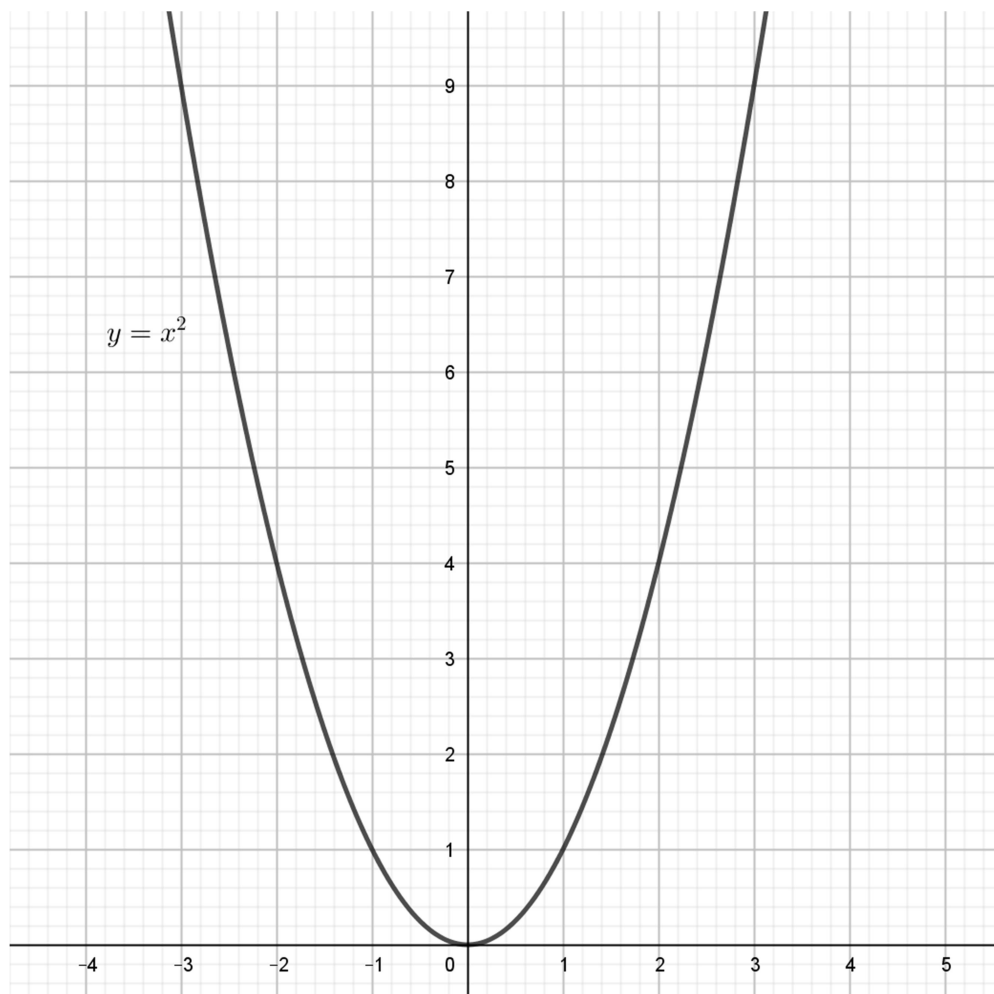
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε τις μετατοπίσεις της $y = x^2$ ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.



(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{3}$ λύση της εξίσωσης $\sin x - \frac{1}{2} = 0$;

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sin x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

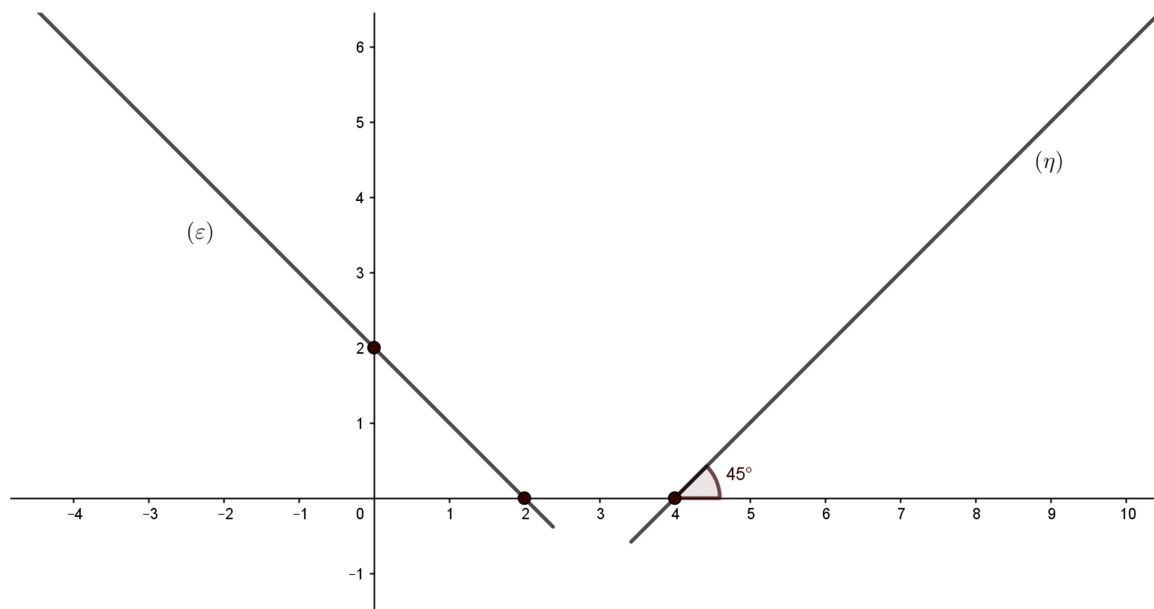
(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η) .



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού, ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι ίσος $\frac{11}{3}$ και επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right), \quad 0 \leq t \leq 180.$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

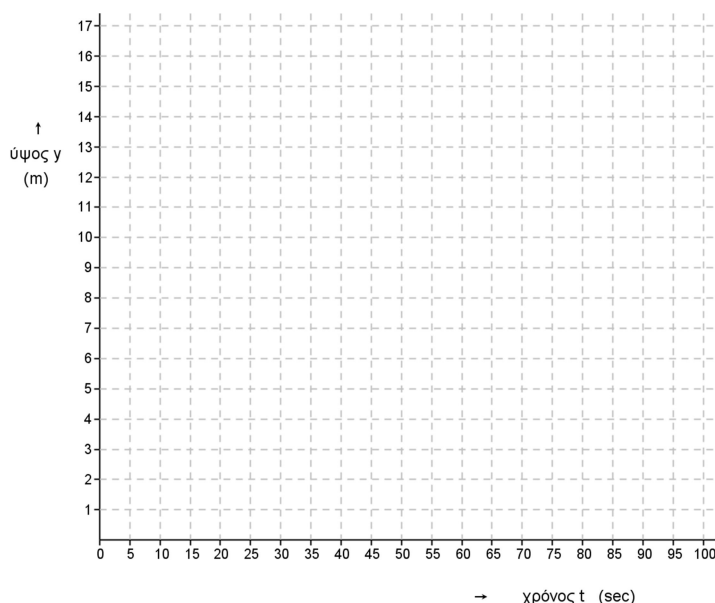
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

(Μονάδες 3)

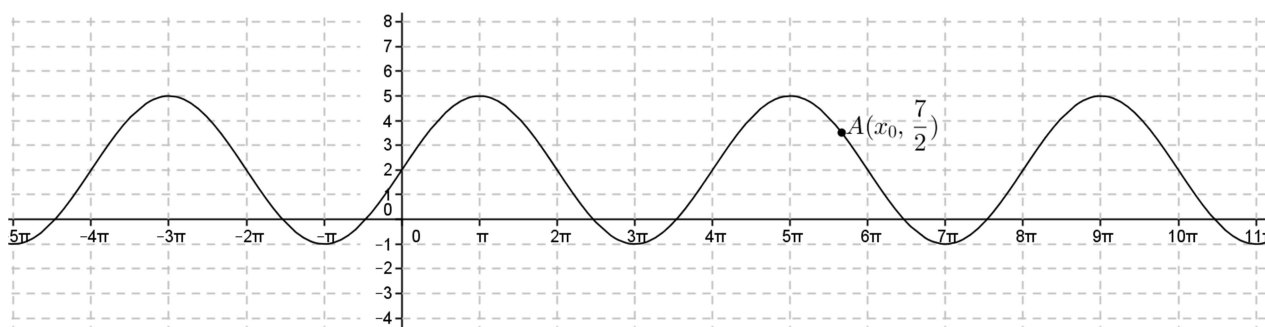
ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, k και ω . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους $40m$ για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο $40m$.
Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο $40m$, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,8)$, να δείξετε

ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g .

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής

παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ ($\kappa > 0$).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

(Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι γωνίες ω, θ με $\sin \omega \neq 0$ και $\sin \theta \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$\omega + \theta = 135^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi(\omega + \theta) = -1$

(Μονάδες 10)

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να βρείτε μια από αυτές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0.$$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ για τις οποίες ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$.

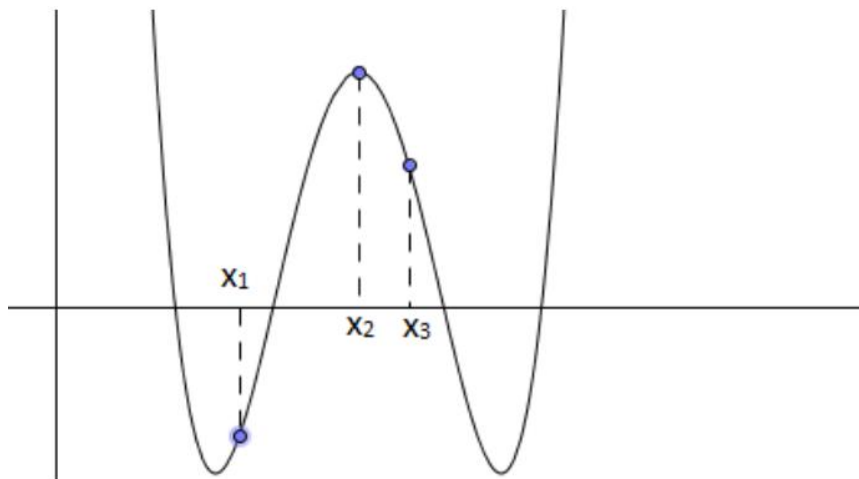
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η συνάρτηση f μέγιστο στο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 5$, $\varepsilon_2: -2x + 3y = -9$ και $\varepsilon_3: 3x + 2y = 7$.

α)

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2 .
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_3

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι σημείο της ε_1 .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

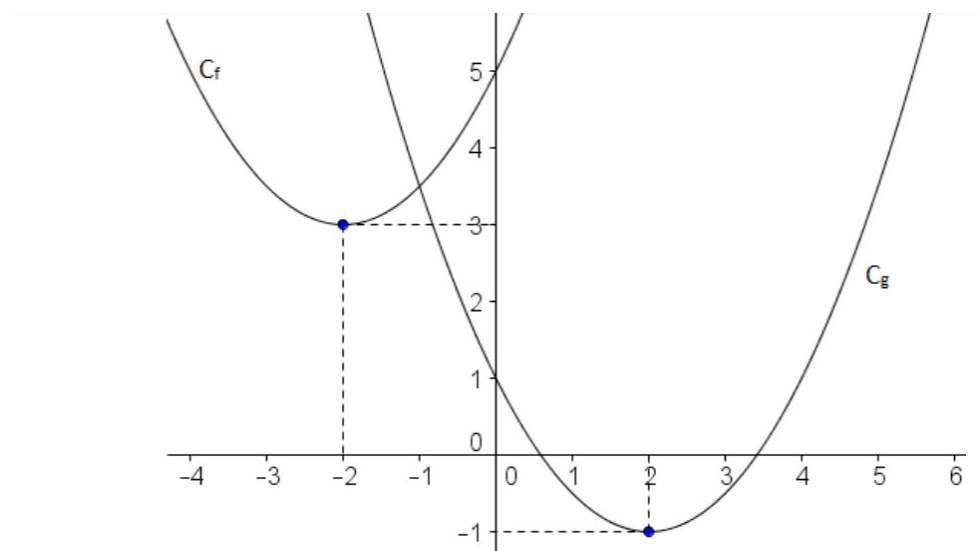
Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακροτάτου της f καθώς και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του, απάντησε ως εξής:

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14.
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24.
3. Τα άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ελατήριο ταλαντώνεται και το ύψος του παιχνιδιού σε cm από το πάτωμα, συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \omega > 0.$$

Το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι $20cm$ και το μέγιστο $100cm$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο – ηρεμία – μέγιστο – ηρεμία – ελάχιστο) είναι 6 sec .

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm) τη χρονική στιγμή t , δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 2\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης:

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου ($^{\circ}C$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \quad \mu\epsilon\ 0 \leq t \leq 24\ (t\ \text{o}\ \chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma\ \text{σε}\ \acute{\omega}\rho\epsilon\varsigma).$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0^{\circ}C$.

(Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0,24]$.

(Μονάδες 7)

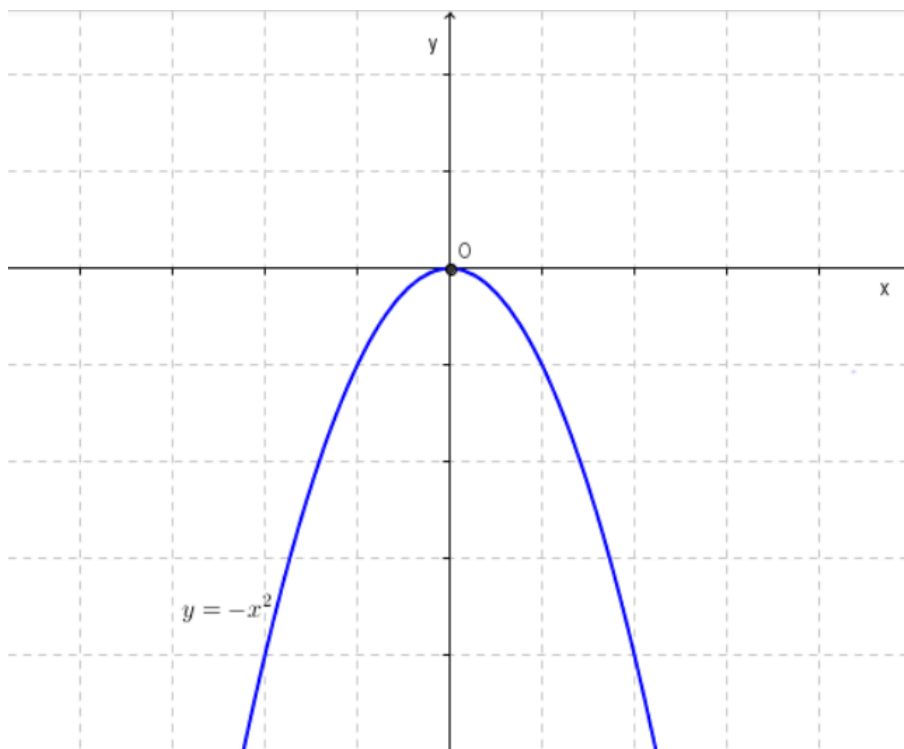
δ) Να βρείτε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από $0^{\circ}C$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

- i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

- ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

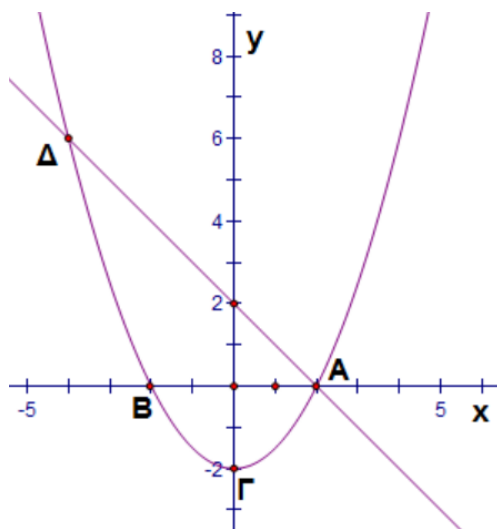
(Μονάδες 5)

- iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .

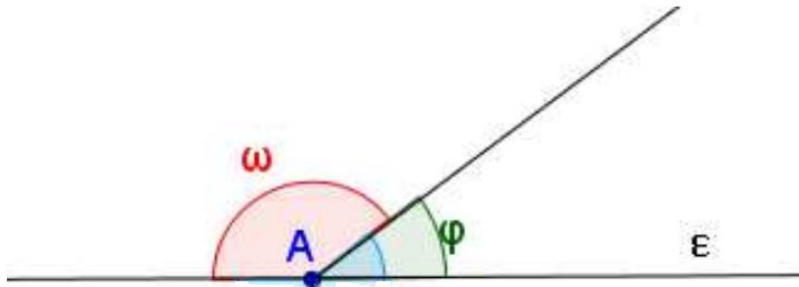
(Μονάδες 13)

β) Ναδειχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το M .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 13)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

ΘΕΜΑ 2

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

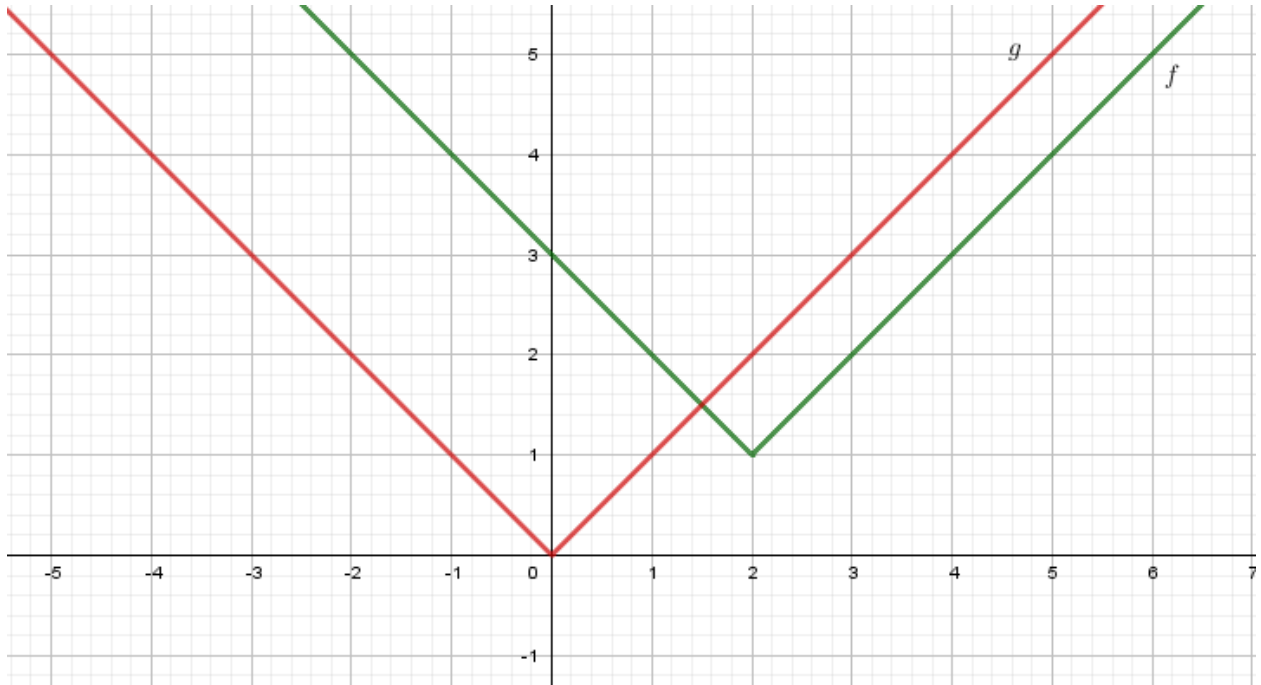
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 15)

β) Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$f(x) = |x + 2| + 1 \quad f(x) = |x - 2| - 1 \quad f(x) = |x + 2| - 1 \quad f(x) = |x - 2| + 1$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2_16950

α. 1ος τρόπος

Αρκεί να φτιάξουμε ένα σύστημα, έτσι ώστε τα πρώτα μέλη να είναι ίσα, αλλά τα δεύτερα μέλη διαφορετικά.

$$\text{Π.χ.} \quad \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$$

Τέλος!

2ος τρόπος

Ένας διαφορετικός τρόπος σκέψης είναι τα πρώτα μέλη να είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, αλλά να μην συμβαίνει το ίδιο με τα δεύτερα μέλη.

$$\text{Π.χ.} \quad \begin{cases} x + 3y = -12 & (1) \\ 2x + 6y = 6 & (2) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της (2) προκύπτει από το πρώτο μέλος της (1), αν πολλαπλασιαστεί με το 2. Ωστόσο, το δεύτερο μέλος της (2) είναι άσχετο και όχι -24 , όπως θα περιμέναμε.

3ος τρόπος

Εφόσον είναι γνωστό, ότι ένα αδύνατο γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί σε δύο παράλληλες ευθείες, αρκεί να γράψουμε τις εξισώσεις δύο τέτοιων ευθειών. Γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή τον ίδιο συντελεστή του x .

$$\text{Π.χ.} \quad \begin{cases} y = 3x - 12 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

Έτοιμο!

β. Για τη συνέχεια, ας χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο παράδειγμα, δηλαδή το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 3y = -12 & (1) \\ 2x + 6y = 6 & (2) \end{cases}$$

Επειδή γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι πρόκειται για ευθείες, για να τις σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε 2 τυχαία σημεία για καθεμία από αυτές.

Για την (1) , θέτουμε στο x δύο τυχαίες τιμές, πχ. 0 και 3. Έτσι, με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$\text{Για } x = 0, \quad (1) \Rightarrow 0 + 3y = -12 \Leftrightarrow y = -4$$

$$\text{Για } x = 3, \quad (1) \Rightarrow 3 + 3y = -12 \Leftrightarrow 3y = -15 \Leftrightarrow y = -5$$

Οπότε, βρήκαμε τα σημεία **A (0, -4)** και **B (3, -5)** .

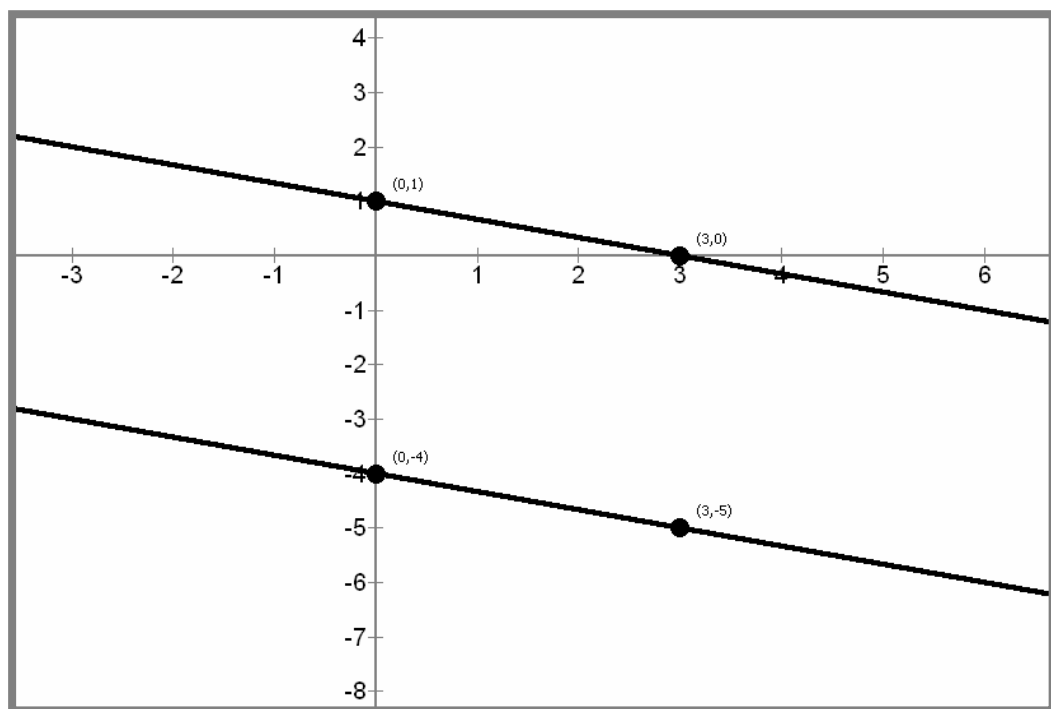
Για την (2) , πράττουμε αναλόγως. Αν το x είναι πχ. 0 και 3 τότε:

$$\text{Για } x = 0, \quad (2) \Rightarrow 2 \cdot 0 + 6y = 6 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Για } x = 3, \quad (2) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 6y = 6 \Leftrightarrow 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Οπότε, βρήκαμε τα σημεία **Γ (0, 1)** και **(3, 0)** .

Ώρα για τη γραφική παράσταση.



Προφανώς και πρόκειται για δύο ευθείες παράλληλες κι εφόσον δεν υπάρχει σημείο τομής τους, δεν υπάρχει και λύση του αντίστοιχου αλγεβρικού συστήματος.

ΘΕΜΑ 2_16954

- α. Στο Θέμα 2_16950 περιγράφονται διάφοροι τρόποι σκέψης. Εδώ θα αρκεστούμε σε έναν από αυτούς. Διαιρούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης $8x + 2y = 7$ με το 2, αλλά αφήνουμε το δεύτερο μέλος ίδιο. Έτσι, προκύπτει η εξίσωση: $4x + y = 7$.

Ουσιαστικά, αυτό που έχουμε κάνει είναι να δημιουργήσουμε το παρακάτω αδύνατο, γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 7 & (1) \\ 4x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

- β. Επειδή γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι πρόκειται για ευθείες, για να τις σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε 2 τυχαία σημεία για καθεμία από αυτές.

Για την (1), θέτουμε στο x δύο τυχαίες τιμές, πχ. 0 και 2. Έτσι, με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$\text{Για } x = 0, \quad (1) \Rightarrow 8 \cdot 0 + 2y = 7 \Leftrightarrow y = 7/2$$

$$\text{Για } x = 2, \quad (1) \Rightarrow 8 \cdot 2 + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -9 \Leftrightarrow y = -9/2$$

Οπότε, βρήκαμε τα σημεία **A (0, 7/2)** και **B (2, -9/2)**.

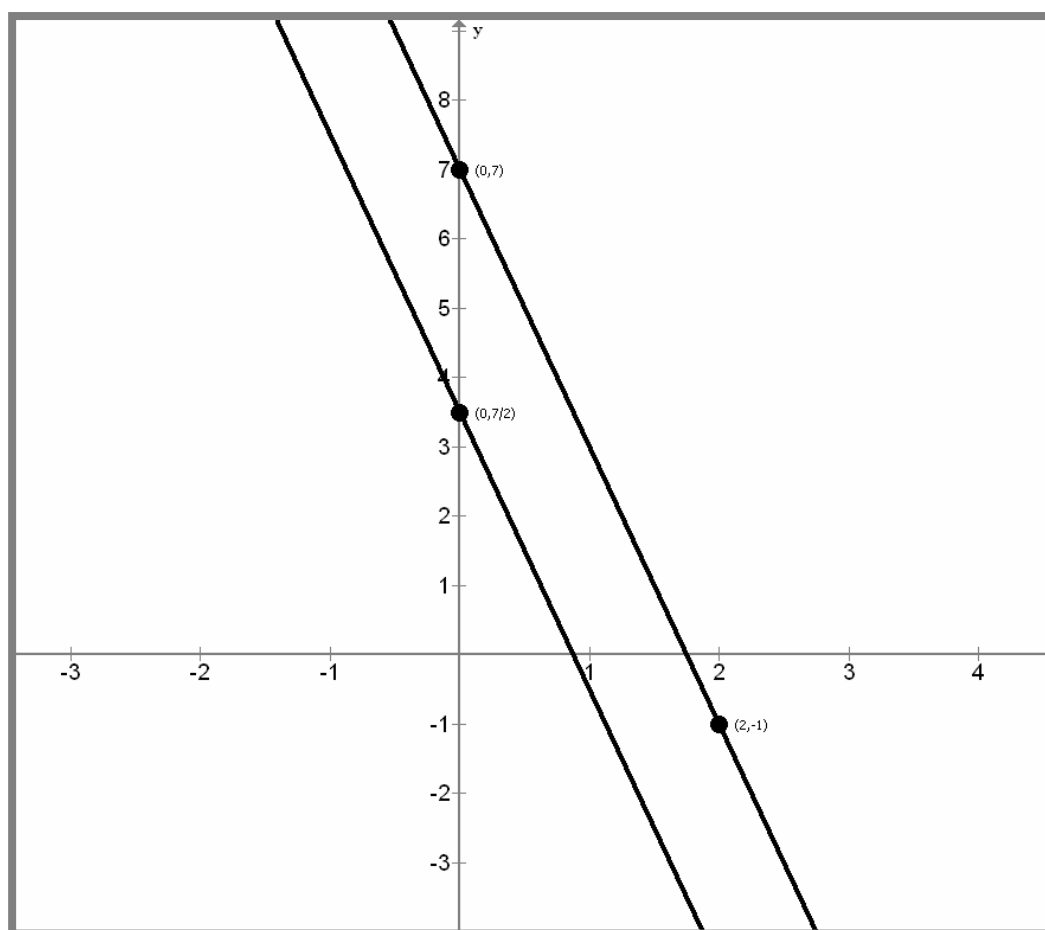
Για την (2), πράττουμε αναλόγως. Αν το x είναι πχ. 0 και 3 τότε:

$$\text{Για } x = 0, \quad (2) \Rightarrow 4 \cdot 0 + y = 7 \Leftrightarrow y = 7$$

$$\text{Για } x = 2, \quad (2) \Rightarrow 4 \cdot 2 + y = 7 \Leftrightarrow y = -1$$

Οπότε, βρήκαμε τα σημεία **Γ (0, 7)** και **(2, -1)**.

Ακολουθεί η γραφική παράσταση.



Προφανώς και πρόκειται για δύο ευθείες παράλληλες κι εφόσον δεν υπάρχει σημείο τομής τους, δεν υπάρχει και λύση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος.

ΘΕΜΑ 2_16957

- α.** Με μοναδικό στοιχείο το άθροισμα των ηλικιών, δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός. Αν συμβολίσουμε με "μ" την ηλικία του Μάρκου και με "β" εκείνη του Βασίλη, η υπόθεση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως:

$$\mu + \beta = 27 \quad (\mu > \beta)$$

Η παραπάνω γραμμική εξίσωση δύο αγνώστων, όπως και κάθε αντίστοιχη γραμμική εξίσωση, έχει άπειρα ζεύγη λύσεων. Η ανθρώπινη ηλικία, ωστόσο, μας θέτει περιορισμούς. Όμως, ακόμη κι έτσι, ακόμη κι αν υποθέταμε ότι ο Βασίλης δεν είναι νεογέννητος και οι ηλικίες είναι μετρημένες σε ακέραιο αριθμό ετών, τότε έχουμε πάνω από μία, δυνατές απαντήσεις. Για παράδειγμα, ο Βασίλης θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε ηλικία από 1 έως και 13 έτη (ως μικρότερος) κι ο Μάρκος, φυσικά, οποιαδήποτε ηλικία από 14 έως και 26 έτη, αντιστοίχως.

- β.** Με το νέο στοιχείο, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία γραμμική εξίσωση, επιπλέον:

$$\mu - \beta = 5$$

και στη συνέχεια να λύσουμε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} \mu + \beta = 27 & (1) \\ \mu - \beta = 5 & (2) \end{cases}$$

Οι (1) και (2) έχουν ήδη αντίθετους συντελεστές, ως προς β, συνεπώς μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη, οπότε:

$$2\mu = 32 \Leftrightarrow \mu = 16$$

Για $\mu = 16$, η εξίσωση (1) γίνεται:

$$16 + \beta = 27 \Leftrightarrow \beta = 11$$

ΘΕΜΑ 2_16960

α. Για την ευθεία (ε) :

1ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι τέμνει τους άξονες στα σημεία (0, 2) και (2, 0) . Συνεπώς, οι συντεταγμένες των σημείων αυτών θα επαληθεύουν την εξίσωση της (ε) . Θυμόμαστε, επίσης, ότι σε ένα διατεταγμένο ζεύγος δίνεται πάντα πρώτη η τετμημένη x και δεύτερη η τεταγμένη y. Έστω, λοιπόν, $y = \lambda \cdot x + \beta$ (1) η εξίσωση της (ε) .

Για το σημείο (0, 2) θα έχουμε:

$$(1) \Rightarrow 2 = \lambda \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

Για το σημείο (2, 0) και $\beta = 2$ θα έχουμε:

$$(1) \Rightarrow 0 = \lambda \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Τελικά, η εξίσωση της (ε) θα είναι: $y = -x + 2$

2ος τρόπος

Επειδή είναι γνωστό ότι η τεταγμένη της τομής με τον y' y μας δίνει απευθείας το β , θα μπορούσε να αποφευχθεί η πρώτη αντικατάσταση.

Επίσης, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Συνεπώς, η εσωτερική γωνία με τον άξονα x' x θα είναι 45° , άρα η εξωτερική και παραπληρωματική της 135° . Άρα, η κλίση της ευθείας (3) θα είναι ίση με $\epsilon\phi 135^\circ = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$ (Θυμόμαστε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες) . Όπως αναφέρεται και πιο κάτω, όμως, η κλίση μιας ευθείας δεν είναι παρά ο συντελεστής του x .

Τελικά, (ε) : $y = -x + 2$

Για την ευθεία (η) :

Θυμόμαστε ότι στην εξίσωση μιας ευθείας $y = \lambda x + \beta$, ο συντελεστής του x ονομάζεται και συντελεστής διεύθυνσης και φανερώνει την κλίση μιας ευθείας, δηλαδή την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα x' x . Άρα:

$$\lambda = \epsilon\phi 45^\circ = 1$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η ευθεία (η) τέμνει τον x' x στο σημείο (4, 0) . Συνεπώς, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Άρα, για το σημείο (4, 0) και $\lambda = 1$ θα έχουμε:

$$y = \lambda \cdot x + \beta \Leftrightarrow 0 = 1 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -4$$

Τελικά, η εξίσωση της (η) θα είναι: $y = x - 4$

β. Αρκεί να λύσουμε το γραμμικό σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$\begin{cases} y = -x + 2 & (1) \\ y = x - 4 & (2) \end{cases}$$

Καθώς παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του x είναι ήδη αντίθετοι, δε χρειάζεται να φέρουμε το σύστημα σε κανονική μορφή, αλλά μπορούμε κατευθείαν να τις προσθέσουμε κατά μέλη, οπότε:

$$2y = -2 \Leftrightarrow \mathbf{y = -1}$$

Για $y = -1$, η εξίσωση (2) γίνεται:

$$-1 = x - 4 \Leftrightarrow \mathbf{x = 3}$$

Συνεπώς, οι ευθείες (ε) και (η) τέμνονται στο σημείο **(3, -1)**.

ΘΕΜΑ 2_16962

- α. Αρκεί να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των τιμών της συνάρτησης, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Γνωρίζουμε επίσης ότι, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος, αναγράφουμε πάντα πρώτη την τετμημένη x και δεύτερη την τεταγμένη y , ενός σημείου. Όμως, όταν αναφερόμαστε σε συναρτήσεις, θυμίζουμε ότι $y = f(x)$.

Συνεπώς, το γεγονός ότι η συνάρτηση διέρχεται απ' το σημείο $A(5, 2)$ σημαίνει ότι για $x_1 = 5$ είναι $f(x_1) = f(5) = 2$, ενώ αναλόγως για το σημείο $B(4, 9)$ σημαίνει ότι για $x_2 = 4$ είναι $f(x_2) = f(4) = 9$.

Παρατηρούμε ότι $x_1 > x_2$ (αφού $5 > 4$), ενώ $f(x_1) < f(x_2)$ (αφού $2 < 9$), δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Εφόσον η ανισοτική σχέση αλλάζει φορά, η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$.

- β. Από το προηγούμενο ερώτημα (ουσιαστικά από την υπόθεση), είναι γνωστό ότι $f(5) = 2$. Άρα, η ανίσωση που δίνεται μπορεί να γραφτεί ως:

$$f(5 - 3x) < 2 \Leftrightarrow f(5 - 3x) < f(5)$$

Επειδή, όμως, αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε θα είναι:

$$f(5 - 3x) < f(5) \Leftrightarrow 5 - 3x > 5$$

Προσέχουμε, δηλαδή, πώς όταν «περνάμε» από τις τιμές μια φθίνουσας συνάρτησης στις τιμές του x , αλλάζει η φορά της ανισότητας. Στη συνέχεια, λύνουμε την ανισότητα, κατά τα γνωστά:

$$5 - 3x > 5 \Leftrightarrow -3x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

ΘΕΜΑ 2_16965

- α. Με μια απλή διάσπαση όρου, "σπάμε" το 5 σε $4 + 1$. Έτσι, δημιουργείται η ταυτότητα "τετράγωνο διαφοράς":

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

- β. Σύμφωνα με τη μετατροπή του προηγούμενου ερωτήματος, γίνεται φανερό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι παρά μια μετατόπιση της x^2 κατά **2 μονάδες προς τα δεξιά** και **μία μονάδα προς τα πάνω**.

Προκειμένου, όμως, το σχήμα να γίνει με σχετική ακρίβεια και όχι "στο γενικά" και "στο περίπου", αναζητούμε στη γραφική παράσταση που δίνεται μερικά σημεία οδηγούς.

Αναζητούμε δηλαδή μερικά σημεία, των οποίων οι συντεταγμένες να είναι γνωστές με ακρίβεια. Το πλέον προφανές σημείο είναι η κορυφή της παραβολής με συντεταγμένες **(0, 0)**. Χωρίς πολλή προσπάθεια, ωστόσο, και με τη βοήθεια των βοηθητικών διακεκομμένων γραμμών, βρίσκουμε επιπλέον τα σημεία:

$$(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)$$

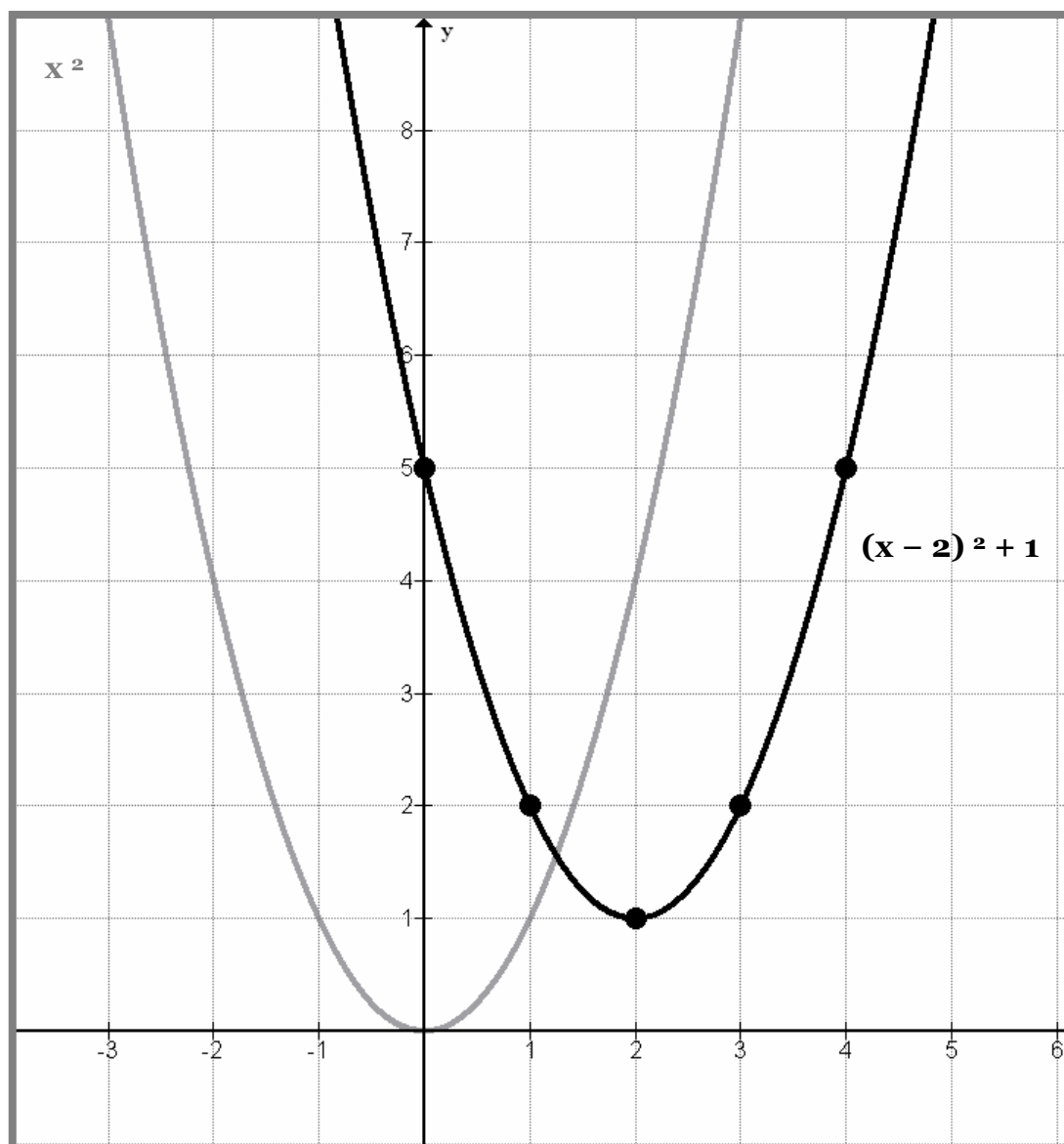
Αν φτιάξουμε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών, θα είναι κάπως έτσι:

x	-2	-1	0	1	2
x ²	4	1	0	1	4

Τώρα, θα επεκτείνουμε τον πίνακα, ώστε να προκύψουν οι αντίστοιχες, μετατοπισμένες συντεταγμένες της $f(x) = (x - 2)^2 + 1$:

x	0	1	2	3	4	+2 δεξιά
f(x)	5	2	1	2	5	+1 προς τα πάνω

Τελικά, μπορούμε να προχωρήσουμε στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης:



ΘΕΜΑ 2_16968

α. Αν είναι λύση της $3 \cdot \sin 4x + 3 = 0$, τότε θα πρέπει να την επαληθεύει:

$$3 \cdot \sin 4 \frac{\pi}{4} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \sin \pi + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -3 + 3 = 0$$

Συνεπώς, η τιμή $x = \pi/4$ είναι λύση της (1) .

β. Ουσιαστικά, αυτό που έχουμε να λύσουμε είναι το σύστημα των δύο εξισώσεων, δηλαδή:

$$\begin{cases} y = \sin 4x \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow \sin 4x = \sin \pi \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \\ 4x = 2k\pi - \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Οι οποίες λύσεις, προφανώς, συνιστούν και τις ζητούμενες τετμημένες.

ΘΕΜΑ 2_17647

- α.** Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha(-2) = \beta + 2\alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \beta + 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -2\alpha$$

Τελικά, οι παράμετροι α , β , γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$2\alpha - 3\beta - \gamma = 0 \quad (\text{με } \beta \neq -2\alpha)$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α , β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\beta \neq -2\alpha$), έστω $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, οπότε έχουμε:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - \gamma = 0 \Leftrightarrow 4 - 3 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: **$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$**

- β.** Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, **$\beta = -2\alpha$** (1).

Θα πρέπει όμως, επίσης, ένα από τα D_x , D_y να είναι διάφορο του μηδενός.

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 8\beta - \gamma(-2) = 8\beta + 2\gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 8\alpha$$

Οπότε:

$$D_x \neq 0 \Leftrightarrow 8\beta + 2\gamma \neq 0 \Leftrightarrow 4\beta + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq -4\beta$$

ή

$$D_y \neq 0 \Leftrightarrow \gamma - 8\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 8\alpha$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\beta = -2\alpha$!

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο α , έστω $\alpha = 2$, οπότε από (1) έχουμε:

$$\beta = -2\alpha \Leftrightarrow \beta = -2 \cdot 2 \Leftrightarrow \beta = -4$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα προηγούμενα και προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο, θα πρέπει:

$$\gamma \neq 8\alpha \Leftrightarrow \gamma \neq 8 \cdot 2 \Leftrightarrow \gamma \neq 16$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο, είναι: $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 10)$

ΘΕΜΑ 2_17650

- α.** Καταγράφουμε τα στοιχεία, που μας δίνει η άσκηση, με μαθηματικά σύμβολα κι εξισώσεις, αντί για λέξεις.

Για την περίμετρο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x και y , γνωρίζουμε ότι δίνεται απ' τη σχέση $2x + 2y$, συνεπώς:

$$2x + 2y = 38 \Leftrightarrow (\text{απλοποίηση :2}) \Leftrightarrow x + y = 19 \quad (1)$$

Αντίστοιχα, για το εμβαδόν του ξέρουμε ότι δίνεται απ' το γινόμενο:

$$x \cdot y$$

Αν, όμως, αλλάξουμε τις διαστάσεις σύμφωνα με τις υποδείξεις του προβλήματος, τότε οι νέες διαστάσεις θα είναι $x + 2$ για το νέο μήκος και $y - 4$ για το νέο πλάτος. Επομένως, το νέο εμβαδόν θα είναι:

$$(x + 2) \cdot (y - 4)$$

Εφόσον, τα δύο εμβαδά είναι ίσα, θα έχουμε:

$$(x + 2) \cdot (y - 4) = x \cdot y \Leftrightarrow$$

$$xy - 4x + 2y - 8 = xy \Leftrightarrow (\text{ιδιότητα διαγραφής})$$

$$-4x + 2y = 8 \Leftrightarrow (\text{απλοποίηση :2})$$

$$-2x + y = 4 \quad (2)$$

Επομένως, με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

β. 1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - x \\ -2x + 19 - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - x \\ -3x = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - 5 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 \\ x = 5 \end{cases}$$

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 19 \\ (-1) \cdot (-2x + y = 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 19 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x = 15 \\ x = 5 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $x = 5$ έχουμε:

$$x + y = 19 \Leftrightarrow 5 + y = 19 \Leftrightarrow y = 14$$

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 1 + 2 = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 19 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 19 - 4 = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 19 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 19 = 4 + 38 = 42$$

Συνεπώς:

$$x = D_x / D = 15 / 3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 5} \quad \text{και} \quad y = D_y / D = 42 / 3 \Leftrightarrow \mathbf{y = 14}$$

ΘΕΜΑ 2_17651

- α. Έστω x ο αριθμός των δικύκλων και y ο αριθμός των τετράτροχων οχημάτων. Εφόσον το σύνολό τους είναι 830, η πρώτη εξίσωση θα είναι:

$$x + y = 830$$

Το πλήθος των τροχών για τα x δίκυκλα θα είναι $2 \cdot x$, ενώ για τα y τετράτροχα $4 \cdot y$. Επομένως, αν το σύνολο των τροχών είναι 2.700, τότε η δεύτερη εξίσωση θα είναι:

$$2x + 4y = 2.700$$

η οποία, με απλοποίηση με το 2, μας δίνει:

$$x + 2y = 1.350$$

Επομένως, με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases}$$

β. 1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 830 - y \\ 830 - y + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 830 - 520 \\ y = 520 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 \\ y = 520 \end{cases}$$

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} -x - y = -830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \begin{cases} -x - y = -830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \Leftrightarrow y = 520$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = 520$ έχουμε:

$$x + y = 830 \Leftrightarrow x + 520 = 830 \Leftrightarrow x = 310$$

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 830 & 1 \\ 1350 & 2 \end{vmatrix} = 830 \cdot 2 - 1350 \cdot 1 = 1660 - 1350 = 310$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 830 \\ 1 & 1350 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1350 - 1 \cdot 830 = 1350 - 830 = 520$$

Συνεπώς:

$$x = D_x / D = 310 / 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 310} \quad \text{και} \quad y = D_y / D = 520 / 1 \Leftrightarrow \mathbf{y = 520}$$

ΘΕΜΑ 2_17652

α. Μετασχηματίζουμε τη δοθείσα σχέση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 \Leftrightarrow (\text{τετράγωνο αθροίσματος})$$

$$\eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow (\text{τριγ. ταυτότητα: } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1)$$

$$1 + 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 1 \Leftrightarrow (\text{ιδιότητα διαγραφής})$$

$$2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = 0$$

β. Λύνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις του (α) ερωτήματος:

$$\eta\mu\omega = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2κ\pi + 0 \\ \omega = 2κ\pi + \pi - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2κ\pi \\ \omega = 2κ\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \omega = κ\pi \quad (κ \in \mathbb{Z})$$

ή ...

$$\sigma\upsilon\nu\omega = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2κ\pi + \frac{\pi}{2} \\ \omega = 2κ\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \omega = κ\pi + \frac{\pi}{2} \quad (κ \in \mathbb{Z})$$

ΘΕΜΑ 2_17656

- α. Γνωρίζουμε ότι σε μια συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu x$, ο συντελεστής ρ αποτελεί έναν απ' τους παράγοντες εκείνους, που επηρεάζει και μεταβάλλει τα ακρότατα της συνάρτησης. Με άλλα λόγια, αν πχ. $\rho > 0$, τότε η μέγιστη τιμή της f θα είναι η ρ , ενώ ελάχιστη η $-\rho$.

Συνεπώς, για τη δοθείσα συνάρτηση $f(x) = 1/2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, μέγιστη κι ελάχιστη τιμή είναι οι $1/2$ και $-1/2$, αντίστοιχα.

Αν για κάποιους, αυτό δεν είναι αρκετό, τότε αποδεικνύουμε του λόγου το αληθές. Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow (\text{πολλ/ζουμε με } 1/2)$$

$$-1/2 \leq 1/2 \cdot \eta\mu 2x \leq 1/2 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{-1/2 \leq f(x) \leq 1/2}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει, ακριβώς, το ζητούμενο.

Όσον αφορά στην περίοδο, γνωρίζουμε ότι ο παράγοντας εκείνος που επηρεάζει την περίοδο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης είναι ο συντελεστής ω της ανεξάρτητης μεταβλητής x , δηλαδή στη συγκεκριμένη συνάρτηση το $\omega = 2$. Η νέα περίοδος υπολογίζεται από τη σχέση:

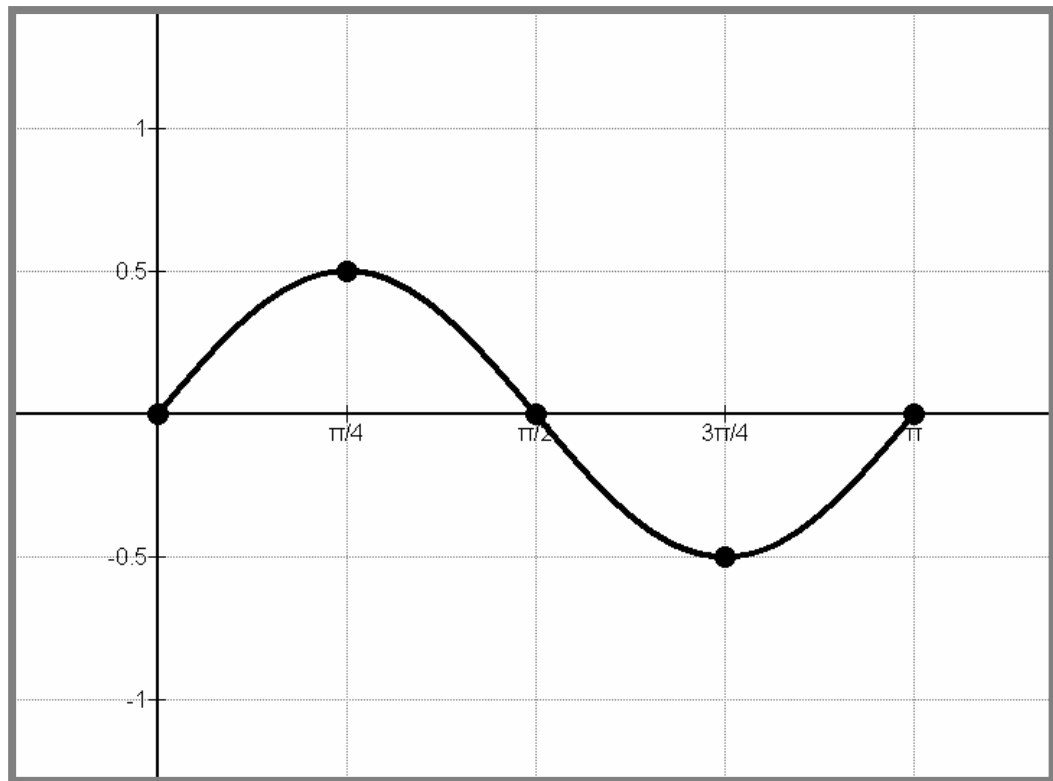
$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$$

Συνεπώς, $\mathbf{T = \pi}$.

- β. Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι έχουν προστεθεί, βοηθητικά στην τελευταία σειρά, οι τιμές της βασικής συνάρτησης $\eta\mu x$. Με αυτό τον τρόπο, υπολογίζουμε πολύ εύκολα τις τιμές της $1/2 \cdot \eta\mu x$, πολλαπλασιάζοντας απλά τις αρχικές τιμές με $1/2$. Με άλλα λόγια, υποβάλλουμε τις τιμές της αρχικής συνάρτησης στις ίδιες αριθμητικές μεταβολές, τις οποίες παρατηρούμε στη συνάρτηση που μας δίνεται.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$1/2 \cdot \eta\mu 2x$	0	$1/2$	0	$-1/2$	0
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0

Σχεδιάζουμε, τώρα, τη γραφική παράσταση:



- γ. Έχουμε απαντήσει, ήδη απ' το (α) ερώτημα, πως η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $1/2$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \leq 1/2 < 1$$

Αυτό σημαίνει, με απλά λόγια, πως η f ουδέποτε θα μπορέσει να "φτάσει" την τιμή 1.

ΘΕΜΑ 2_17651

$$\begin{aligned}
 \alpha. \quad & \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{αντικαθιστούμε το } y \text{ στη 2η εξίσωση}) \\
 & \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - (x^2 + 1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - x^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x(1 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Οπότε, 1η εξίσωση γίνεται:

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 \Rightarrow y = 2$$

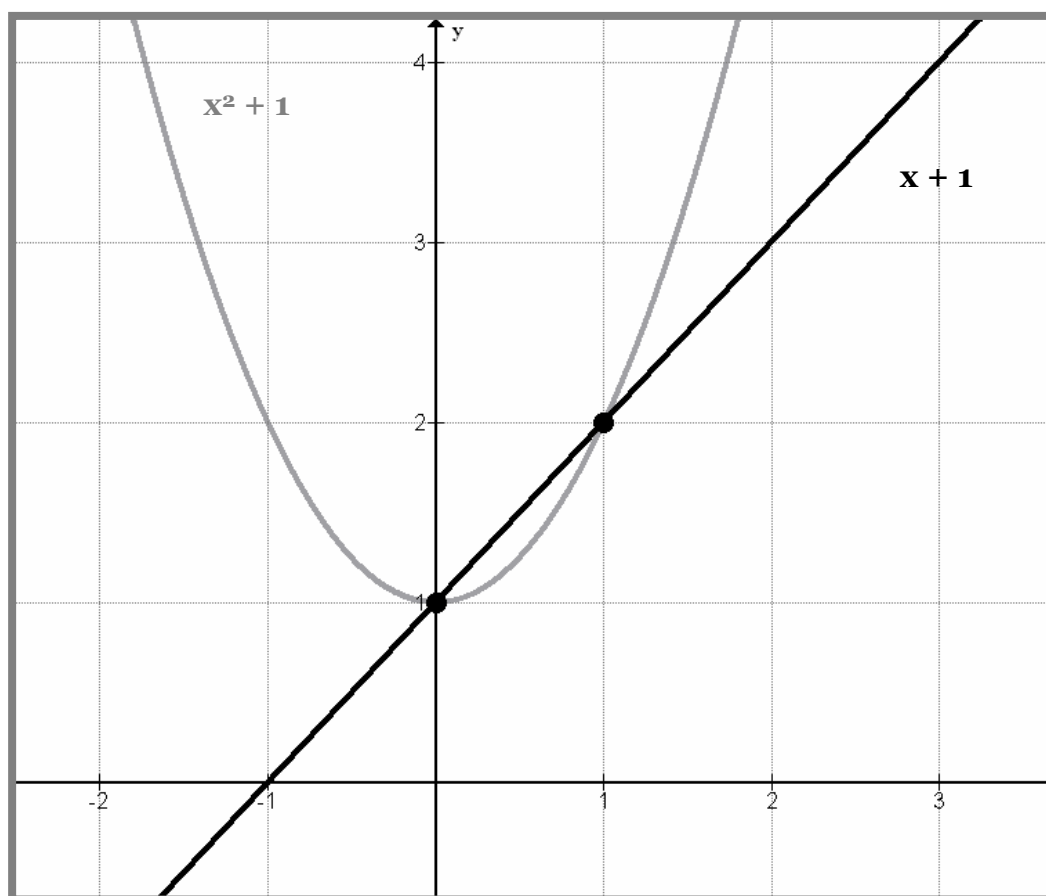
Επομένως, το σύστημα έχει δύο λύσεις (x, y) : **(0, 1)** και **(1, 2)**

β. Όπως είναι γνωστό, η πρώτη εξίσωση $y = x^2 + 1$ παριστάνει παραβολή και πιο συγκεκριμένα παριστάνει την παραβολή x^2 μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά 1 μονάδα.

Αντιστοίχως, η δεύτερη εξίσωση $x - y = -1$, λόγω που είναι γραμμική θα παριστάνει ευθεία. Μάλιστα, αν τη λύσουμε ως προς y , θα πάρει την πιο οικεία μορφή $y = x + 1$. Απ' την τελευταία, συμπεραίνουμε πως η ευθεία θα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 1 και θα έχει έχει κλίση $\epsilon_{\phi\omega} = 1$ (συντελεστής του x), που σημαίνει ότι θα σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$, με τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

Η λύση του συστήματος μας υποδεικνύει, απλά, ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις **τέμνονται** σε 2 σημεία, οι συντεταγμένες των οποίων δίνονται από τα ζεύγη τιμών, που υπολογίσαμε στο (α) ερώτημα.

Ενδεικτικά - εφόσον δε ζητείται - δίνεται και η γραφική επίλυση του συστήματος:



ΘΕΜΑ 2_17663

$$\begin{aligned}\alpha. \quad & (2\sigma\upsilon\nu x + 1)(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0 \Leftrightarrow \\ & 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ & \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Όμως η 1η εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα $(0, \pi/2)$, καθώς όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στο πρώτο τεταρτημόριο είναι θετικοί.

$$\text{Συνεπώς: } \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$$

β. Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, έχουμε:

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow (\text{κρατάμε το θετικό πρόσημο, εφόσον } 0 < x < \pi/2)$$

$$\eta\mu x = \frac{3}{5}$$

Με τη βοήθεια και των άλλων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, έχουμε:

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ 2_17664

α. Εφόσον $\omega + \theta = 135^\circ$ έχουμε:

$$\mathbf{\varepsilon\varphi(\omega + \theta) = \varepsilon\varphi(135^\circ) = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ)}$$

Όμως, από τους κανόνες αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο, γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες, οπότε:

$$\varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi(45^\circ) = \mathbf{-1}$$

β. Από τη σχέση εφαπτομένης αθροίσματος γωνιών, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\omega + \theta) = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta} \Leftrightarrow (\text{προηγούμενο ερώτημα: } \varepsilon\varphi(\omega + \theta) = -1)$$

$$\mathbf{-1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = -(1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = -1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta}$$

ΘΕΜΑ 2_17681

α. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow$ (πολλ/ζουμε και τα 2 μέλη με 2)
- $-2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε και στα 2 μέλη τη μονάδα)
- $-2 + 1 \leq 2\eta\mu x + 1 \leq 2 + 1 \Leftrightarrow$
- $-1 \leq 2\eta\mu x + 1 \leq 3$

Συνεπώς, η συνάρτηση f έχει:

- μέγιστη τιμή τον αριθμό 3
- ελάχιστη τιμή τον αριθμό -1

β. Χρειάζεται να λύσουμε, απλά, την εξίσωση $f(x) = 3$. Επομένως, έχουμε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1$$

Επειδή, όμως, η τελευταία πρόκειται περί βασικής τριγωνομετρικής συνάρτησης, γνωρίζουμε ήδη ότι στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της 1, για $x = \pi/2$.

Το ίδιο εύκολα, θα μπορούσαμε να το καταλάβουμε από τον τύπο της συνάρτησης και μόνο, καθώς η βασική συνάρτηση $\eta\mu x$ δεν έχει υποστεί καμία μεταβολή ούτε ως προς τη μονοτονία (εφόσον, ο συντελεστής της δεν είναι αρνητικός), ούτε ως προς την οριζόντια θέση της (εφόσον, στο x δεν έχει προστεθεί καμία σταθερά). Συνεπώς, ούτε οι θέσεις των ακροτάτων έχουν μεταβληθεί, παρά θα είναι ίδιες ακριβώς μ' εκείνες της αρχικής, βασικής συνάρτησης $\eta\mu x$. Για την τελευταία, όμως, γνωρίζουμε από τη θεωρητική της μελέτη, ότι παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $\pi/2$ κι ελάχιστη στη θέση $3\pi/2$.

ΘΕΜΑ 2_17683

α. Για $\lambda = -3$ το δοθέν σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases} &\stackrel{\lambda = -3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (-3 + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (-3 - 1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 4x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 4x - 4y = -6 \end{cases} \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Είναι προφανές, αφού οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται, ότι πρόκειται για αόριστο σύστημα. Λύνοντας την εξίσωση, ως προς y :

$$-2x + 2y = 3 \Leftrightarrow 2y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = x + 3/2$$

προκύπτει ότι οι άπειρες λύσεις του θα έχουν τη μορφή:

$$(x_0, y_0) = (k, k + 3/2) \text{ με } k \in \mathbb{R}$$

Επομένως, προκειμένου να βρούμε μια τυχαία λύση του, θέτουμε μια τυχαία, πραγματική τιμή στο k , πχ. $k = 1$, άρα $k + 3/2 = 1 + 3/2 = 5/2$. Δηλαδή, μια ζητούμενη λύση είναι η:

$$(x_0, y_0) = (1, 5/2)$$

β. Αναλόγως, για $\lambda = 3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases} &\stackrel{\lambda = 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (3 + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (3 - 1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή, τα πρώτα μέλη είναι ίσα, θα περιμέναμε να είναι και τα δεύτερα, κάτι που όμως δε συμβαίνει. Συνεπώς, το σύστημα σε αυτή την περίπτωση είναι αδύνατο.

γ. Για $\lambda = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases} &\stackrel{\lambda = 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (0 + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (0 - 1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 4(3 - 2y) - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 12 - 8y - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -9y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases} &\Leftrightarrow (-4) \cdot \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 8y = -12 \\ 4x - y = -6 \end{cases} \stackrel{\oplus}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -9y = -18 \\ 4x - y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = 2$ έχουμε:

$$x + 2 \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 4 \Leftrightarrow x = -1$$

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = -1 - 8 = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-6) \cdot 2 = -3 + 12 = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 = -6 - 12 = -18$$

Συνεπώς:

$$x = D_x / D = 9 / -9 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{και} \quad y = D_y / D = -18 / -9 \Leftrightarrow y = 2$$

Αν θέλουμε να είμαστε πιστότεροι στην διατύπωση της εκφώνησης, θα πρέπει αρχικά να δείξουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Οπότε, υπολογίζουμε την ορίζουσά του $D = -9 \neq 0$, αποδεικνύοντας έτσι του λόγου το αληθές. Στη συνέχεια, λύνουμε το σύστημα με οποιον τρόπο επιθυμούμε.

ΘΕΜΑ 2_17688

- α.** Πρέπει να δείξουμε ότι $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$.

Αρκεί να δείξουμε, ισοδύναμα, ότι:

$$2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow (\text{απαλοιφή παρονομαστών με } x^2 + 1 > 0)$$

$$0 \leq x^2 + 1 - 2x \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

Η τελευταία όμως είναι αληθής, εφόσον κάθε πραγματικός στο τετράγωνο μη αρνητικός.

- β.** Σύμφωνα με τον ορισμό της μέγιστης τιμής M , θα πρέπει $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in A_f$. Όμως, αυτό ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωσή μας, αφού $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $x_0 = 1$, κάτι που μπορούμε να επαληθεύσουμε πολύ εύκολα, λύνοντας απλά την εξίσωση:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = 1$$

- γ.** Εφόσον, το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = \mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in A_f$ είναι και $-x \in A_f$. Συνεπώς, έχουμε:

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

Άρα, η f είναι περιττή.

ΘΕΜΑ 2_17692

α. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) =$
 $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) \quad (1)$

Οι παραστάσεις, εντός των τριγωνομετρικών αριθμών, μας παραπέμπουν στους κανόνες αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη παράσταση στον κανόνα των συμπληρωματικών γωνιών, ενώ η δεύτερη στον κανόνα των γωνιών που διαφέρουν κατά π . Για αυτές γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \& \quad \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

Με βάση τα προηγούμενα, κι επιπλέον γνωρίζοντας ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, η (1) γίνεται:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(-x) - \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

β. Λύνουμε, καταρχάς, την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Απ' το ερώτημα (α), έχει καταστεί σαφές ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x$.

Επομένως:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \pi - x \\ x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0 = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση όμως είναι αδύνατη, γιατί:

$$2k\pi - \pi = 0 \Leftrightarrow 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1/2 \quad (\text{άτοπο, γιατί } k \in \mathbb{Z})$$

Συνεπώς, μας απομένει η λύση: $x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$

Ωστόσο, εμείς επιθυμούμε τα x εκείνα, ώστε $x \in [0, 2\pi]$.

$$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{\pi}{2} \leq k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη } -\frac{\pi}{2})$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε όλα τα μέλη με το } \pi)$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{2}{2}$$

Επειδή όμως $k \in \mathbb{Z}$, οι δυνατές τιμές του θα είναι $k = 0$ ή $k = 1$.

- Για $k = 0$ η λύση (2) γίνεται: $x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$
- Για $k = 1$ η λύση (2) γίνεται: $x = 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{3\pi}{2}}$

ΘΕΜΑ 2_17693

- α. Οι γωνίες των $\pi/6$ και $\pi/4$ ακτινίων είναι και οι δύο γωνίες του 1ου τεταρτημορίου. Στο τεταρτημόριο αυτό όλα τα πρόσημα είναι θετικά, γεγονός που δε μας βοηθάει ιδιαίτερα στη σύγκριση. Θυμόμαστε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της συνάρτησης $\sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	1	0	-1	0	1

Παρατηρούμε ότι στο 1ο τεταρτημόριο η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως για κάθε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sin x_1 > \sin x_2$. Αναλόγως θα έχουμε, λοιπόν:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} > \sin \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Όσον αφορά, τώρα, στον έτερο τριγωνομετρικό αριθμό, τον μετασχηματίζουμε κατάλληλα, με την βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο:

$$\begin{aligned} \sin \frac{17\pi}{10} &= \sin \frac{20\pi - 3\pi}{10} = \sin \left(\frac{20\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{3\pi}{10} \right) = \\ &= \sin \left(-\frac{3\pi}{10} \right) = \sin \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$

Εύκολα, μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση της γωνίας των $\frac{3\pi}{10}$ ακτινίων, με τις προηγούμενες γωνίες, αν καταστήσουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10} = (\text{ΕΚΠ} = 60) = \frac{10\pi}{60}, \frac{15\pi}{60}, \frac{18\pi}{60}$$

Επεκτείνουμε λοιπόν τη σχέση (1), η οποία και μας δίνει την ζητούμενη σχέση:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} > \sin \frac{\pi}{4} > \sin \frac{3\pi}{10}$$

- β. Από τη σχέση που δίνεται: $\pi < x_1 < x_2 < 3\pi/2$, αντιλαμβανόμαστε ότι όλες μας οι εργασίες θα γίνουν στο 3ο τεταρτημόριο. Στο τεταρτημόριο αυτό, θυμόμαστε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της συνάρτησης $\sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στο 3ο τεταρτημόριο η συνάρτηση ημx είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως για κάθε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$ (2) .

Έχουμε, τελικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη με -1 , αλλάζοντας τη φορά:

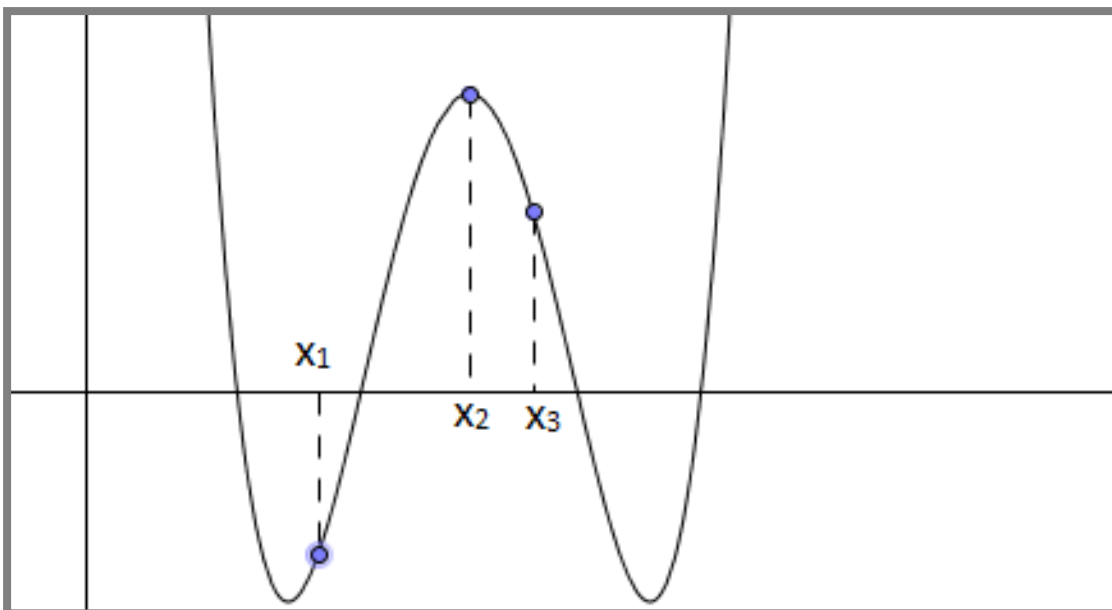
$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow$$

Προσθέτουμε και στα 2 μέλη $\pi/2$:

$$\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 \Leftrightarrow$$

«Περνάμε» σε ημίτονα, αντιστρέφοντας ωστόσο τη φορά, λόγω της (2) :

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

ΘΕΜΑ 2_17698

- α.** Το πιο εύκολο πράγμα στον κόσμο, θα ήταν να απαντήσουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

συγκρίνοντας τις υψομετρικές τους διαφορές, όπως αυτές «φαίνονται» στο σχήμα. Μια πληρέστερα, ωστόσο, απάντηση θα πρέπει να δοθεί αλγεβρικά.

Για την τιμή x_1 , παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παίρνει τιμή «κάτω» από τον άξονα $x'x$, συνεπώς θα είναι αρνητική. Σε αντίθεση με αυτό, στα σημεία x_2, x_3 η συνάρτηση παίρνει τιμές «πάνω» από τον άξονα $x'x$, συνεπώς θα είναι θετική. Άρα, μπορούμε με βεβαιότητα να αποφανθούμε ότι η $f(x_1)$ είναι η μικρότερη από τις τρεις.

Στο διάστημα $[x_2, x_3]$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$x_2 < x_3 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_3)$$

Συνδυάζοντας τα συμπεράσματά μας, με απόλυτη βεβαιότητα πλέον, μπορούμε να πούμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

- β.** Είναι προφανές πως η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, καθώς η μονοτονία της μεταβάλλεται τρεις φορές.

- γ.** Η f παρουσιάζει στο x_2 μόνο τοπικό μέγιστο και όχι ολικό. Αυτό διαπιστώνεται πολύ εύκολα από το σχήμα, καθώς τόσο στον πιο

αριστερό, όσο και στο δεξιότερο κλάδο της γραφικής παράστασης, παρατηρούμε τις τιμές της f να αυξάνονται απεριόριστα.

Να το πούμε και διαφορετικά: αν φέρουμε την παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$, η οποία διέρχεται από το x_2 , δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $f(x) = f(x_2)$, παρατηρούμε ότι αυτή θα τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε 2 σημεία. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν και άλλα σημεία «ψηλότερα» με τεταγμένες, προφανώς, μεγαλύτερες από την $f(x_2)$.

ΘΕΜΑ 2_17699

- α. Εφόσον γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\varphi = 3/5$ και με τη βοήθεια της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$, έχουμε εύκολα:

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \eta\mu^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι η γωνία φ είναι οξεία, επομένως όλοι οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί θα είναι θετικοί. Άρα:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4}{5}$$

- β. Από το σχήμα, είναι φανερό ότι η γωνία ω είναι η παραπληρωματική της φ , ενώ η θ διαφέρει από τη φ κατά π rad. Συνεπώς:

- $\omega = \pi - \varphi$
- $\theta = \pi + \varphi$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τους αντίστοιχους κανόνες αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο, γνωρίζουμε ότι...

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα, αλλά αντίθετα συνημίτονα, άρα:

$$\eta\mu\omega = \eta\mu(\pi - \varphi) = \eta\mu\varphi = \frac{3}{5} \text{ \& } \sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}$$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά π rad έχουν αντίθετα και τα ημίτονα και τα συνημίτονα, άρα:

$$\eta\mu\theta = \eta\mu(\pi + \varphi) = -\eta\mu\varphi = -\frac{3}{5} \text{ \& } \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi + \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ 2_17703**α. 1ος τρόπος**

Λύνουμε τις εξισώσεις των δύο ευθειών, ως προς y , προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές διεύθυνσής τους:

$$(\varepsilon_1) : 2x - y = -1 \Leftrightarrow y = 2x + 1, \text{ άρα } \lambda_1 = 2$$

$$(\varepsilon_2) : (\lambda - 1)x - y = 6 \Leftrightarrow y = (\lambda - 1)x - 6, \text{ άρα } \lambda_2 = \lambda - 1$$

Γνωρίζουμε πως όταν δυο ευθείες είναι παράλληλες, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, άρα πρέπει:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 2 = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

2ος τρόπος

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ (\lambda - 1)x - y = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda - 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (\lambda - 1)(-1) = -2 + \lambda - 1 = \lambda - 3$$

Προκειμένου οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες, αρκεί το σύστημα να είναι αδύνατο. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει καταρχάς:

$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Αυτό, από μόνο του όμως δεν αρκεί, καθώς για $D = 0$ το σύστημα είναι άλλοτε αδύνατο κι άλλοτε αόριστο. Απαιτούμε, επιπλέον, μία εκ των D_x , D_y να είναι διάφορη του μηδενός:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) - 6 \cdot (-1) = 1 + 6 = 7$$

Αφού λοιπόν $D_x \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η προϋπόθεση $\lambda = 3$ είναι αρκετή ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο και, συνεκδοχικά, οι ευθείες παράλληλες.

3ος τρόπος

Αρκεί μονάχα να παρατηρήσουμε τις δύο εξισώσεις. Διαπιστώνουμε ότι για $\lambda - 1 = 2$, τα πρώτα μέλη γίνονται ίσα, ενώ τα δεύτερα μέλη παραμένουν διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων καταλήγει αδύνατο και, συνεπώς, οι ευθείες παράλληλες. Για να συμβούν λοιπόν τα προηγούμενα, αρκεί:

$$\lambda - 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β. Για $\lambda = 3$, οι δύο εξισώσεις γίνονται:

$$(\varepsilon_1) : 2x - y = -1$$

$$(\varepsilon_2) : 2x - y = 6$$

Για την ευθεία (ε_1) :

Για $x = 0$ είναι: $2 \cdot 0 - y = -1 \Leftrightarrow y = 1$, άρα έχουμε το σημείο **$(0, 1)$**

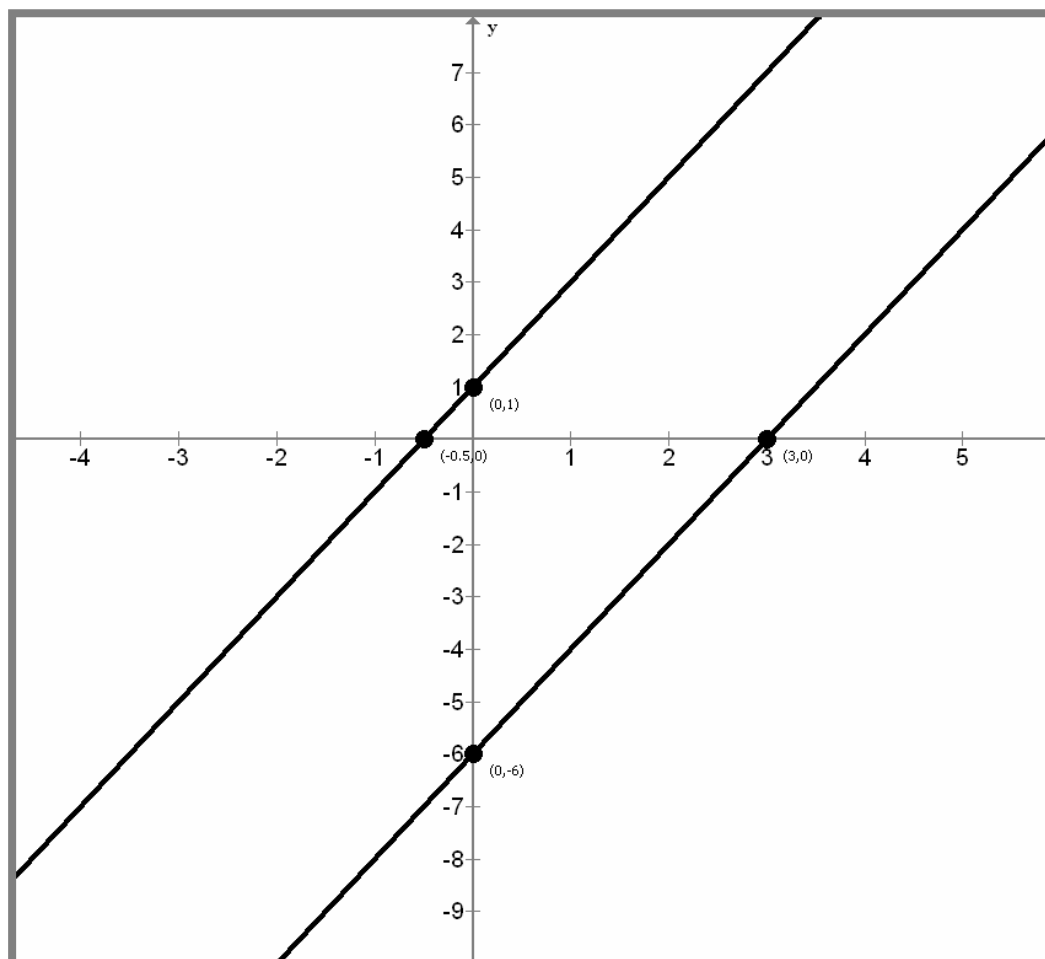
Για $y = 0$ είναι: $2x - 0 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα έχουμε το σημείο **$(-\frac{1}{2}, 0)$**

Για την ευθεία (ε_2) :

Για $x = 0$ είναι: $2 \cdot 0 - y = 6 \Leftrightarrow y = -6$, άρα έχουμε το σημείο **$(0, -6)$**

Για $y = 0$ είναι: $2x - 0 = 6 \Leftrightarrow x = 3$, άρα έχουμε το σημείο **$(3, 0)$**

Προχωρούμε, λοιπόν, στο σχεδιασμό των αντίστοιχων, γραφικών παραστάσεων:



γ. Αν υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε οι δύο ευθείες να ταυτίζονται, τότε για την τιμή αυτή του λ το σύστημα των δύο εξισώσεων θα έπρεπε να βγαίνει αόριστο. Για να συνέβαινε αυτό και δεδομένου πως δεν είναι όλοι οι συντελεστές των αγνώστων μηδενικοί, θα έπρεπε $D = D_x = D_y = 0$. Όμως αυτό είναι αδύνατο, καθώς – όπως εξηγείται στο 2ο τρόπο επίλυσης του (α) ερωτήματος :

- $D = 0$, για $\lambda = 3$.
- $D_x \neq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Με άλλα λόγια, το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \neq 3$, είναι αδύνατο για $\lambda = 3$ και σε καμία περίπτωση δεν είναι αόριστο.

ΘΕΜΑ 2_17704

- α. Με τη βοήθεια του τύπου $T = 2\pi/\omega$, όπου ω ο συντελεστής του x , έχουμε:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi / 2 = \pi$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \sin x \leq 1$. Έχουμε, λοιπόν:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \quad \cdot (-3) \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geq -3 \cdot \sin 2x \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq f(x) \leq 3$$

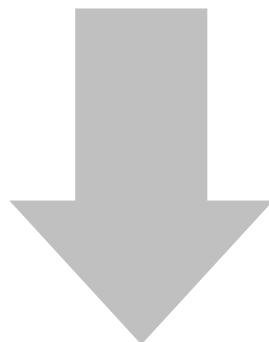
Συνεπώς, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 3 και -3 , αντίστοιχα.

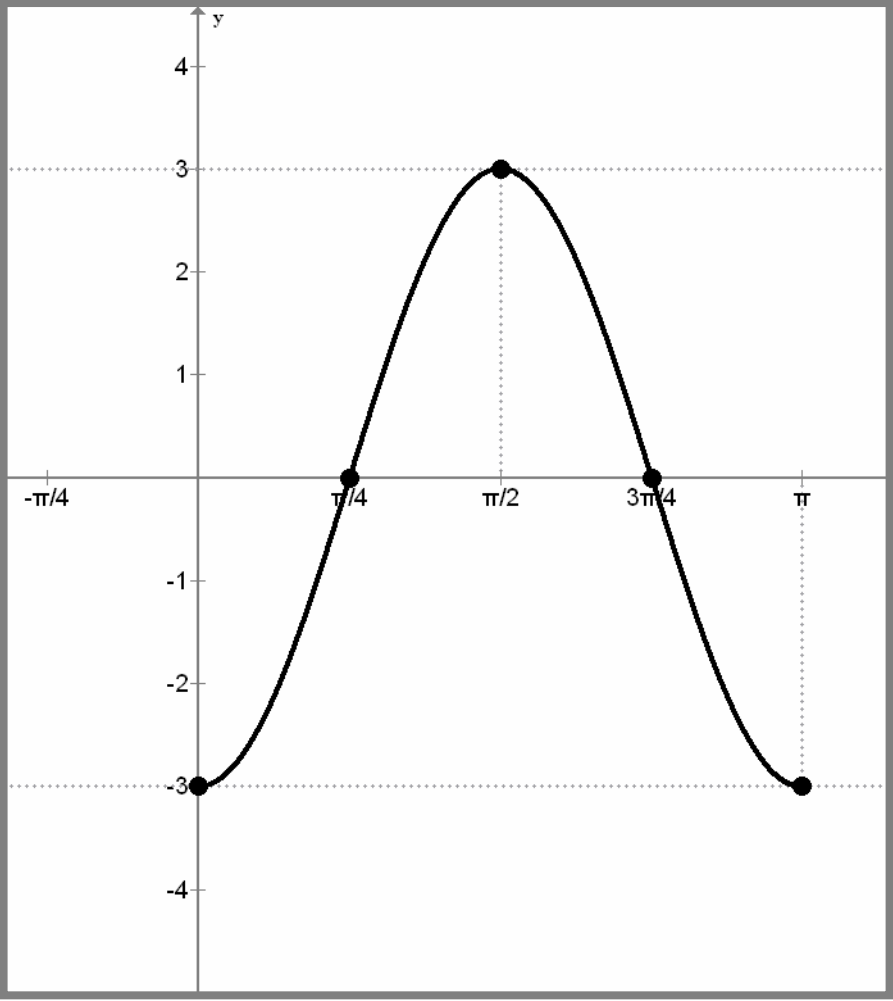
β.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3 \cdot \sin 2x$	-3	0	3	0	-3

Με τη βοήθεια της πρώτης και της τελευταίας σειράς, μπορούμε πλέον να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	-3	0	3	0	-3





ΘΕΜΑ 2_17709

α. i. Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων των $(ε_1)$ και $(ε_2)$:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 3y = -9 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 4y = -4 \Leftrightarrow y = -1$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = -1$ έχουμε:

$$2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την **(3, -1)**, η οποία και αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

ii. Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων των $(ε_1)$ και $(ε_3)$:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{(-2) \cdot} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \begin{cases} -4x - 2y = -10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \begin{cases} -4x - 2y = -10 \\ -x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $x = 3$ έχουμε:

$$2 \cdot 3 + y = 5 \Leftrightarrow 6 + y = 5 \Leftrightarrow y = -1$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την **(3, -1)**, η οποία και αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

β. Από το ερώτημα (α) είναι προφανές ότι και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, με συντεταγμένες **(3, -1)**. Συνεπώς, το σημείο αυτό είναι και κοινό σημείο των $(ε_2)$ και $(ε_3)$.

Ωστόσο, είναι συνετό να εξετάσουμε ότι είναι και το μοναδικό. Όμως, δύο ευθείες που έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία, απλά ταυτίζονται. Θα πρέπει, λοιπόν, να δείξουμε ότι οι $(ε_2)$ και $(ε_3)$ δεν ταυτίζονται. Για το σκοπό αυτό, δε χρειάζεται να λύσουμε ολόκληρο το σύστημα των εξισώσεών τους, ώστε να δείξουμε ότι είναι αόριστο. Αρκεί να φανεί ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός. Έχουμε, λοιπόν, για τις $(ε_2)$: $-2x + 3y = -9$ και $(ε_3)$: $3x + 2y = 7$...

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13 \neq 0$$

Όπερ έδει δείξα... :-)

ΘΕΜΑ 2_17717

α. Αφού το σύνολο όλων των σειρών είναι 25 , άρα:

$$x + y = 25$$

Το κάτω διάζωμα έχει x σειρές με 14 καθίσματα η καθεμία, συνεπώς έχουμε συνολικά **14x** καθίσματα στο διάζωμα αυτό. Αναλόγως σκεπτόμενοι, έχουμε **17y** καθίσματα στο πάνω διάζωμα. Αφού το σύνολο όλων των καθισμάτων είναι 374 , άρα:

$$14x + 17y = 374$$

Συνεπώς, έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases}$$

β. Αρκεί να λύσουμε το σύστημα του (α) ερωτήματος:

1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 25 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ 14(25 - y) + 17y = 374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ 350 - 14y + 17y = 374 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ 3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - 8 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχουν 17 σειρές στο κάτω διάζωμα κι 8 σειρές στο πάνω.

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 25 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases} &\Leftrightarrow (-14) \cdot \begin{cases} x + y = 25 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 14y = -350 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases} \oplus \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 14y = -350 \\ 14x + 17y = 374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 14y = -350 \\ 3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 14y = -350 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 = 25 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = 8$ έχουμε:

$$x + 8 = 25 \Leftrightarrow x = 17$$

Άρα, υπάρχουν 17 σειρές στο κάτω διάζωμα κι 8 σειρές στο πάνω.

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot 17 - 1 \cdot 14 = 17 - 14 = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 374 & 17 \end{vmatrix} = 25 \cdot 17 - 374 \cdot 1 = 425 - 374 = 51$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 14 & 374 \end{vmatrix} = 1 \cdot 374 - 14 \cdot 25 = 374 - 350 = 24$$

Συνεπώς:

$$x = D_x / D = 51 / 3 \Leftrightarrow \mathbf{x = 17} \quad \text{και} \quad y = D_y / D = 24 / 3 \Leftrightarrow \mathbf{y = 8}$$

Άρα, υπάρχουν 17 σειρές στο κάτω διάζωμα κι 8 σειρές στο πάνω.

ΘΕΜΑ 2_17725

α. Με τη βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο, έχουμε:

$$\eta\mu(\pi - 3x) = \eta\mu 3x \text{ και } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \eta\mu 3x$$

αφού γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα, ενώ αντίστοιχα οι συμπληρωματικές εναλλάξ τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Επομένως:

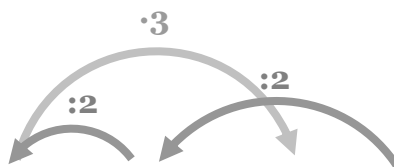
$$f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \eta\mu 3x + \eta\mu 3x = \mathbf{2 \cdot \eta\mu 3x}$$

β. Προτού προχωρήσουμε στη γραφική παράσταση, χρειάζεται να υπολογίσουμε την περίοδο της συνάρτησης, καθώς επίσης να κατασκευάσουμε κατάλληλο πίνακα τιμών.

Όσον αφορά στην περίοδο κι επειδή ο συντελεστής του x είναι $\omega = 3$, έχουμε:

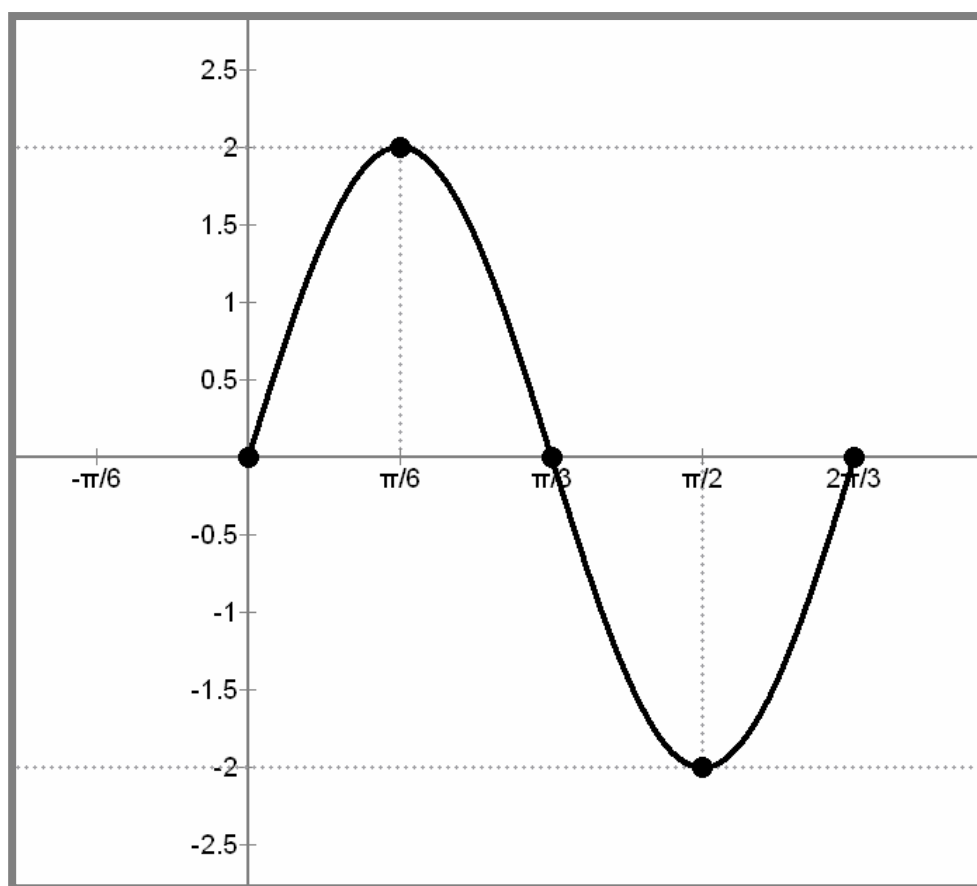
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$$

Δεδομένης τώρα της περιόδου της συνάρτησης, φτιάχνουμε πίνακα τιμών, χωρίζοντας την περίοδο σε 4 ίσα διαστήματα. Παρακάτω, υποδεικνύεται ένας εύκολος τρόπος διαίρεσης οποιασδήποτε περιόδου στα τέσσερα. Στην τελευταία σειρά, παραθέτουμε επίσης τις τιμές της βασικής συνάρτησης $\eta\mu x$, με βάση τις οποίες υπολογίζονται και οι τιμές της συνάρτησης, που εξετάζουμε.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(x) = 2 \cdot \eta\mu 3x$	0	2	0	-2	0
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0

Προχωράμε στη χάραξη της γραφικής παράστασης:



ΘΕΜΑ 2_16732

- α. Το πρώτο ερώτημα είναι παρόμοιο μ' εκείνο του θέματος 2_16962.

Αρκεί να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των τιμών της συνάρτησης, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Γνωρίζουμε επίσης ότι, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος, αναγράφουμε πάντα πρώτη την τετμημένη x και δεύτερη την τεταγμένη y , ενός σημείου. Όμως, όταν αναφερόμαστε σε συναρτήσεις, θυμίζουμε ότι $y = f(x)$.

Συνεπώς, το γεγονός ότι η συνάρτηση διέρχεται απ' το σημείο $A(2, 3)$ σημαίνει ότι για $x_1 = 2$ είναι $f(x_1) = f(2) = 3$, ενώ αναλόγως για το σημείο $B(4, 5)$ σημαίνει ότι για $x_2 = 4$ είναι $f(x_2) = f(4) = 5$.

Παρατηρούμε ότι $x_1 < x_2$ (αφού $2 < 4$) και $f(x_1) < f(x_2)$ (αφού $3 < 5$), δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Εφόσον η ανισοτική σχέση παραμένει ίδιας φοράς, η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$.

- β. Το γεγονός ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου είναι $(-2, 0)$, ή με άλλα λόγια ότι $f(-2) = 0$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$0 > -2$$

Επειδή δείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι:

$$f(0) > f(-2) = 0 \Leftrightarrow f(0) > 0$$

ΘΕΜΑ 2_17734

α. Αρκεί να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων:

1ος τρόπος - Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 12 + 4x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2 \cdot \frac{9}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - \frac{18}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

2ος τρόπος - Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (-2) \cdot \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} 5y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5}$$

Με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση, όπου $y = \frac{12}{5}$ έχουμε:

$$2x + \frac{12}{5} = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow 2x = \frac{18}{5} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$$

3ος τρόπος - Μέθοδος Οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -4 - 1 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 = -12 + 3 = -9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 6 = -6 - 6 = -12$$

Συνεπώς:

$$x = D_x / D = -9 / -5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5} \quad \text{και} \quad y = D_y / D = -12 / -5 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5}$$

Άρα, το κοινό τους σημείο έχει συντεταγμένες $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

- β.** Εφόσον, επιθυμούμε η ευθεία να διέρχεται απ' το σημείο M, τότε θα πρέπει οι συντεταγμένες του M να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή, θα πρέπει:

$$3x + ay = a + 5 \Rightarrow 3 \cdot \frac{9}{5} + a \cdot \frac{12}{5} = a + 5 \Rightarrow \frac{12}{5}a - a = 5 - \frac{27}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a - 5a = 25 - 27 \Rightarrow 7a = -2 \Rightarrow \mathbf{a = -\frac{2}{7}}$$

ΘΕΜΑ 2_17736

- α. Με τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ και τη ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων, έχουμε:

$$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \mathbf{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

- β. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, η εξίσωση μετασχηματίζεται ισοδύναμα, ως εξής:

$$\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$$

Στη συνέχεια, τη λύνουμε κατά τα γνωστά:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Για την 1η λύση έχουμε, στο διάστημα $(0, 2\pi)$:

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη } -\frac{2\pi}{3})$$

$$0 - \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} < 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε το } \pi, \text{ απ' όλα τα μέλη})$$

$$-\frac{2}{3} < 2\kappa < \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε όλα τα μέλη με 2})$$

$$-\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3}$$

Επειδή όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε η μοναδική λύση είναι $\kappa = 0$. Επομένως, η 1η λύση για $\kappa = 0$ γίνεται:

$$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{2\pi}{3}}$$

Ομοίως, για την 2η λύση έχουμε, στο διάστημα $(0, 2\pi)$:

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 < 2k\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 + \frac{2\pi}{3} < 2k\pi - \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} < 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\pi}{3} < 2k\pi < \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3} < 2k < \frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} < k < \frac{4}{3}$$

Επειδή $k \in \mathbb{Z}$, τότε η μοναδική λύση είναι $k = 1$. Επομένως, η 2η λύση για $k = 1$ γίνεται:

$$x = 2 \cdot 1 \cdot \pi - \frac{2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{4\pi}{3}}$$

Δεδομένου του αρχικού μας περιορισμού $x \neq 2k\pi$, καταλήγουμε ότι και οι δύο λύσεις μας είναι δεκτές.

ΘΕΜΑ 2_17739

- α.** Με τη βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο, θυμόμαστε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα, ενώ οι γωνίες που διαφέρουν κατά π τα ημίτονά τους αντίθετα. Επομένως:

$$\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - (-\eta\mu x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

- β.** Λύνουμε την εξίσωση του ερωτήματος (α), κατά τα γνωστά:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Επειδή, όμως, η γωνία που αναζητούμε ανήκει στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, έχουμε για την 1η λύση:

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη } -\frac{\pi}{6})$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} < \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\pi}{6} < 2k\pi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε το } \pi, \text{ απ' όλα τα μέλη})$$

$$\frac{1}{3} < 2k < \frac{5}{6} \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε όλα τα μέλη με } 2)$$

$$\frac{1}{6} < k < \frac{5}{12}$$

Επειδή όμως $k \in \mathbb{Z}$, τότε η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη, καθώς δεν υπάρχει κανένας ακέραιος στο συγκεκριμένο διάστημα.

Ομοίως, για την 2η λύση έχουμε :

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη } -\frac{5\pi}{6})$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} < \pi - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε το } \pi, \text{ απ' όλα τα μέλη})$$

$$-\frac{1}{3} < 2\kappa < \frac{1}{6} \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε όλα τα μέλη με 2})$$

$$-\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{12}$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε η μοναδική λύση είναι $\kappa = 0$. Επομένως, η δεύτερη από τις λύσεις μας, για $\kappa = 0$ γίνεται:

$$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

ΘΕΜΑ 2_17741

α. $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} =$

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα:

$$\frac{\eta\mu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} + \frac{\eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x)} =$$

Τα ενώνουμε σε ένα κλάσμα:

$$\frac{\eta\mu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu x)}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

Επιμεριστική ιδιότητα και αναγωγή ομοίων όρων:

$$\frac{\eta\mu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$\frac{2\eta\mu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

Διαφορά τετραγώνων στον παρονομαστή:

$$\frac{2\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

Βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$:

$$= \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

Εννοείται, φυσικά, ότι πολλά από τα προηγούμενα βήματα θα μπορούσαν να είχαν εκτελεστεί ταυτόχρονα. Εδώ δεν έγινε, για καθαρά διδακτικούς κι επεξηγηματικούς λόγους.

β. Δεδομένου του ερωτήματος (α) , η εξίσωση:

$$\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

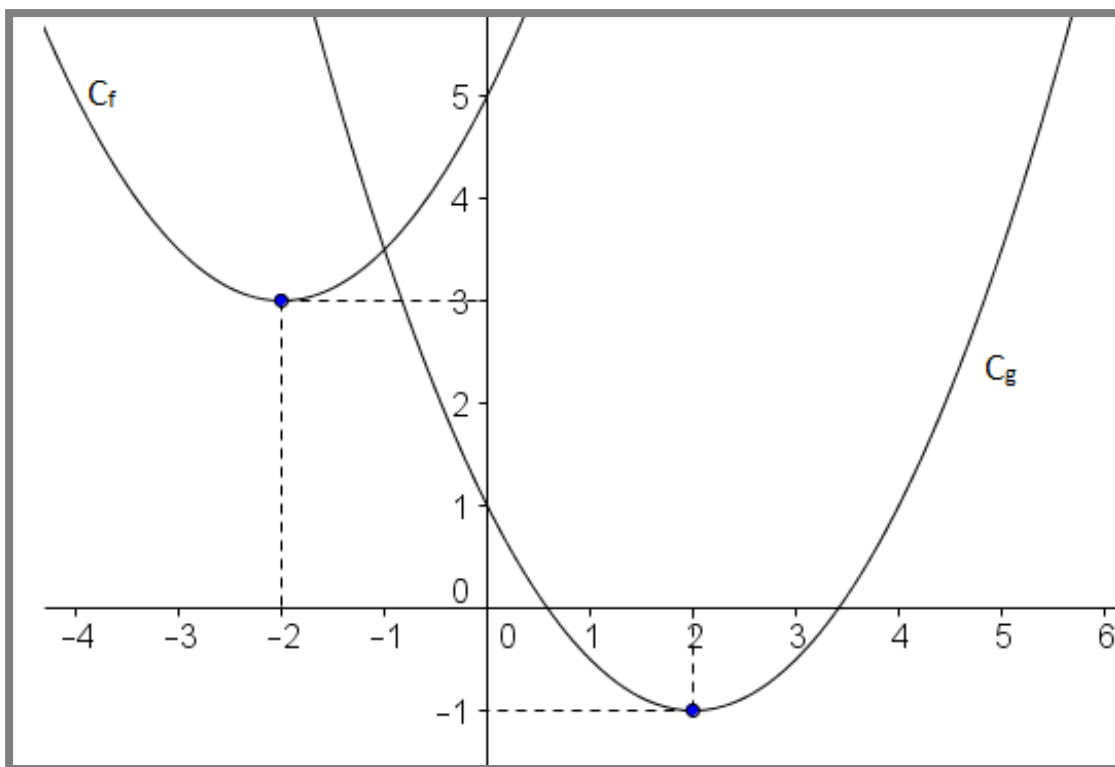
γίνεται ισοδύναμα:

$$\frac{2}{\eta\mu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4 \cdot \eta\mu x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

την οποία και λύνουμε, κατά τα γνωστά:

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Δεδομένου, από τις ανάγκες της εκφώνησης, υπάρχει περιορισμός $x \neq \kappa\pi$ διαπιστώνουμε ότι και οι δύο λύσεις μας είναι δεκτές.

ΘΕΜΑ 2_18632

α. Με τη βοήθεια του σχήματος, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η συνάρτηση f είναι:

- **γνησίως φθίνουσα** , στο διάστημα $(-\infty, -2)$
- **γνησίως αύξουσα** , στο διάστημα $(-2, +\infty)$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = -2$, το οποίο είναι ίσο με 3 .

β. Όταν μετατοπίζεται μια γραφική παράσταση, τότε κάθε σημείο της υπόκειται στην ίδια ακριβώς μετατόπιση με όλα τα υπόλοιπα. Συνεπώς, αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός μοναδικού σημείου, το οποίο μας είναι γνωστό.

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, είναι δεδομένες τόσο οι παλιές, όσο και οι νέες συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής. Πιο συγκεκριμένα, η κορυφή έχει μετακινηθεί από τη θέση $(-2, 3)$ στη $(2, -1)$. Αυτό σημαίνει, με απλά λόγια, ότι έχει μετακινηθεί 4 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα κάτω.

Επειδή, το αυτό θα έχει συμβεί με ολόκληρη τη γραφική παράσταση, μπορούμε τελικά να γράψουμε ότι:

$$g(x) = f(x - 4) - 4$$

ΘΕΜΑ 2_18634

α. 1ος τρόπος:

Μετασχηματίζουμε κατάλληλα τον τύπο της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19 =$$

$$2x^2 - 12x + 18 + 1 = (\text{διάσπαση όρου})$$

$$2(x^2 - 6x + 9) + 1 = (\text{κοινός παράγοντας απ' τους 3 πρώτους όρους})$$

$$2(x - 3)^2 + 1 \text{ (ταυτότητα)}$$

2ος τρόπος:

Εκτελούμε τις πράξεις, στην προς απόδειξη σχέση::

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 1 =$$

$$2(x^2 - 6x + 9) + 1 = (\text{ταυτότητα})$$

$$2x^2 - 12x + 18 + 1 = (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$2x^2 - 12x + 19 \text{ (αναγωγή ομοίων όρων)}$$

- β. Παρατηρώντας τις εξισώσεις της $g(x) = 2x^2$ και της $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$, παρατηρούμε εύκολα ότι η δεύτερη δεν είναι παρά μια μετατόπιση της πρώτης, κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.

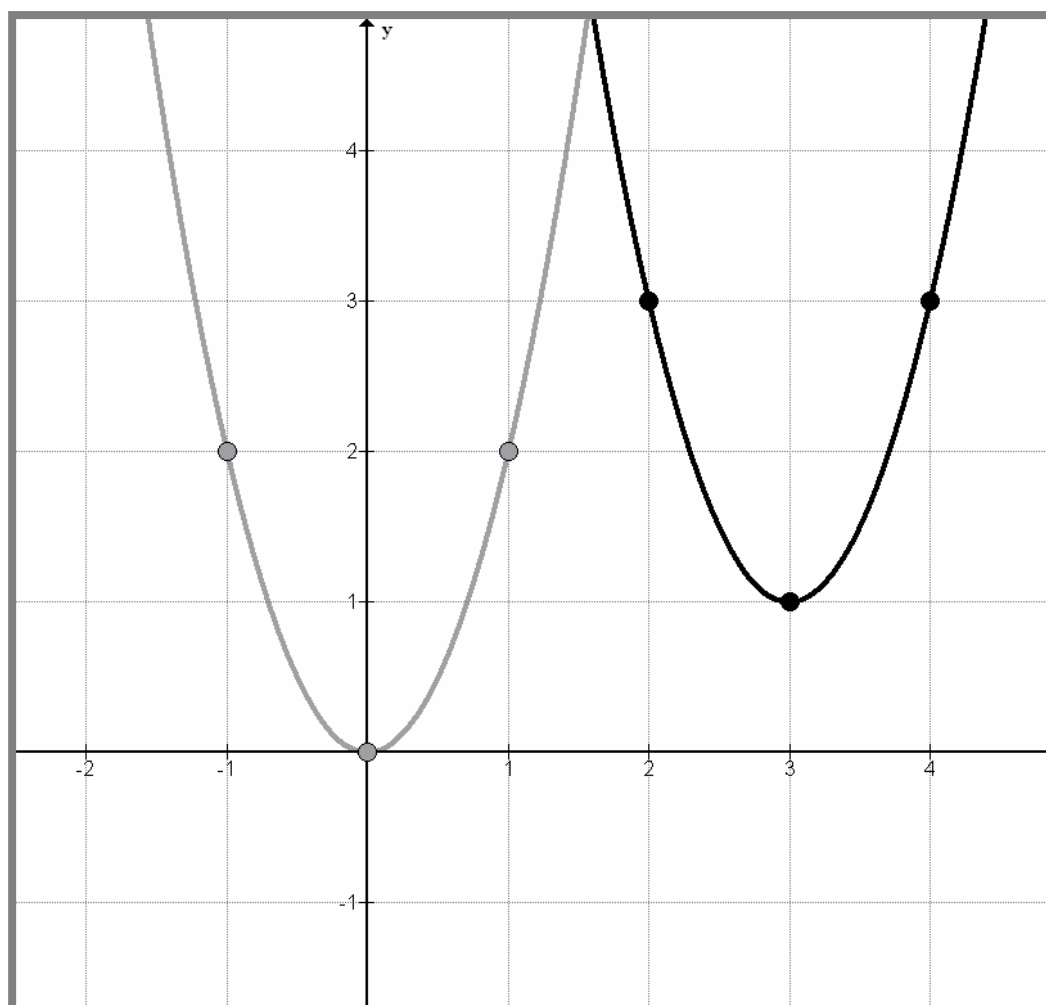
Τα όρια του δοσμένου σχήματος δε μας αφήνουν μεγάλα περιθώρια να «παίζουμε» με την ακρίβεια του πλέγματος, δηλαδή επιλέγοντας σημεία των οποίων οι συντεταγμένες να είναι ακέραιοι αριθμοί. Έτσι, κατασκευάζουμε αρχικά έναν - σχετικά μικρό - πίνακα τιμών για τη g :

x	-1	0	1
g(x)	2	0	2

Για τον αντίστοιχο πίνακα της f , αρκεί να αυξήσουμε τα x κατά 3 μονάδες, ώστε να μετατοπίσουμε τις τετμημένες προς τα δεξιά, ενώ τα $g(x)$ κατά 1 μονάδα, ώστε να μετατοπιστούν οι τεταγμένες προς τα πάνω. Συνεπώς, έχουμε:

x	-1	0	1	+ 3	x	2	3	4
g(x)	2	0	2	+ 1	f(x)	3	1	3

Με όλα αυτά κατά νου, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατασκευή της γραφικής παράστασης της f .



ΘΕΜΑ 2_18637

- α.** Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow 1\alpha - 4\beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha - 4\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 1 \cdot \beta - \alpha \cdot (-2) = \beta + 2\alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \beta + 2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -2\alpha$$

Τελικά, οι παράμετροι α , β , γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha - 4\beta - \gamma = 0 \quad (\text{με } \beta \neq -2\alpha)$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α , β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\beta \neq -2\alpha$), έστω $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, οπότε έχουμε:

$$\alpha - 4\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 \cdot 1 - \gamma = 0 \Leftrightarrow -2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 2$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: **$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 2)$**

- β.** Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, **$\beta = -2\alpha$** (1).

Θα πρέπει όμως, επίσης, ένα από τα D_x , D_y να είναι διάφορο του μηδενός.

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 9 \cdot \beta - \gamma \cdot (-2) = 9\beta + 2\gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 1 \cdot \gamma - \alpha \cdot 9 = \gamma - 9\alpha$$

Οπότε:

$$D_x \neq 0 \Leftrightarrow 9\beta + 2\gamma \neq 0 \Leftrightarrow 2\gamma \neq -9\beta \Leftrightarrow \gamma \neq -\frac{9}{2}\beta$$

ή

$$D_y \neq 0 \Leftrightarrow \gamma - 9\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 9\alpha$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\beta = -2\alpha$!

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο α , έστω $\alpha = 2$, οπότε από (1) έχουμε:

$$\beta = -2\alpha \Leftrightarrow \beta = -2 \cdot 2 \Leftrightarrow \beta = -4$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα προηγούμενα και προκειμένου το σύστημα να είναι αδύνατο, θα πρέπει:

$$\gamma \neq 9\alpha \Leftrightarrow \gamma \neq 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \gamma \neq 18$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο, είναι: **$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 10)$**

Στην περίπτωση αυτή, τελικά το αρχικό μας σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 & (1) \\ 2x - 4y = 10 & (2) \end{cases}$$

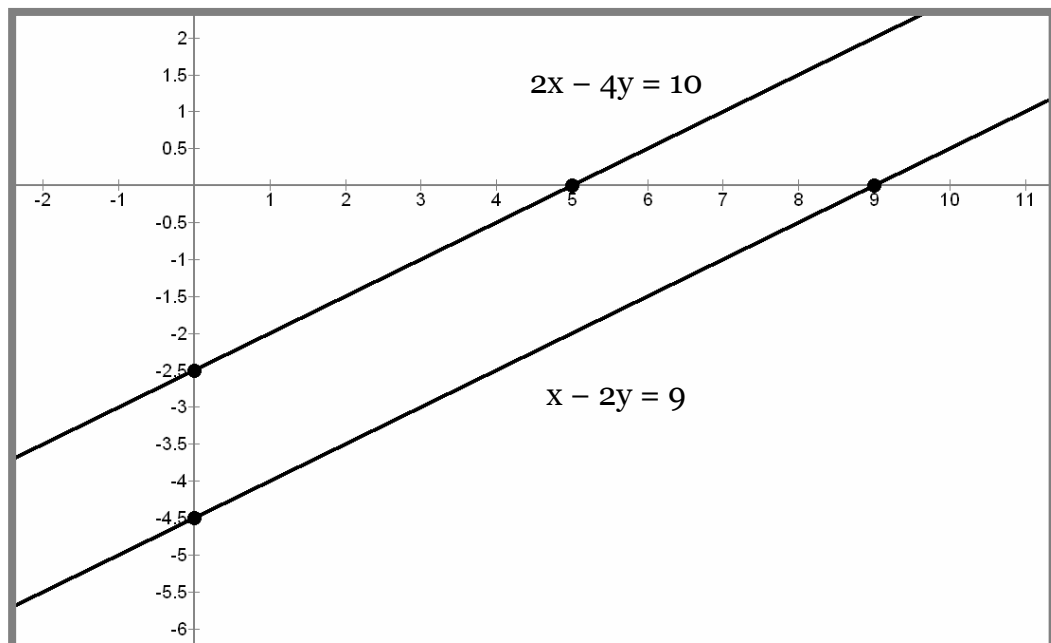
Το τελευταίο, γραφικά θα έχει ως εξής:

(1)

x	0	9
y	- 9/2	0

(2)

x	0	5
y	- 5/2	0



ΘΕΜΑ 2_18637

- α.** Με απλή αντικατάσταση, των συντεταγμένων της λύσης, στη 2η εξίσωση την οποία χρειάζεται να επαληθεύουν, παίρνουμε τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 5 = \gamma \Leftrightarrow -\alpha + 5\beta - \gamma = 0$$

Ωστόσο, χρειάζεται ακόμη μία προϋπόθεση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος και απαιτούμε να είναι διάφορη του μηδενός, ώστε η δοθείσα λύση να είναι μοναδική:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 2 \cdot \beta - \alpha \cdot 1 = 2\beta - \alpha$$

Συνεπώς, για να είναι η λύση μοναδική, θα πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 2\beta - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2\beta$$

Τελικά, οι παράμετροι α , β , γ θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση:

$$-\alpha + 5\beta - \gamma = 0 \quad (\text{με } \alpha \neq 2\beta)$$

Θέτουμε, λοιπόν, δύο τυχαίες τιμές στις παραμέτρους α , β (με τήρηση της προϋπόθεσης $\alpha \neq 2\beta$), έστω $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, οπότε έχουμε:

$$-\alpha + 5\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow -1 + 5 \cdot 2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow 9 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 9$$

Άρα, μια πιθανή τριάδα τιμών για τις παραμέτρους, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση τη ζητούμενη, είναι: **$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 9)$**

- β.** Καταρχάς, προκειμένου το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει $D = 0$ ή, τελικά, **$\alpha = 2\beta$** (1).

Θα πρέπει όμως, επιπλέον, να είναι και τα D_x , D_y ίσα με μηδέν.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = 3 \cdot \beta - \gamma \cdot 1 = 3\beta - \gamma$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot \gamma - \alpha \cdot 3 = 2\gamma - 3\alpha$$

Οπότε:

$$D_x = 0 \Leftrightarrow 3\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 3\beta$$

και

$$D_y = 0 \Leftrightarrow 2\gamma - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{3}{2}\alpha$$

Τα οποία όμως, τελικά, είναι ισοδύναμα, αφού λόγω (1) είναι $\alpha = 2\beta$!

Λαμβάνοντας τα προηγούμενα, κάθε τριάδα της παρακάτω μορφής οδηγεί σε αόριστο σύστημα:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2\beta, \beta, 3\beta)$$

Θέτουμε, λοιπόν, μια τυχαία τιμή στην παράμετρο β , έστω $\beta = 2$, οπότε έχουμε:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (4, 2, 6)$$

Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, το αρχικό μας σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 4x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

Αλγεβρικά, παρατηρούμε ήδη ότι οι (1) και (2) ταυτίζονται, καθώς η δεύτερη είναι η πρώτη, πολλαπλασιασμένη με 2. Προχωρούμε, τώρα, στη γραφική επαλήθευση:

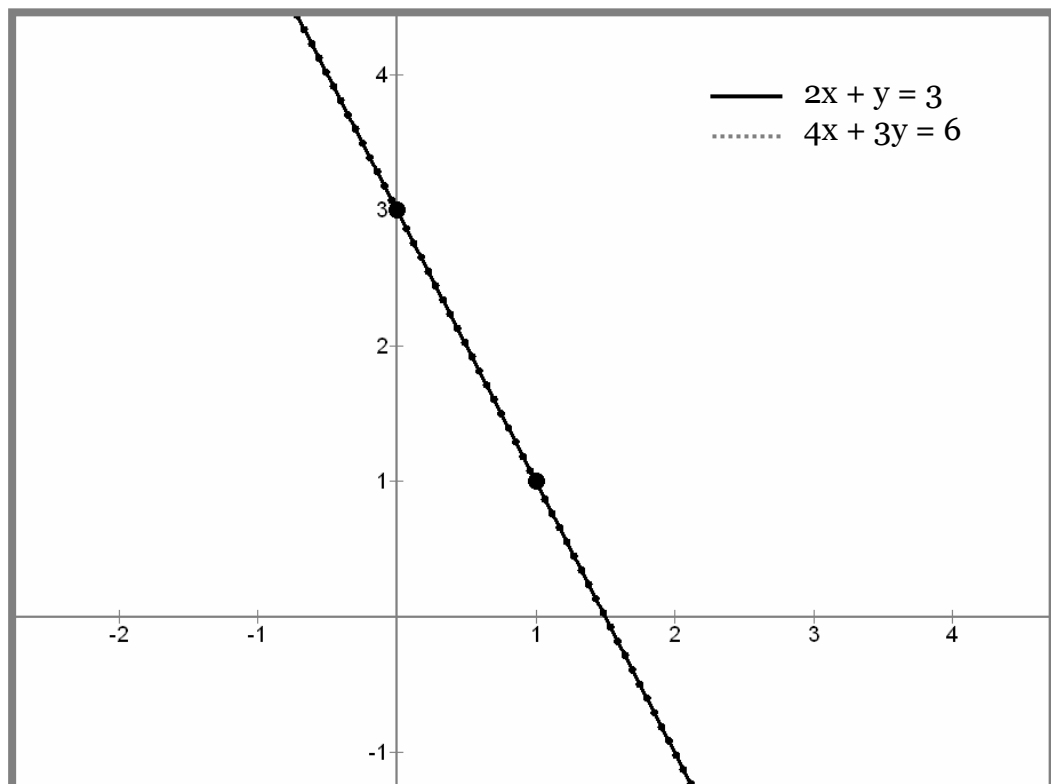
(1)

x	0	1
y	3	1

(2)

x	0	1
y	3	1

Παρατηρούμε ότι, για τις ίδιες τιμές του x , οι δύο εξισώσεις παράγουν τα ίδια ζεύγη συντεταγμένων, δηλαδή τα ίδια ακριβώς σημεία. Όμως, από δύο σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία.



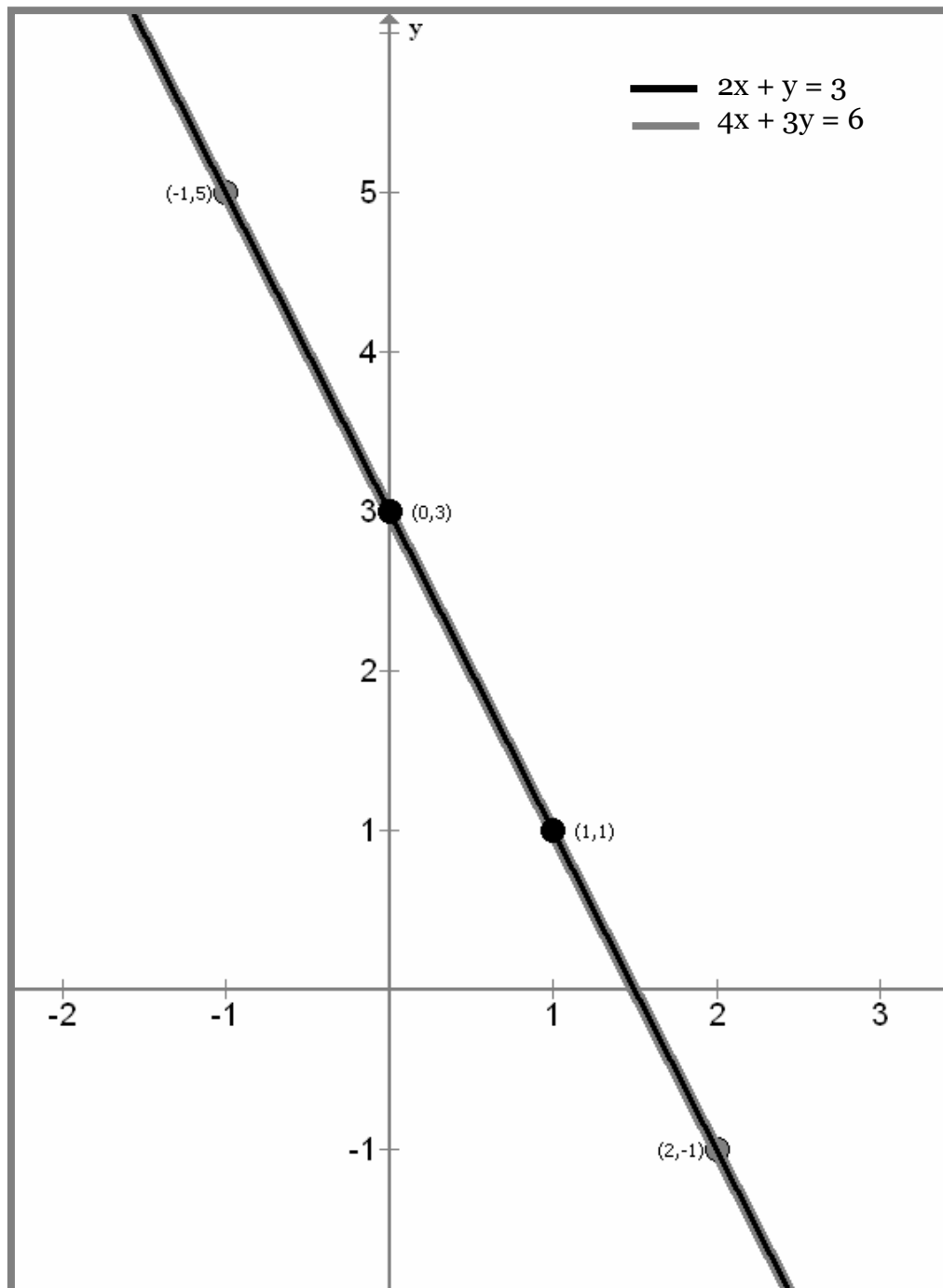
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε στη μεταβλητή x εντελώς διαφορετικές τιμές, σε κάθε πίνακα:

(1)

x	0	1
y	3	1

(2)

x	-1	2
y	5	-1



ΘΕΜΑ 2_19911

α. Γνωρίζουμε για το ημίτονο αθροίσματος ότι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο, στη ζητούμενη σχέση, έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} = \\ &= \eta\mu x \cdot \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x\end{aligned}$$

β. Δεδομένου του ερωτήματος (α), η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x = 0$$

γίνεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 &\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2κ\pi + 0 \\ x + \frac{\pi}{3} = 2κ\pi + \pi - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2κ\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = 2κ\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2κ\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2κ\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (κ \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Εφόσον ζητούμε τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $(0, \pi)$, έχουμε:

Για την 1η λύση:

$$x \in (0, \pi) \Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < 2κ\pi - \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow$$

$$0 + \frac{\pi}{3} < 2κ\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} < \pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε } \frac{\pi}{3} \text{ σε όλα τα μέλη})$$

$$\frac{\pi}{3} < 2κ\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε το } \pi, \text{ από όλα τα μέλη})$$

$$\frac{1}{3} < 2κ < \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε όλα τα μέλη με } 2)$$

$$\frac{1}{6} < κ < \frac{2}{3}$$

Επειδή όμως $k \in \mathbb{Z}$, η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη. Συνεπώς, η πρώτη σχέση δε μας δίνει λύσεις, στο διάστημα $(0, \pi)$.

Για τη 2η λύση:

$$x \in (0, \pi) \Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{2\pi}{3} < 2k\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} < \pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$- \frac{2\pi}{3} < 2k\pi < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$- \frac{2}{3} < 2k < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$- \frac{1}{3} < k < \frac{1}{6}$$

Όμως $k \in \mathbb{Z}$, άρα η ανίσωση έχει μοναδική, ακέραια λύση για $k = 0$. Συνεπώς, από τη δεύτερη σχέση και για $k = 0$, παίρνουμε τη λύση:

$$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

ΘΕΜΑ 2_19912

α. Γνωρίζουμε για το διπλάσιο τόξου, ότι:

$$\sin 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha$$

Επομένως, η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$-\sin 2\omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(1 - 2\eta\mu^2 \omega) + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 + 2\eta\mu^2 \omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^2 \omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$$

β. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

$$2\eta\mu^2 \omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$$

Όμως, η τελευταία δεν είναι παρά μια εξίσωση 2ου βαθμού, ως προς $\eta\mu\omega$. Γενικά, υπάρχει η συνήθεια στις περιπτώσεις αυτές, να θέτουμε μια νέα μεταβλητή στη θέση της άγνωστης ποσότητας (πχ. $\eta\mu\omega = y$), ώστε έτσι να απλοποιηθεί η εξίσωση. Όταν όμως η μορφή της άγνωστης ποσότητας είναι τόσο απλή, όσο στην περίπτωσή μας, μια τέτοια διαδικασία θα ήταν απλά περιττός κόπος.

Απευθείας, λοιπόν: $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = -3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$$

$$\eta\mu\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \eta\mu\omega_1 = \frac{1}{2} \\ \eta\mu\omega_2 = -3 \end{cases}$$

Όμως, η δεύτερη λύση απορρίπτεται, δεδομένου ότι $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$.

Ωστόσο, η πρώτη λύση $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ είναι δεκτή.

Επιπλέον, είναι και το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2_19914

- α. Καθώς πρόκειται για παραβολή, με $a = 1 > 0$, η συνάρτηση θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για x ίσο με την τετμημένη της κορυφής, της παραβολής. Γνωρίζουμε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής δίνονται απ' τις σχέσεις:

$$K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Είναι $f(x) = x^2 - 5$, δηλαδή $a = 1$, $\beta = 0$ και $\gamma = -5$. Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστο για:

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$$

- β. Καταρχάς, το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = \mathbb{R}$, πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε $x \in A_f$ είναι και $-x \in A_f$.

1ος τρόπος

Συνεπώς, μπορούμε να συνεχίσουμε θέτοντας όπου x το $-x$, στην εξίσωση της f :

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$$

Δηλαδή, η f είναι **άρτια**.

2ος τρόπος

Γνωρίζουμε ότι μια παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2a}$, η οποία στην περίπτωσή μας - από το προηγούμενο ερώτημα - είναι η ευθεία $x = 0$. Όμως, η ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δεν είναι άλλη από τον άξονα $y'y$. Με άλλα λόγια, η f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει πως είναι **άρτια**.

- γ. Είναι προφανές ότι $f(x) = x^2 - 5 = g(x) - 5$, επομένως πρόκειται για μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 5 μονάδες, προς τα κάτω.

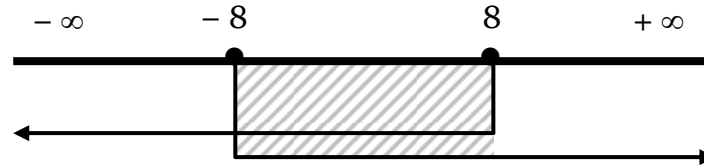
ΘΕΜΑ 4_17833

α. Πρέπει:

$$8 - x \geq 0 \text{ και } 8 + x \geq 0$$

ισοδύναμα:

$$x \leq 8 \text{ και } x \geq -8$$



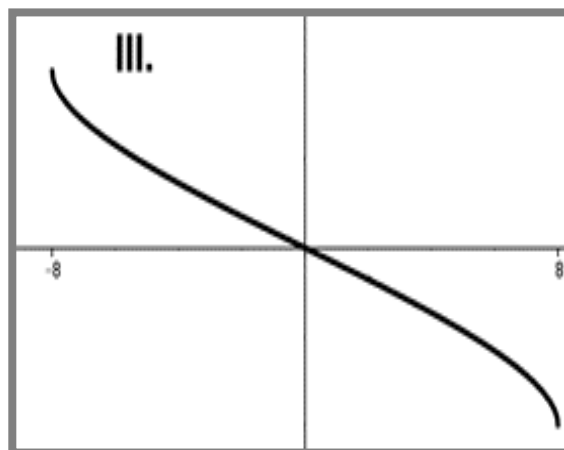
Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι $A_f = [-8, 8]$.

β. Εφόσον το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς την αρχή του άξονα των πραγματικών, άρα για κάθε $x \in A_f$ είναι και $-x \in A_f$. Επομένως, προχωρούμε στην εξέταση του $f(-x)$:

$$f(-x) = \sqrt{8 - (-x)} - \sqrt{8 - x} = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x} = -(\sqrt{8 - x} - \sqrt{8 + x}) = f(x)$$

Συνεπώς, η f είναι **περιττή**.

γ. Εφόσον η f είναι περιττή, θα πρέπει να έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $(0, 0)$, άρα η περίπτωση (I) απορρίπτεται. Όμως η f , από την υπόθεση, είναι επιπλέον γνησίως φθίνουσα. Τελικά, η σωστή γραφική παράσταση είναι η (III).



Από τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι θα παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο $x_1 = -8$, ενώ την ελάχιστη στο σημείο $x_2 = 8$. Άρα, θα είναι:

- Μέγιστη τιμή : $f(-8) = \sqrt{8 - (-8)} - \sqrt{8 - 8} = \sqrt{16} - \sqrt{0} = 4$
- Ελάχιστη τιμή : $f(8) = \sqrt{8 - 8} - \sqrt{8 + 8} = \sqrt{0} - \sqrt{16} = -4$

δ. Γραφική ερμηνεία

Η f ως περιττή έχει κεντρική συμμετρία και όχι αξονική, συνεπώς αν η γραφική της παράσταση μετατοπιστεί οριζόντια ή κατακόρυφα, αυτό δεν πρόκειται να αλλοιώσει το είδος της συμμετρίας, παρά μόνο τις συντεταγμένες του κέντρου της.

Έχοντας αυτά κατά νου, διαπιστώνουμε ότι:

- η $g(x) = f(x) - 3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της f , κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, ενώ...
- η $h(x) = f(x + 3)$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της f , κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

Συνεπώς, τόσο η g όσο και η h , παρά το γεγονός ότι θα έχουν διατηρήσει τη κεντρική τους συμμετρία, δε θα είναι πλέον περιττές καθώς, σύμφωνα με τον ορισμό, δε θα έχουν ως κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Φυσικά, δε θα είναι ούτε άρτιες, αφού το είδος της συμμετρίας δεν επηρεάστηκε στο παραμικρό.

Αλγεβρική ερμηνεία

Για τη συνάρτηση g έχουμε:

- Ίδιο πεδίο ορισμού
- $$g(-x) = \sqrt{8 - (-x)} - \sqrt{8 - x} - 3 = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x} - 3 =$$
$$= -(\sqrt{8 - x} - \sqrt{8 + x}) - 3 \neq -g(x) \text{ ή } g(x)$$

Επομένως, η g δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

$$h(x) = f(x + 3) = \sqrt{8 - (x + 3)} - \sqrt{8 + x + 3} = \sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 11}$$

Όμως, το πεδίο ορισμού της h είναι:

$$5 - x \geq 0 \text{ και } x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \text{ και } x \geq -11 \Leftrightarrow -11 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$A_h = [-11, 5]$$

Για το τελευταίο όμως δεν ισχύει η προϋπόθεση, για κάθε $x \in [-11, 5]$ να είναι και $-x \in [-11, 5]$. Για παράδειγμα, το x μπορεί να πάρει την τιμή -9 , αλλά όχι την τιμή 9 , αφού η τελευταία δεν ανήκει στο A_h .

Συνεπώς, η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

ΘΕΜΑ 4_17834

α. Έστω: x = η ηλικία της μητέρας

y = η ηλικία του πατέρα

z = η ηλικία του παιδιού

Τότε τα λεκτικά δεδομένα εκφράζονται στη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, ως εξής:

- Η ηλικία της μητέρας τριπλάσια από του παιδιού: $x = 3 \cdot z$
- Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς του παιδιού: $\frac{y}{z} = \frac{11}{3}$
- Το άθροισμα όλων των ηλικιών: $x + y + z = 115$

Συνεπώς, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{x = 3z} \\ \mathbf{\frac{y}{z} = \frac{11}{3}} \\ \mathbf{x + y + z = 115} \end{cases}$$

β. Λύνουμε το σύστημα του προηγούμενου ερωτήματος:

$$\begin{cases} x = 3z \\ \frac{y}{z} = \frac{11}{3} \\ x + y + z = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z & (1) \\ y = \frac{11}{3}z & (2) \\ x + y + z = 115 & (3) \end{cases}$$

Με αντικατάσταση στην (3) από τις (1), (2) έχουμε:

$$3z + \frac{11}{3}z + z = 115 \xrightarrow{\cdot 3} 9z + 11z + 3z = 345 \Leftrightarrow 23z = 345 \Leftrightarrow \mathbf{z = 15}$$

Συνεπώς, από την (1) έχουμε: $x = 3z = 3 \cdot 15 \Leftrightarrow \mathbf{x = 45}$

Ενώ από την (2) έχουμε: $y = \frac{11}{3}z = \frac{11}{3} \cdot 15 \Leftrightarrow \mathbf{y = 55}$

Άρα, η μητέρα είναι 45 ετών, ο πατέρας 55 και το παιδί τους 15.

ΘΕΜΑ 4_17835

- α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα των δύο εξισώσεων, για τις διάφορες τιμές του λ :

$$\begin{cases} x + (\lambda + 2)y = 3 \\ (\lambda - 2)x + 5y = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 2 \\ \lambda - 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 2) = 5 - (\lambda^2 - 4) = 5 - \lambda^2 + 4 = 9 - \lambda^2 = (\mathbf{3 - \lambda})(\mathbf{3 + \lambda})$$

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} 3 & \lambda + 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 3 \cdot (\lambda + 2) = 15 - 3\lambda - 6 = 9 - 3\lambda = \mathbf{3(3 - \lambda)}$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda - 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot (\lambda - 2) = 3 - 3\lambda + 6 = 9 - 3\lambda = \mathbf{3(3 - \lambda)}$$

- Αν $\mathbf{D \neq 0} \Leftrightarrow (3 - \lambda)(3 + \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{\lambda \neq 3}$ και $\mathbf{\lambda \neq -3}$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** . Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **τέμνονται** .

- Αν $\mathbf{D = 0} \Leftrightarrow \mathbf{\lambda = 3}$ ή $\mathbf{\lambda = -3}$ τότε...

- Για $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + (3 + 2)y = 3 \\ (3 - 2)x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 3 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

που είναι **αόριστο** . Αυτό σημαίνει ότι για $\lambda = 3$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται** .

- Για $\lambda = -3$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + (-3 + 2)y = 3 \\ (-3 - 2)x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -5x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -5x + 5y = -15 \end{cases}$$

που είναι **αδύνατο** . Αυτό σημαίνει ότι για $\lambda = -3$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες** .

β. Στην περίπτωση που $D \neq 0$ έχουμε ως μοναδική λύση την:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{3(3-\lambda)}{(3-\lambda)(3+\lambda)} = \frac{3}{3+\lambda}$$

$$y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{3(3-\lambda)}{(3-\lambda)(3+\lambda)} = \frac{3}{3+\lambda}$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι:

$$A(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{3+\lambda}, \frac{3}{3+\lambda} \right)$$

Ως παρατήρηση, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου A θα βρίσκονται, κάθε φορά, πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, δηλαδή τη διχοτόμο του 1ου - 3ου τεταρτημορίου.

γ. Προκειμένου το A να ανήκει, επιπλέον, στην ευθεία $x + 2y = 3$, θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με άλλα λόγια, θα πρέπει:

$$x_0 + 2y_0 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{3+\lambda} + 2\frac{3}{3+\lambda} = 3 \Leftrightarrow$$

$$(3+\lambda)\frac{3}{3+\lambda} + 2(3+\lambda)\frac{3}{3+\lambda} = 3(3+\lambda) \Leftrightarrow$$

$$3 + 6 = 9 + 3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

ΘΕΜΑ 4_17837

- α.** Γνωρίζουμε ότι σε μια τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega \cdot x)$, ο συντελεστής του x μεταβάλλει την περίοδο, ενώ ο συντελεστής του τριγωνομετρικού αριθμού τα ακρότατα.

Η περίοδος, η οποία από την υπόθεση είναι γνωστή και ίση με 4, δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi/\omega$, συνεπώς:

$$T = 4 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 4 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta\pi} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\beta} = 4 \Leftrightarrow 4\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Επιπλέον, εφόσον η μέγιστη τιμή δίνεται ίση με 3, θα πρέπει:

$$|\alpha + 1| = 3 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 3 \text{ ή } \alpha + 1 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -4$$

- β.** Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1/2$ η συνάρτηση f γίνεται: $f(x) = 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Άρα:

i. $f(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 3 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}x = 2κπ + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}x = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}x = 2κπ + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}x = 2κπ + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 2κπ + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

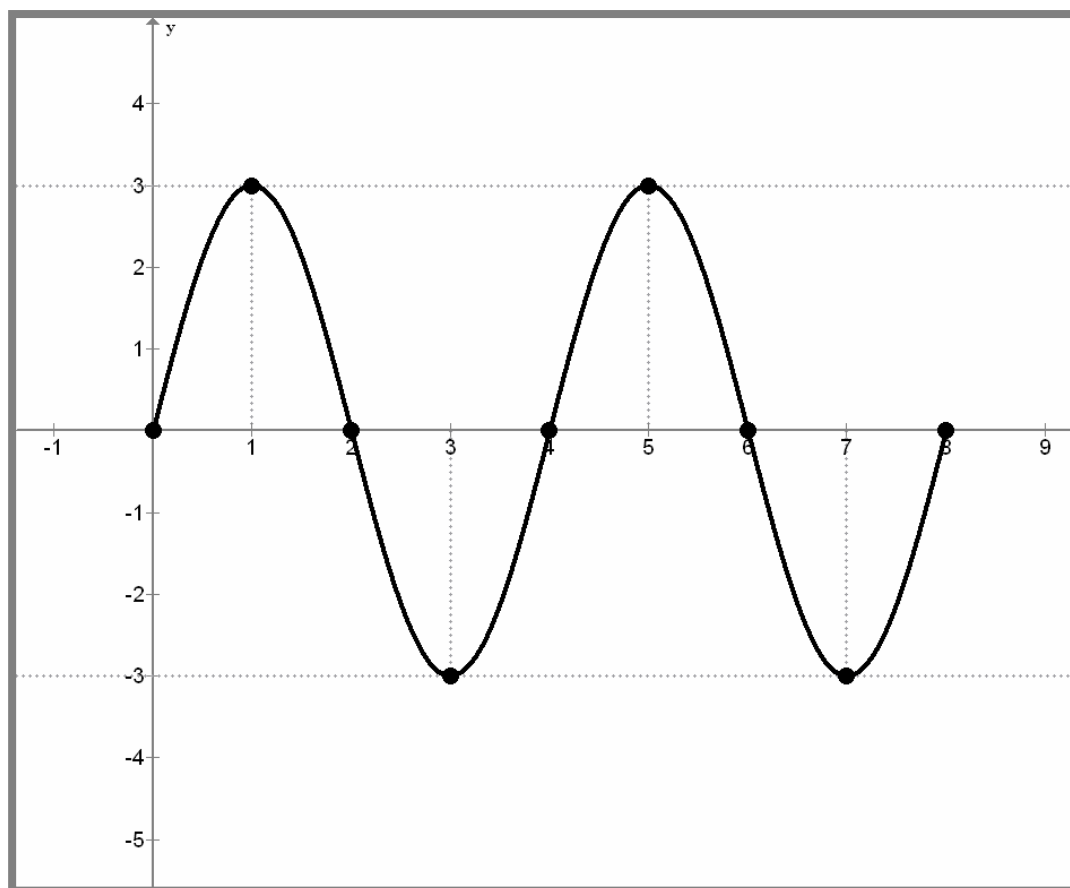
$$\Leftrightarrow \overset{\cdot 2}{\pi x} = 4κπ + \pi \Leftrightarrow \overset{:\pi}{x} = 4κ + 1 \quad (κ \in \mathbb{Z})$$

- ii.** Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών της συνάρτησης, για το διάστημα $[0, 8]$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

ημx **0** **1** **0** **-1** **0** **1** **0** **-1** **0**

Είμαστε, πλέον, έτοιμοι να προχωρήσουμε και στον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης:



ΘΕΜΑ 4_17838

α. Γνωρίζουμε ότι: $\sin 2\omega = 2 \cdot \sin \omega \cos \omega - 1$. Άρα, η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$5 \sin 2\omega + 28 \sin \omega + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5(2 \sin \omega \cos \omega - 1) + 28 \sin \omega + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \sin \omega \cos \omega - 5 + 28 \sin \omega + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10 \sin \omega \cos \omega + 28 \sin \omega + 16 = 0 \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε με το } 2)$$

$$5 \sin \omega \cos \omega + 14 \sin \omega + 8 = 0$$

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 196 - 160 = \mathbf{36}$$

$$\sin \omega_{1,2} = \frac{-14 \pm 6}{10} = \begin{cases} \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5} \\ \frac{-20}{10} = -2 \end{cases}$$

Εφόσον είναι $-1 \leq \sin x \leq 1$, η λύση -2 απορρίπτεται, συνεπώς:

$$\sin \omega = \mathbf{-\frac{4}{5}}$$

β. i. Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$, υπολογίζουμε επιπλέον το ημίτονο της γωνίας ω :

$$\eta^2 \omega = 1 - \sin^2 \omega = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta \omega = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

Εφόσον δίνεται ότι η ω ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο ($\pi/2 < \omega < \pi$), θα έχει ημίτονο θετικό, άρα κρατάμε μόνο τη θετική λύση. Τελικά:

$$\eta \omega = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις διπλάσιου τόξου, έχουμε στη συνέχεια:

$$\sin 2\omega = 2 \cdot \sin \omega \cos \omega - 1 = 2 \left(-\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{32}{25} - 1 \Leftrightarrow \sin 2\omega = \mathbf{\frac{7}{25}}$$

$$\eta 2\omega = 2 \cdot \eta \omega \cdot \sin \omega = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \eta 2\omega = \mathbf{-\frac{24}{25}}$$

ii. Λαμβάνοντας υπόψη μας τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta^2 2\omega + \sin^2 2\omega = 1 \quad \text{και} \quad \epsilon \phi 2\omega \cdot \sigma \phi 2\omega = 1$$

έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{13 \cdot [\eta \mu^2 2\omega + \sigma \nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \varepsilon \varphi 2\omega \cdot \sigma \varphi 2\omega + 25 \cdot [\eta \mu 2\omega + \sigma \nu 2\omega]} = \\
 &= \frac{13 \cdot 1 + 12}{18 \cdot 1 + 25 \cdot \left[-\frac{24}{25} + \frac{7}{25} \right]} = \frac{25}{18 + 25 \cdot \left[-\frac{17}{25} \right]} = \frac{25}{18 - 17} = \mathbf{25}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4_17839

α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του α :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 3 \\ 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) - 1 \cdot 3 = \alpha^2 - 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 2)$$

$$\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (\alpha + 1) - 3 \cdot 3 = 3\alpha + 3 - 9 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha - 2)$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (\alpha - 1) \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3\alpha - 3 - 3 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha - 2)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση για $\mathbf{D} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$ και $\alpha \neq -2$. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική λύση θα είναι:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{D}_x}{\mathbf{D}} = \frac{3(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} = \frac{3}{\alpha + 2}$$

$$\mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{D}_y}{\mathbf{D}} = \frac{3(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} = \frac{3}{\alpha + 2}$$

Είναι προφανές ότι $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$.

β. Αν $\mathbf{D} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 2$ ή $\alpha = -2$ τότε...

i. Για $\alpha = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} (2 - 1)x + 3y = 3 \\ x + (2 + 1)y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

που είναι **αόριστο**. Επειδή $x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 3y$, η μορφή των άπειρων λύσεων θα είναι: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (3 - 3\kappa, \kappa)$.

ii. Για $\alpha = -2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} (-2-1)x + 3y = 3 \\ x + (-2+1)y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases}$$

που είναι **αδύνατο**.

γ. Στην περίπτωση που $\alpha = 3$, επειδή $3 \neq 2, -2$, θα είναι $D \neq 0$. Συνεπώς, θα έχουμε μοναδική λύση και προφανώς οι ευθείες θα **τέμνονται** στο σημείο, με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

Στην περίπτωση που $\alpha = 2$, δείξαμε ότι το σύστημα που προκύπτει είναι αόριστο, συνεπώς οι δύο ευθείες θα **ταυτίζονται**.

Στην περίπτωση που $\alpha = -2$, δείξαμε ότι το σύστημα που προκύπτει είναι αδύνατο, συνεπώς οι δύο ευθείες θα είναι **παράλληλες**.

ΘΕΜΑ 4_17840

α. Επιλύουμε το παραμετρικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του λ :

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$

► Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda}{-\lambda - 2} = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$$

$$y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda - 1}{-\lambda - 2} = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}$$

► Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1) \cdot (-x + 2y = 1) \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

που είναι **αδύνατο**.

β. Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{y = 0}$$

Για $y = 0$, η δεύτερη εξίσωση γίνεται: $x - 0 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{x = -1}$

Ζητείται τώρα γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$ τέτοια, ώστε: **$\sin \theta = -1$** και **$\eta \mu \theta = 0$** .

Όμως, στο διάστημα $[0, 2\pi]$, υπάρχει μόνο μία γωνία ώστε $\sin \theta = -1$, η **$\theta = \pi$** . Από την άλλη, υπάρχουν τρεις γωνίες ώστε $\eta \mu \theta = 0$, οι **$\theta = 0$** , **π** και **2π** . Είναι, λοιπόν, προφανές ότι **$\theta = \pi$** είναι η μοναδική γωνία στο $[0, 2\pi]$, που ικανοποιεί και τις δύο προϋποθέσεις.

γ. Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 & \oplus \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3y = 2 \Leftrightarrow \mathbf{y = 2/3}$$

Για $y = 2/3$, η δεύτερη εξίσωση γίνεται: $x + 2/3 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1/3}$

Αν υπήρχει γωνία ω τέτοια, ώστε $\sin \omega = 1/3$ και $\eta\mu \omega = 2/3$, τότε θα έπρεπε οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί να ικανοποιούν τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$. Όμως:

$$\mathbf{\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1}$$

Όπερ έδει δείξαι.

ΘΕΜΑ 4_17841

α. Γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω είναι $-1 \leq \eta\omega \leq 1$, συνεπώς:

$$-1 \leq \eta\mu(\pi t/30) \leq 1 \Leftrightarrow (\text{πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με } 6)$$

$$-6 \leq 6 \cdot \eta\mu(\pi t/30) \leq 6 \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη το } 8)$$

$$2 \leq 8 + 6\eta\mu(\pi t/30) \leq 14 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{2 \leq h(t) \leq 14}$$

Συνεπώς, το μέγιστο ύψος του καθίσματος είναι 14 μέτρα, ενώ το ελάχιστο 2 μέτρα.

- Για το μέγιστο ύψος έχουμε:

$$h(t) = 14 \Leftrightarrow 8 + 6 \cdot \eta\mu(\pi t/30) = 14 \Leftrightarrow 6\eta\mu(\pi t/30) = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = 1$$

Φυσικά, θα μπορούσαμε πολύ ταχύτερα να σκεφτούμε ότι, εφόσον δεν αλλάζει η μονοτονία (ο συντελεστής του ημιτόνου είναι θετικός), η $h(x)$ γίνεται μέγιστη όταν το $\eta\mu(\pi t/30)$ γίνεται μέγιστο, όταν δηλαδή γίνεται ίσο με τη μονάδα.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$\eta\mu(\pi t/30) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = \eta\mu(\pi/2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \stackrel{\cdot 30}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \pi t = 60\kappa\pi + 15\pi \\ \pi t = 60\kappa\pi + 15\pi \end{cases} \stackrel{:\pi}{\Leftrightarrow} t = 60\kappa + 15 \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Όμως $0 \leq t \leq 180$, συνεπώς:

1ος τρόπος

Επειδή το διάστημα είναι μικρό και οι τιμές ακέραιες, οι πράξεις είναι απλούστερες κι από απλοϊκές! Με λίγες δοκιμές, για μικρές τιμές του κ , έχουμε:

$$\text{Για } \kappa = 0, t = 60 \cdot 0 + 15 = 15$$

$$\text{Για } \kappa = 1, t = 60 \cdot 1 + 15 = 75$$

$$\text{Για } \kappa = 2, t = 60 \cdot 2 + 15 = 135$$

Συνεπώς, το κάθισμα των δύο κοριτσιών βρίσκεται στο μέγιστο ύψος μετά από **15**, **75** και **135 sec**.

2ος τρόπος

Αυτός ο τρόπος δεν ενδείκνυται για τη συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά παρατίθεται για διδακτικούς μόνο λόγους, ως γενική περίπτωση επίλυσης:

$$0 \leq t \leq 180 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 60\kappa + 15 \leq 180 \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη το } -15)$$

$$-15 \leq 60\kappa \leq 165 \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε όλα τα μέλη με } 60)$$

$$-15/60 \leq \kappa \leq 165/60 \Leftrightarrow (\text{απλοποιούμε})$$

$$-1/4 \leq \kappa \leq 11/4$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ και οι ακέραιες τιμές, που βρίσκονται ανάμεσα στο $-1/4 = -0,25$ και το $11/4 = 2,75$ είναι:

$$\kappa = 0, 1 \text{ και } 2$$

Επομένως:

$$\text{Για } \kappa = 0, t = 60 \cdot 0 + 15 = \mathbf{15}$$

$$\text{Για } \kappa = 1, t = 60 \cdot 1 + 15 = \mathbf{75}$$

$$\text{Για } \kappa = 2, t = 60 \cdot 2 + 15 = \mathbf{135}$$

- Σκεπτόμενοι ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, το ύψος γίνεται ελάχιστο αν:

$$h(t) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/30) = \eta\mu(-\pi/2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \stackrel{\cdot 30}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \pi t = 60\kappa\pi - 15\pi \\ \pi t = 60\kappa\pi + 45\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{:\pi}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 60\kappa - 15 \\ t = 60\kappa + 45 \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Όμως $0 \leq t \leq 180$, συνεπώς με δοκιμές η 1η λύση δίνει:

$$\text{Για } \kappa = 1, t = 60 \cdot 1 - 15 = 45$$

$$\text{Για } \kappa = 2, t = 60 \cdot 2 - 15 = 105$$

$$\text{Για } \kappa = 3, t = 60 \cdot 3 - 15 = 165$$

Ενώ η 2η λύση δίνει:

$$\text{Για } \kappa = 0, t = 60 \cdot 0 + 45 = 45$$

$$\text{Για } \kappa = 1, t = 60 \cdot 1 + 45 = 105$$

$$\text{Για } \kappa = 2, t = 60 \cdot 2 + 45 = 165$$

Που είναι προφανώς οι ίδιες. Συνεπώς, το κάθισμα των δύο κοριτσιών φτάνει στο ελάχιστο ύψος τις χρονικές στιγμές **45**, **105** και **165 sec**.

Παρατήρηση

Ένας διαφορετικός τρόπος σκέψης θα ήταν να βρούμε, αρχικά, την περίοδο της τριγωνομετρικής συνάρτησης, η οποία δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi/\omega$, όπου ω ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στην άσκησή μας, ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t , ενώ ο συντελεστής της είναι $\omega = \pi/30$. Συνεπώς:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = \frac{60\pi}{\pi} = \mathbf{60 \text{ sec}}$$

Συνεπώς, αν παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή σε κάποια χρονική στιγμή, τότε θα παρουσιάζει και πάλι αντίστοιχη τιμή μετά από χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή μετά από 60 sec. Αυτό σημαίνει πως αν βρούμε πχ. ότι για $\kappa = 1$ έχουμε ελάχιστη τιμή σε χρόνο 45 sec, τότε η επόμενη ελάχιστη τιμή θα είναι μετά από: $45 + 60 = 105$ sec, η μεθεπόμενη μετά από $105 + 60 = 165$ sec, κ.τ.λ.

- β.** Εφόσον το μέγιστο ύψος του καθίσματος είναι 14 μέτρα και το ελάχιστο 2 μέτρα, άρα η διάμετρος της ρόδας θα είναι $14 - 2 = 12$ μέτρα και, συνεκδοχικά, η ακτίνα $\rho = \mathbf{6 \text{ m}}$.

- γ.** Η πρώτη ερώτηση έχει απαντηθεί στην παρατήρηση του ερωτήματος (α) και είναι $\mathbf{T = 60 \text{ sec}}$.

Συνεπώς, ο αριθμός των περιστροφών θα είναι:

$$(\text{συνολικός χρόνος}) : (\text{περίοδος}) = 180 : 60 = \mathbf{3 \text{ περιστροφές}}$$

- δ. i.** Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι στο διάστημα $[0, 90]$:
- η h παρουσιάζει μέγιστο 14 τις στιγμές $t = 15$ και 75 sec.
 - η h παρουσιάζει ελάχιστη τιμή 2 τη στιγμή $t = 45$ sec.

Συνεπώς:

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)		14		2		14	

Με απλή αντικατάσταση, υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες τιμές της συνάρτησης:

$$h(0) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(\pi \cdot 0/30) = 8 + 6 \cdot \eta\mu 0 = 8 + 0 = 8$$

και προφανώς την ίδια ακριβώς τιμή θα πάρουμε, μετά το πέρας μιας ολόκληρης περιόδου, δηλαδή μετά από 60 sec :

$$h(0) = h(0 + 60) = h(60) = 8$$

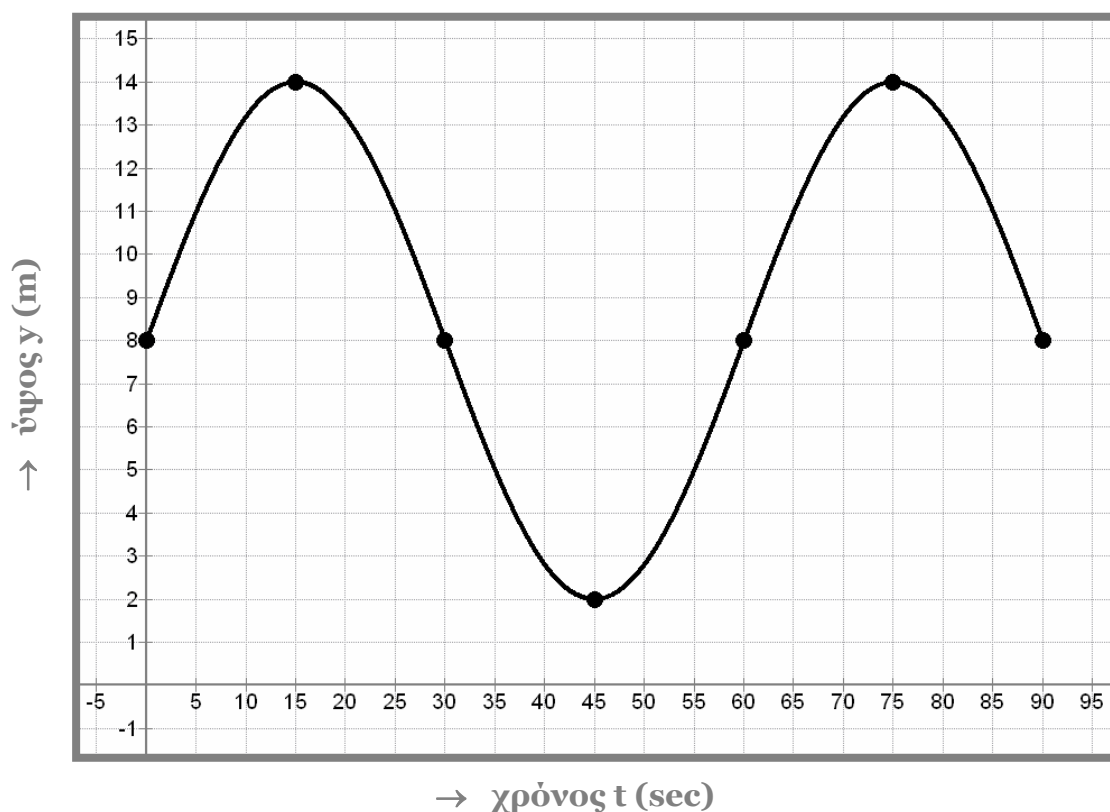
Αναλόγως σκεπτόμενοι θα είναι:

$$h(30) = 8 + 6 \cdot \eta\mu(\pi \cdot 30 / 30) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\pi = 8 + 0 = 8 = \eta\mu(90)$$

Μετά από όλα τα προηγούμενα, ολοκληρώνουμε τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών της συνάρτησης:

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)	8	14	8	2	8	14	8

ii. Είμαστε πλέον σε θέση να σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ 4_17842

- α.** Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A και B , αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης.

Για το σημείο $A(0, 16)$ αυτό σημαίνει ότι:

$$f(0) = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0 - c)^2 - d = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2 - d = 16 \Leftrightarrow \mathbf{c^2 - 2d = 32}$$

Για το σημείο $B(4, 0)$ αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} f(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4 - c)^2 - d = 0 \Leftrightarrow (4 - c)^2 - 2d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16 - 8c + c^2 - 2d = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c^2 - 8c - 2d = -16} \end{aligned}$$

Έχουμε, δηλαδή, το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{c^2 - 2d = 32} \\ \mathbf{c^2 - 8c - 2d = -16} \end{cases}$$

το οποίο και λύνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 - 2d = 32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - 2d = 32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \xrightarrow{(-1) \cdot} \begin{cases} -c^2 + 2d = -32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -c^2 + 2d = -32 \\ c^2 - 8c - 2d = -16 \end{cases} \Leftrightarrow -8c = -48 \Leftrightarrow \mathbf{c = 6} \end{aligned}$$

Η 1η εξίσωση μας δίνει, για $c = 6$:

$$36 - 2d = 32 \Leftrightarrow -2d = -4 \Leftrightarrow \mathbf{d = 2}$$

- β.** Για $c = 6$ και $d = 2$ η εξίσωση της συνάρτησης γίνεται:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 - 2 \Leftrightarrow \\ \mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16} \end{aligned}$$

- i.** Από τις συντεταγμένες των δοθέντων σημείων, είναι προφανές ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(4, 0)$ και τον $y'y$ στο $A(0, 16)$.

Εφόσον η f είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, η γραφική παράστασή της θα είναι παραβολή.

Συνεπώς, η C_f θα τέμνει το άξονα $y'y$ σε ένα μοναδικό σημείο, το οποίο και προφανώς είναι το **$A(0, 16)$** .

Ωστόσο, επειδή μια παραβολή τέμνει τον $x'x$ σε δύο το πολύ σημεία, θα πρέπει να εξετάσουμε μήπως υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής, εκτός από το Β.

Θέτουμε όπου $y = f(x) = 0$ και λύνουμε την εξίσωση, που προκύπτει:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 144 - 128 = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Συνεπώς, τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα εξής δύο:

Β (4, 0) και Γ (8, 0)

- ii. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f , με κάποια σχετική ακρίβεια, χρειάζεται καταρχάς να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της κορυφής της. Γνωρίζουμε, για κάθε παραβολή, ότι οι συντεταγμένες αυτές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad y_0 = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Παρατήρηση: Φυσικά και μπορούμε, πονηρά σκεπτόμενοι και λόγω της αξονικής συμμετρίας μιας παραβολής, να υποψιαστούμε ότι η τετμημένη της κορυφής θα είναι $x_0 = 6$, δηλαδή ακριβώς στο μέσον του διαστήματος $[4, 8]$, που ορίζεται από τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$. Τέλος παρατήρησης.

Επομένως, έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -6$, $\gamma = 16$ και $\Delta = 36 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 = 4$

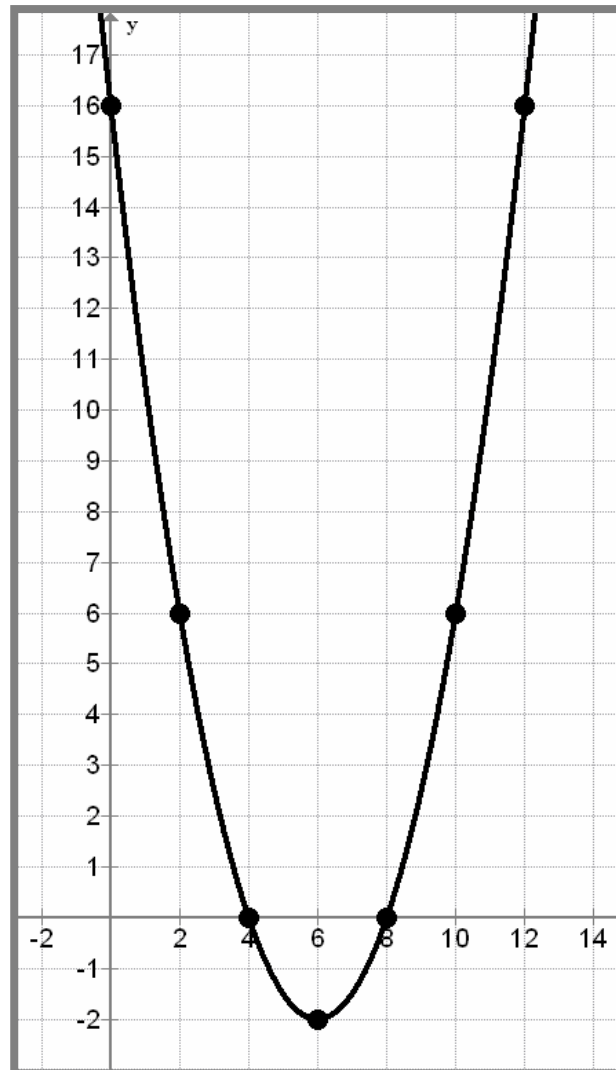
$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{και} \quad y_0 = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{4}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών, εκμεταλλευόμενοι φυσικά και όλα εκείνα τα χρήσιμα στοιχεία, τα οποία είναι ήδη γνωστά, όπως τα σημεία τομής με τους άξονες και την αξονική συμμετρία.

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	16	6	0	-2	0	6	16

Υπολογίζουμε: $f(2) = \frac{1}{2}2^2 - 6 \cdot 2 + 16 = 2 - 12 + 16 = 6 = f(10)$

Προχωρούμε τώρα στην σχεδίαση:



Από την αρχική μορφή του τύπου της f , $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2 - 2$ είναι εύκολο να αντιληφθούμε, ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από εκείνη της $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, αν μετατοπίσουμε την τελευταία κατά:

- 6 μονάδες δεξιά και
- 2 μονάδες προς τα κάτω

iii. Είναι προφανές, από τη γραφική παράσταση ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 6$ ελάχιστη τιμή ίση με $f(6) = -2$.

Όσον αφορά στη μονοτονία, γίνεται επίσης φανερό ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα ($\searrow$) στο διάστημα $(-\infty, 6]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα ($\nearrow$) στο διάστημα $[6, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4_17844

α. Κάνουμε αυτό ακριβώς που μας ζητάνε, σαν καλά παιδιά:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ (-1-y)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ (1+y)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ 1+2y+y^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ 2y^2+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ y^2+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ y(y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ y=0 \text{ ή } y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y=0} \Leftrightarrow x=-1-0 \Leftrightarrow \mathbf{x=-1} \\ \mathbf{y=-1} \Leftrightarrow x=-1+1 \Leftrightarrow \mathbf{x=0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε τις εξής δύο λύσεις : **(-1, 0)** ή **(0, -1)**

β. Δίνεται η εξίσωση: $\sin \omega + \eta \mu \omega = -1$, όμως γνωρίζουμε επιπλέον ότι: $\sin^2 \omega + \eta \mu^2 \omega = 1$. Δηλαδή, οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα ισοδύναμο μ' εκείνο του ερωτήματος (α). Συνεπώς, οι λύσεις του μας είναι γνωστές, άρα έχουμε:

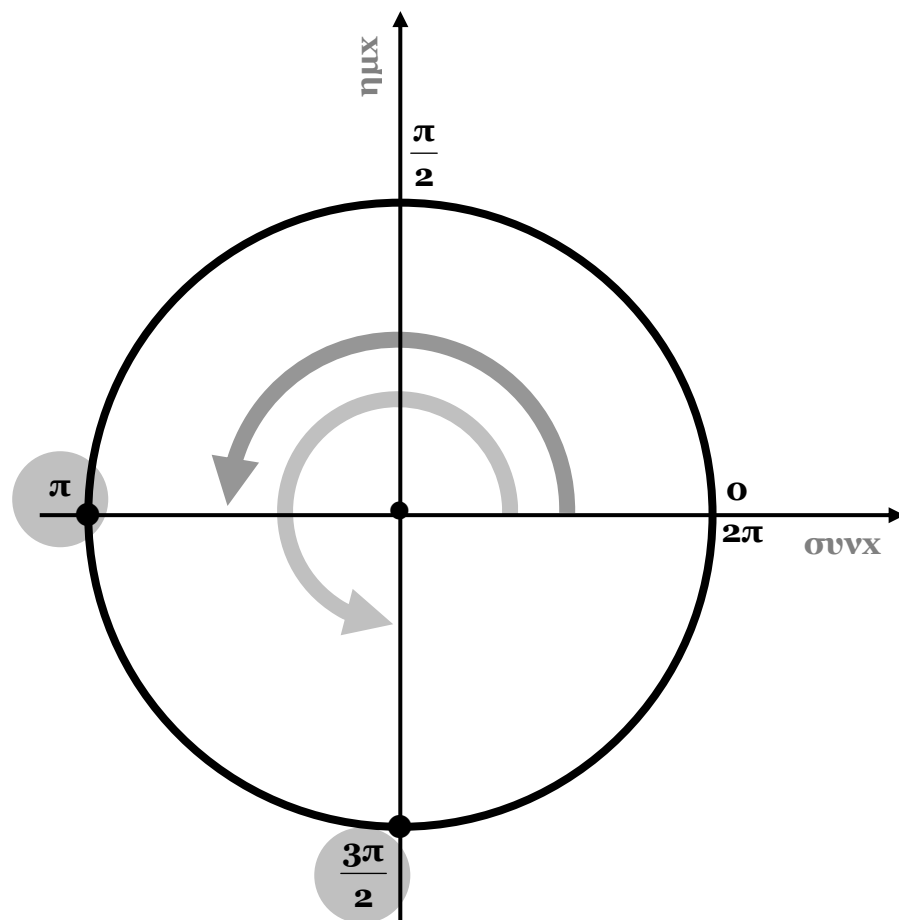
- Για τη λύση $(-1, 0)$ αναζητούμε γωνία ω τέτοια, ώστε:
$$\begin{cases} \sin \omega = -1 \\ \eta \mu \omega = 0 \end{cases}$$

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ υπάρχει μόνον μία γωνία, που ικανοποιεί και τις δύο προϋποθέσεις και είναι $\omega = \pi$.

- Για τη λύση $(0, -1)$ αναζητούμε γωνία ω τέτοια, ώστε:
$$\begin{cases} \sin \omega = 0 \\ \eta \mu \omega = -1 \end{cases}$$

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ υπάρχει μόνον μία γωνία, που ικανοποιεί και τις δύο προϋποθέσεις και είναι $\omega = \frac{3\pi}{2}$.





ΘΕΜΑ 4_17846

- α. Όσον αφορά στην $f(x) = \sin x$, συμπληρώνουμε καταρχήν διαμιάς όσα "κελιά" μας είναι γνωστά από τη θεωρία και τη μελέτη της συνάρτησης :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0		-1		0		1

1ος τρόπος

Με τη βοήθεια των κανόνων αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε:

- $$\bullet \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \text{κανόνας παραπληρωματικών γωνιών} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$\bullet \quad \sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \text{κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά } \pi = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$\bullet \quad \sin \frac{7\pi}{4} = \sin \left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \text{κανόνας αντίθετων γωνιών} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2ος τρόπος

Μπορούμε, επίσης, να κάνουμε την εξής παρατήρηση: οι τιμές του x δεν είναι παρά πολλαπλάσια του $\pi/4$ ή αλλιώς των 90° . Η γωνία αυτή όμως - λόγω που η πλευρά της είναι και διχοτόμος των τεταρτημορίων - έχει με τα πολλαπλάσιά της όλες τις δυνατές συμμετρίες: αξονική ως προς $x'x$, $y'y$ και αξονική ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί να είναι όλοι ίσοι με $\sqrt{2}/2$, κατ' απόλυτη τιμή, διαφέροντας μόνο ως προς το πρόσημο. Με τη βοήθεια του πρακτικού κανόνα ΟΗΕΣ, έχουμε:

- $$\bullet \quad \sin \frac{3\pi}{4} = 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \rightarrow \sin x < 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
- $$\bullet \quad \sin \frac{5\pi}{4} = 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \rightarrow \sin x < 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

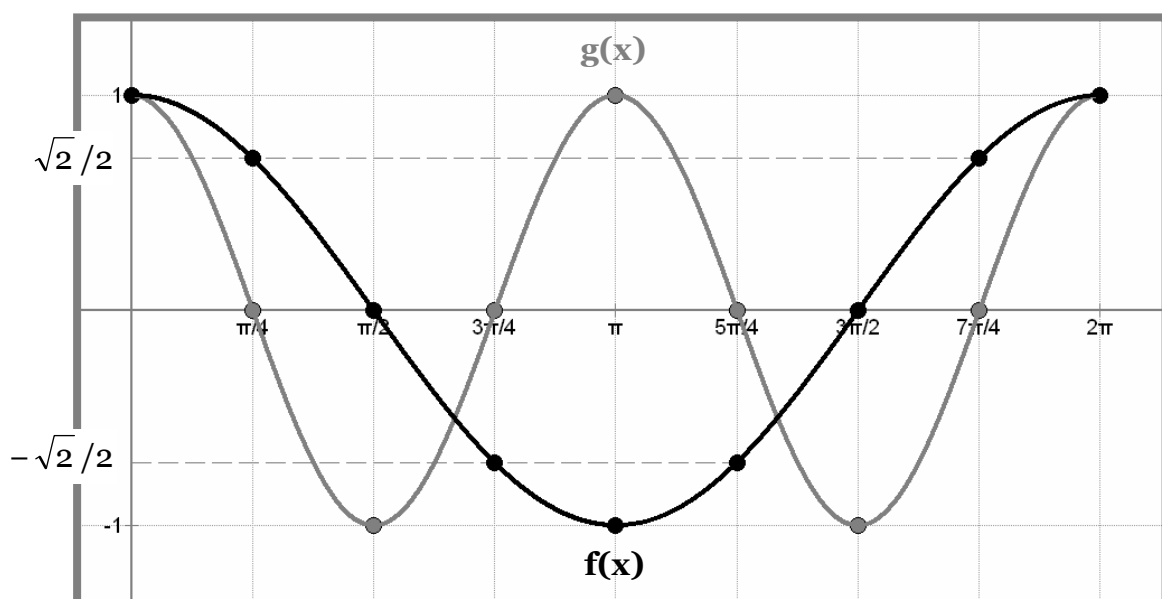
- $\text{συν} \frac{7\pi}{4} = 4\text{o τεταρτημόριο} \rightarrow \text{συν} x > 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Όποιον τρόπο κι αν προτιμήσουμε, τελικά, ο πίνακας τιμών ολοκληρωμένος θα είναι :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Όσον αφορά στη $g(x) = \text{συν} 2x$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$. Συνεπώς, οι τιμές της θα είναι ίδιες με τις τιμές της βασικής συνάρτησης $\text{συν} x$: 1, 0, -1, 0, 1, μόνο «στριμωγμένες» τώρα σε διάστημα περιόδου π , αντί για 2π . Είναι προφανές, ότι στο $[0, 2\pi]$ η $g(x)$ θα κάνει δύο επαναλήψεις. Έχουμε, τελικά:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g(x)	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



- β. Προφανώς, λύσεις της εξίσωσης $\sin 2x = \sin x$ θα αποτελούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g . Από το προηγούμενο σχήμα, στο διάστημα $[0, 2\pi]$ περιμένουμε να υπάρχουν 4 λύσεις, όσα δηλαδή και τα σημεία τομής τους.

γ. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi + x \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi - x \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{3}$$

Απαιτούμε οι παραπάνω λύσεις ν' ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Για την πρώτη εξίσωση, είναι προφανές ότι αυτό συμβαίνει αν $k = 0$ ή $k = 1$, συνεπώς έχουμε δύο λύσεις:

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2\pi$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi \leq 6\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 3$$

Από την οποία, λόγω που $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε λύσεις για $k = 0, 1, 2, 3$.

Για καθεμία από αυτές, έχουμε:

- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \Leftrightarrow x = 0$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$
- $k = 2 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$
- $k = 3 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\pi$

Στο σημείο αυτό, έχουμε υπολογίσει τις τετμημένες των σημείων τομής. Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό των τεταγμένων, επίσης.

► $f(0) = \sin 0 = 1$

► $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$$\text{κανόνας παραπληρωματικών} = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\text{κανόνας αντίθετων} = \sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

► $f(4\pi/3) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) =$

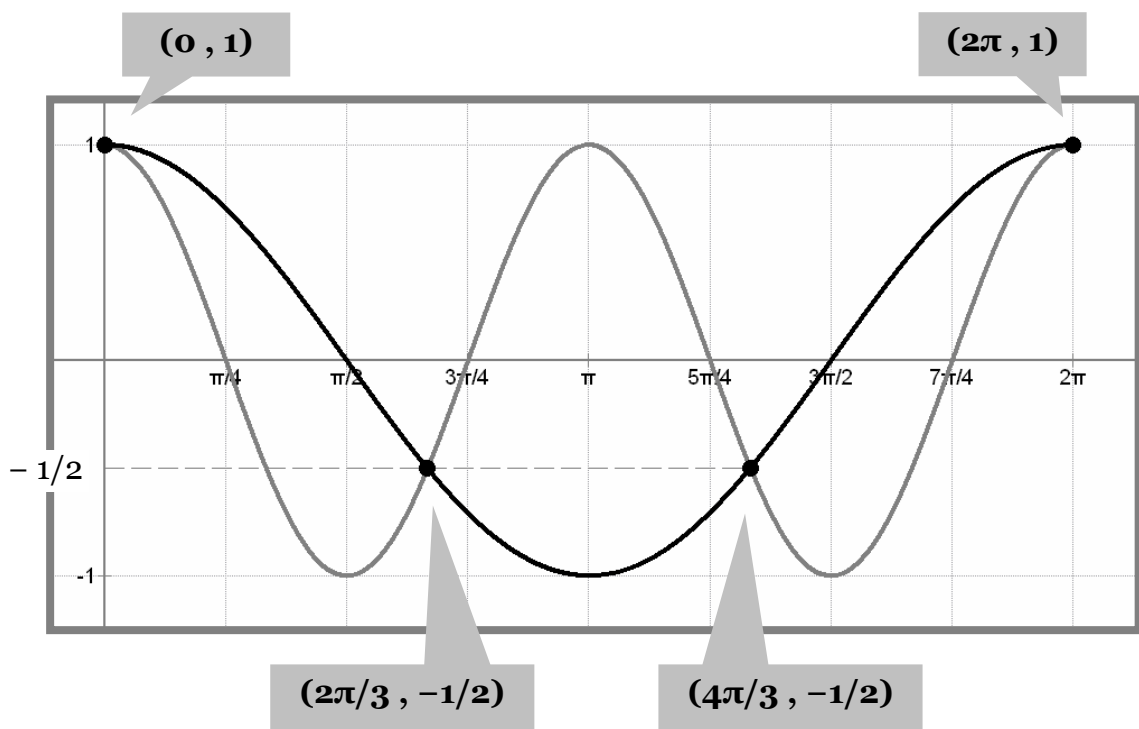
κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά $\pi = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

► $f(2\pi) = \sin 2\pi = 1$

Συνεπώς, έχουμε συγκεντρώσει τα παρακάτω σημεία:

$(0, 1)$, $(2\pi/3, -1/2)$, $(4\pi/3, -1/2)$, $(2\pi, 1)$

Τα οποία - αμ' έπος αμ' έργον - απεικονίζουμε και στη γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ 4_17850

α. Έστω: x = η ηλικία των κοριτσιών
 y = η ηλικία του αγοριού

- "Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14" μεταφράζεται στη μαθηματική γλώσσα ως εξής:

$$x + x + y = 14 \Leftrightarrow \mathbf{2x + y = 14}$$

- "Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης επί την ηλικία γιου είναι 24" μεταφράζεται σε:

$$\mathbf{x \cdot y = 24}$$

- "Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού" μεταφράζεται ως:

$$x + x < y \Leftrightarrow \mathbf{2x < y}$$

β. Λύνουμε των σύστημα εξισώσεων-ανισώσεων, που προκύπτει απ' το προηγούμενο ερώτημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ xy = 24 \\ 2x < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ x(14 - 2x) = 24 \\ 2x < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ 14x - 2x^2 = 24 \\ 2x < y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (-2): \begin{cases} y = 14 - 2x \\ -2x^2 + 14x - 24 = 0 \\ 2x < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \\ 2x < y \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(2) \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Για } x = 4, (1) \Rightarrow y = 14 - 2 \cdot 4 = 6$$

$$\text{Για } x = 3, (1) \Rightarrow y = 14 - 2 \cdot 3 = 8$$

Συνεπώς, έχουμε δύο ζεύγη λύσεων:

$$(x, y) = (4, 6) \text{ ή } (3, 8)$$

αλλά μόνο το δεύτερο ικανοποιεί τον περιορισμό (3). Τελικά, τα δύο κορίτσια είναι από 3 ετών το καθένα και το αγόρι 8 ετών.

ΘΕΜΑ 4_17855

- α. Γνωρίζουμε ότι $T = 2\pi/\omega$, όπου ω ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής t . Εδώ έχουμε $\omega = \pi/4$, συνεπώς:

$$T = 2\pi/\omega \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow T = 8 \text{ (ώρες)}$$

- β. Για $t = 5$ έχουμε :

$$f(5) = 12 \cdot \eta\mu(5\pi/4) + 13$$

Όμως, είναι:

$$\eta\mu \frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \text{κανόνας γωνιών που διαφέρουν κατά } \pi = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως:

$$f(5) = 12 \cdot (-\sqrt{2}/2) + 13 = -6\sqrt{2} + 13 \text{ cm}$$

Για $t = 8$ έχουμε :

$$f(8) = 12 \cdot \eta\mu(8\pi/4) + 13 = 12 \cdot \eta\mu(2\pi) + 13 = 12 \cdot 0 + 13 = 13 \text{ cm}$$

γ. 1ος τρόπος

Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών, στον οποίο βοηθητικά τοποθετούμε και τις τιμές της βασικής συνάρτησης $\eta\mu x$. Από τις τελευταίες, πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή με 12 και προσθέτοντας 13, θα προκύψουν οι αντίστοιχες τιμές της $f(t) = 12 \cdot \eta\mu(\pi t/4) + 13$.

t	0	2	4	6	8
h(t)	13	25	13	1	13

$\eta\mu t$ 0 1 0 -1 0

Παρατηρούμε ότι η απόσταση γίνεται ελάχιστη και ίση με **1 m**, τη χρονική στιγμή **t = 6 sec**.

2ος τρόπος

Μπορούμε, ωστόσο, να δουλέψουμε και καθαρά αλγεβρικά. Γνωρίζουμε ότι:

$$-1 \leq \eta\mu(\pi t/4) \leq 1 \Leftrightarrow (\text{πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με } 12)$$

$$-12 \leq 12 \cdot \eta\mu(\pi t/4) \leq 12 \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε σε όλα τα μέλη } 13)$$

$$-12 + 13 \leq 12 \cdot \eta\mu(\pi t/4) + 13 \leq 12 + 13 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq f(t) \leq 25$$

Από την τελευταία, συμπεραίνουμε εύκολα ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι 1 m και η μέγιστη τιμή 25 m .

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(t) = 1 \Leftrightarrow 12 \cdot \eta\mu(\pi t/4) + 13 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi t/4) = -1 = \eta\mu(3\pi/2)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi t}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

- Από την πρώτη λύση, με απαλοιφή παρονομαστών επί 4, έχουμε:

$$\pi t = 8\kappa\pi + 6\pi \Leftrightarrow t = 8\kappa + 6$$

Όμως πρέπει $t \in [0, 8]$ δηλαδή:

$$0 \leq t \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 8\kappa + 6 \leq 8 \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε } -6 \text{ σε όλα τα μέλη})$$

$$-6 \leq 8\kappa \leq 2 \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε με } 8 \text{ όλα τα μέλη})$$

$$-3/4 \leq \kappa \leq 1/4$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, η μοναδική λύση της προηγούμενης είναι για $\kappa = 0$.

Στην περίπτωση αυτή: $t = 8 \cdot 0 + 6 \Leftrightarrow t = 6 \text{ sec}$.

- Από την δεύτερη λύση, με απαλοιφή παρονομαστών επί 4, έχουμε:

$$\pi t = 8\kappa\pi - 2\pi \Leftrightarrow t = 8\kappa - 2$$

Για $t \in [0, 8]$ έχουμε:

$$0 \leq t \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 8\kappa - 2 \leq 8 \Leftrightarrow (\text{προσθέτουμε } 2 \text{ σε όλα τα μέλη})$$

$$2 \leq 8\kappa \leq 10 \Leftrightarrow (\text{διαιρούμε με } 8 \text{ όλα τα μέλη})$$

$$1/4 \leq \kappa \leq 5/4$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, η προηγούμενη έχει λύση μόνα για $\kappa = 1$. Στην

περίπτωση αυτή: $t = 8 \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow t = 6 \text{ sec}$.